

Licence 3 de Mathématiques Équations différentielles ordinaires

Contrôle terminal (session 2) du 24 juin 2024 – Corrigé

Questions de cours (4 points).

1. u est une sur-solution stricte dans le futur de l'EDO (\mathcal{E}) si $u'(t) > f(t, u(t))$ pour tout $t \in J$.
2. u est une sous-solution stricte dans le futur de l'EDO (\mathcal{E}) si $u'(t) < f(t, u(t))$ pour tout $t \in J$.
3. **Théorème de comparaison** : Soit $y : I \rightarrow U$ une solution de l'EDO, et soit $u : L \rightarrow U$ une sur-solution stricte. On suppose que $t_0 \in J \cap L$ et que $y(t_0) \leq u(t_0)$. Alors $y(t) < u(t)$ pour tout $t > t_0$ tel que $t \in I \cap L$.
De même, soit $v : L \rightarrow U$ une sous-solution stricte. On suppose que $t_0 \in J \cap L$ et que $y(t_0) \geq v(t_0)$. Alors $y(t) > v(t)$ pour tout $t > t_0$ tel que $t \in I \cap L$.
4. **Lemme de Gronwall** : Soient $k, b \in \mathbb{R}$ avec $k > 0$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que pour tout $t \in I$, on ait $\|y'(t)\| \leq k\|y(t)\| + b$. Alors, pour tout $t, t_0 \in I$, on a

$$\|y(t)\| \leq \|y(t_0)\| e^{k|t-t_0|} + \frac{b}{k} [e^{k|t-t_0|} - 1] .$$

Exercice 1 (4 points).

1. Comme $2 + \tanh(t) \geq 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'isocline \mathcal{I}_0 est la réunion de deux droites et d'une parabole :

$$\mathcal{I}_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\} \cup \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = t\} .$$

Esquisse de \mathcal{I}_0 : voir plus bas.

2. Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale de (\mathcal{E}_1) , et soit $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x_1(t) = -x(t)$ pour tout $t \in I$. Alors

$$x_1'(t) = -x'(t) = -f(t, x(t)) = f(t, -x(t)) = f(t, x_1(t))$$

pour tout $t \in I$, où l'on a utilisé le fait que $f(t, -x) = -f(t, x)$ pour tout (t, x) . Par conséquent, x_1 est également une solution. Si elle n'était pas maximale, on pourrait la prolonger, donc on pourrait également prolonger x , ce qui contredit le fait que x est supposée maximale. Ceci montre que la solution x_1 est maximale.

Si $x_0(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $x_0'(t) = 0$ et $f(t, x_0(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, x_0 est une solution (globale) de (\mathcal{E}_1) .

3. $v(t) = \sqrt{t}$ satisfait $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 = f(t, v(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. C'est donc bien une sur-solution stricte de (\mathcal{E}_1) .

4. $u(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ satisfait $u'(t) = \frac{1}{4\sqrt{t}}$ pour tout $t \in]0, \infty[$. De plus,

