

Licence 3 de Mathématiques Équations différentielles ordinaires

Contrôle terminal du 24 juin 2024

Durée: 3 heures

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Les téléphones portables, ordinateurs, tablettes et autres appareils électroniques doivent être éteints.

Les points sont donnés à titre indicatif.

Questions de cours 1 (4 points).

On considère l'EDO

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (\mathcal{E})$$

avec $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et $J, U \subset \mathbb{R}$ des ouverts.

1. Soit $u : J \rightarrow U$. Définir « u est une sur-solution stricte de \mathcal{E} ».
2. Soit $v : J \rightarrow U$. Définir « v est une sous-solution stricte de \mathcal{E} ».
3. Énoncer le théorème de comparaison dans le futur avec des sur-solutions et des sous-solutions strictes.
4. Énoncer le lemme de Gronwall.

Exercice 1 (4 points).

On pose $J = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'EDO (\mathcal{E}_1) sur $J \times U$ donnée par

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad f(t, x) = t(2 + \tanh(t))x(t - x^2).$$

1. Représenter graphiquement l'isocline $\mathcal{I}_0 = \{(t, x) \in J \times U : f(t, x) = 0\}$, et établir le régionnement de $\mathbb{R}^2 = J \times U$ selon le signe de f .
2. Montrer que si $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution maximale de (\mathcal{E}_1) , alors la fonction $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x_1(t) = -x(t)$ pour tout $t \in I$ est également une solution maximale de (\mathcal{E}_1) .
Vérifier en particulier que $x_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0(t) = 0$ est une solution de (\mathcal{E}_1) .
3. Montrer que $v :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $v(t) = \sqrt{t}$ est une sur-solution stricte de (\mathcal{E}_1) .
4. Trouver $a > 0$ tel que $u :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ soit une sous-solution stricte de (\mathcal{E}_1) .
5. Esquisser le graphe de v , u et quelques solutions de (\mathcal{E}_1) sur le même graphe qu'à la question 1.

Exercice 2 (8 points).

Soit (\mathcal{E}_2) l'EDO sur $J \times U$, avec $J = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}^2$, définie par

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t), \\y'(t) &= x(t) - x(t)^3.\end{aligned}$$

1. Ce système est-il conservatif ? Est-il dissipatif ?
2. Montrer que si $\{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ est une solution maximale de (\mathcal{E}_2) , alors $\{(-x(t), -y(t)) : t \in I\}$ est également une solution maximale de (\mathcal{E}_2) .
3. Déterminer tous les points singuliers de (\mathcal{E}_2) .
4. Pour chacun des points singuliers,
 - (a) Calculer la matrice Jacobienne A du champ de vecteurs en ce point singulier. La linéarisation de (\mathcal{E}_2) autour du point singulier s'écrit donc $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
 - (b) Calculer les valeurs propres de A , et déterminer un vecteur propre pour chacune de ces valeurs propres.
 - (c) Calculer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - (d) Préciser la nature du point singulier (nœud, foyer, col, centre).
 - (e) Esquisser le portrait de phase du système linéarisé.
5. Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2.$$

Étudier la fonction u . En particulier, déterminer son signe, ses points stationnaires, les intervalles où u est croissante et décroissante, et son comportement à l'infini.

Esquisser le graphe de la fonction u .

6. On définit la fonction $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x, y) = u(x) + \frac{1}{2}y^2$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble

$$\Gamma_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = a\}.$$

Esquisser sur un même dessin les ensembles Γ_0 , $\Gamma_{-1/4}$, $\Gamma_{-1/8}$ et Γ_1 .

Indication : On pourra résoudre l'équation $V(x, y) = a$ par rapport à y , en précisant l'intervalle d'existence et le nombre de solutions selon la valeur de x .

7. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et soit $(x, y) : I_{(x_0, y_0)} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (\mathcal{E}_2) de condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Soit $v(t) = V(x(t), y(t))$. Calculer $v'(t)$ pour tout $t \in I_{(x_0, y_0)}$.
Que peut-on en déduire sur $I_{(x_0, y_0)}$?
8. Esquisser le portrait de phase de (\mathcal{E}_2) .

Exercice 3 (4 points).

Soit (\mathcal{E}_3) l'EDO sur $J \times U$, avec $J = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}^2$, définie par

$$\begin{aligned}x'(t) &= y(t) , \\y'(t) &= \mu[1 - x(t)^2]y(t) - x(t) .\end{aligned}$$

et $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique point singulier de (\mathcal{E}_3) .
2. Soit A la linéarisation de (\mathcal{E}_3) en $(0, 0)$. Déterminer les valeurs propres de A en fonction de μ . Déterminer la nature du point singulier en fonction de μ (nœud, foyer, col, centre). Préciser, quand c'est possible à partir de cette linéarisation, la stabilité de $(0, 0)$.
3. On considère la fonction $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) .$$

Montrer que si $\mu < 0$, alors V est une fonction de Lyapunov pour $(0, 0)$. Que peut-on en déduire sur la stabilité de ce point ?

4. On considère maintenant la fonction $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$W(x, y) = \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)x^2 - \mu xy + y^2 .$$

Montrer que si $\mu < 0$, alors W est une fonction de Lyapunov stricte pour $(0, 0)$. Que peut-on en déduire sur la stabilité de ce point ?

Indication : On pourra écrire la dérivée de W le long du champ de vecteurs sous la forme

$$(x \ y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x, y)$$

pour une matrice M et un reste $R(x, y) = o(x^2 + y^2)$, et étudier les valeurs propres de M .