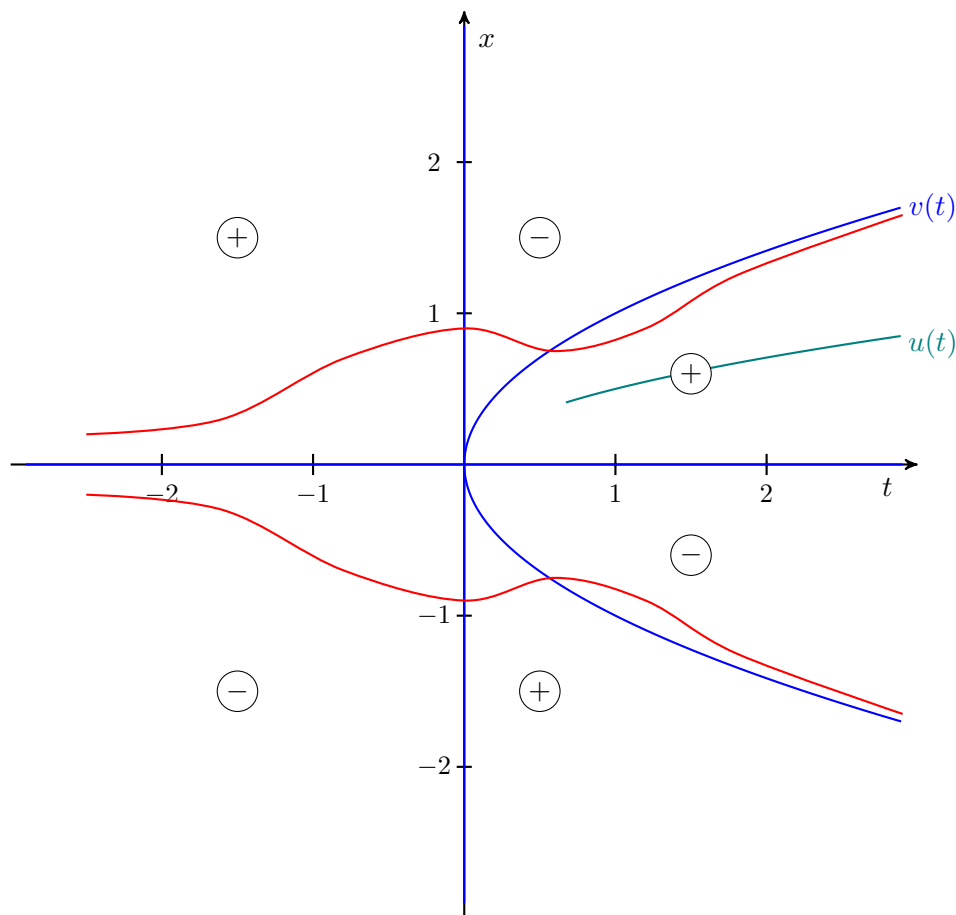
$$f(t, u(t)) = \frac{3}{8}(2 + \tanh(t))t^{5/2}$$

pour tout $t \in]0, \infty[$. La fonction u est donc une sous-solution stricte de (\mathcal{E}_1) sur $]a, \infty[$ à condition que

$$\frac{3}{2}(2 + \tanh(t))t^3 \geq 1 \quad \forall t \in]a, \infty[.$$

Comme le membre de gauche de cette inégalité tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow \infty$, elle est satisfaite pour a assez grand. Par exemple, comme $\tanh(t) > 0$ pour tout $t > 0$, $a = 3^{-1/3}$ convient.

5. Esquisse :



Exercice 2 (8 points).

1. On calcule la divergence de f :

$$\operatorname{div} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(x - x^3) = 0.$$

Comme cette quantité est nulle pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le flot est conservatif.

2. Si $\{(x(t), y(t)) : t \in I\}$ est une solution maximale de (\mathcal{E}_2) , et que $x_1(t) = -x(t)$, $y_1(t) = -y(t)$, alors on a

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x'(t) = -y(t) = y_1(t), \\ y_1'(t) &= -y'(t) = -x(t) + x(t)^3 = x_1(t) - x_1^3(t). \end{aligned}$$

Ceci montre que (x_1, y_1) est également une solution. Celle-ci est maximale par le même argument qu'à l'exercice 1.2.

3. Les points singuliers sont solutions du système

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - x^3 = 0. \end{cases}$$

La seconde équation admet trois solutions, $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$. Il existe donc exactement trois points singuliers, $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

4. La matrice jacobienne du champ de vecteurs en (x, y) est

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le point singulier $(0, 0)$:

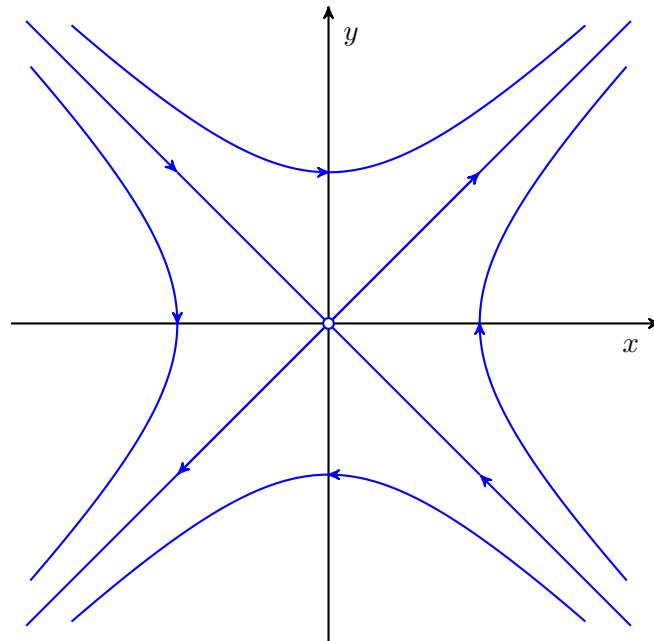
- (a) La matrice jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Les valeurs propres de A sont 1 et -1 . On peut choisir les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres associés.
 (c) On peut observer que $A^2 = \mathbb{1}$ et reconnaître les séries des fonctions hyperboliques, ou procéder par changement de variables. Le résultat est

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

- (d) Le point singulier $(0, 0)$ est un col.
 (e) Portrait de phase :



Pour le point singulier $(0, 1)$:

(a) La matrice jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Les valeurs propres de A sont $\sqrt{2}i$ et $-\sqrt{2}i$. On peut choisir comme vecteurs propres associés

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} .$$

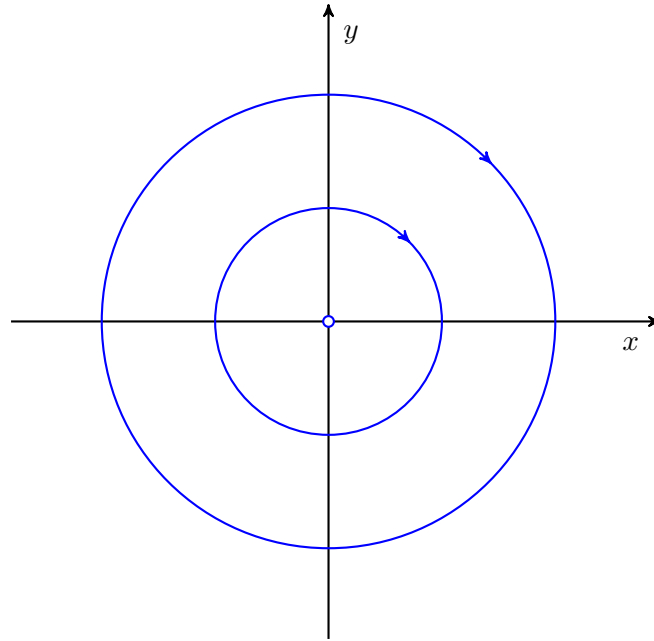
(c) On a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} .$$

Une façon de le montrer est d'observer que $A^2 = -2I$, et de sommer la série de l'exponentielle, en distinguant les termes pairs et impairs. On peut également procéder par changement de base.

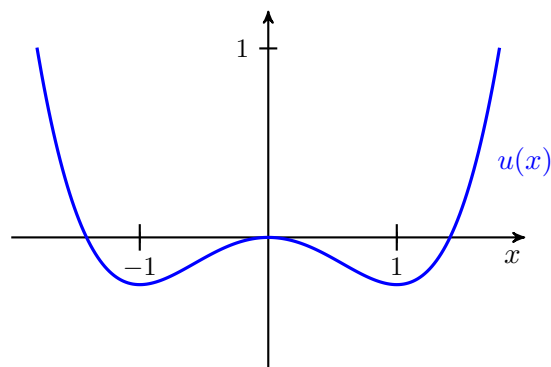
(d) Le point singulier $(0, 0)$ est un centre.

(e) Portrait de phase :



Pour le point singulier $(0, -1)$: C'est également un centre, avec les mêmes valeurs propres. La seule différence est que le sens de rotation des orbites est inversé.

5. La fonction u s'annule en $0, -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Elle est strictement négative pour $-\sqrt{2} < x < 0$ et pour $0 < x < \sqrt{2}$, et strictement positive pour $|x| > \sqrt{2}$. La dérivée de u est donnée par $u'(x) = x^3 - x$. La fonction u est décroissante sur $] -\infty, -1[$, croissante sur $] -1, 0[$, décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $]0, \infty[$. La valeur minimale de u , atteinte en $x = \pm 1$, est $-\frac{1}{4}$. Finalement, u tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$.



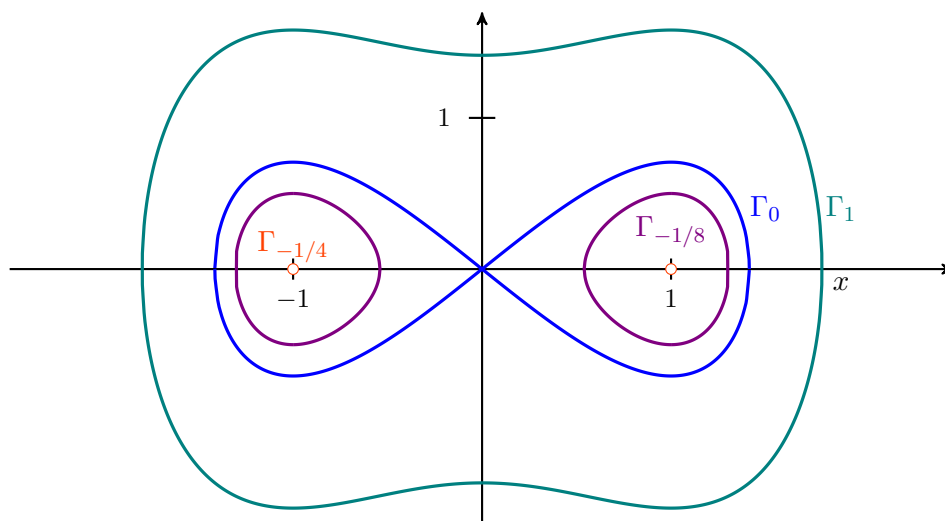
6. $V(x, y) = a$ équivaut à

$$y = \pm \sqrt{2(a - u(x))}.$$

Cette équation a deux solutions si $u(x) < a$, une seule solutions, à savoir 0, si $u(x) = a$, et aucune solution si $u(x) > a$.

- Dans le cas particulier $a = -\frac{1}{4}$, on obtient $\Gamma_{-1/4} = \{(-1, 0), (1, 0)\}$, puisque -1 et 1 sont les seules valeurs de x pour lesquelles $u(x) = -\frac{1}{4}$.

- Pour $-\frac{1}{4} < a < 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : u(x) < a\}$ est formé de deux intervalles ouverts disjoints, et par conséquent Γ_a est formé de deux courbes fermées disjointes.
- Pour $a > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : u(x) < a\}$ est un intervalle ouvert, et par conséquent Γ_a est une courbe fermée.
- Enfin, pour $a = 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : u(x) < a\}$ est formé de deux intervalles ouverts disjoints, dont la fermeture s'intersecte en 0. Cela implique que Γ_0 est une courbe fermée non simple (qui s'auto-intersecte en $x = 0$).



7. On a

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(x(t))x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= (x(t)^3 - x(t))y(t) + y(t)(x(t) - x(t)^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $V(x, y)$ est une constante du mouvement, et le lemme des bouts implique que $I_{(x_0, y_0)} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que toute solution maximale est globale.

8. Le portrait de phase est constitué de courbes Γ_a avec $a \geq -\frac{1}{4}$.

Exercice 3 (4 points).

1. Les points singuliers sont solutions du système

$$\begin{cases} y = 0 \\ \mu[1 - x^2]y - x = 0 \end{cases}.$$

La première équation impliquant $y = 0$, la seconde donne nécessairement $x = 0$. Par conséquent, le seul point singulier est $(0, 0)$.

2. La matrice jacobienne du champ de vecteurs en (x, y) est

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu xy - 1 & \mu(1 - x^2) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on trouve

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont

$$\frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

Il y a sept cas à considérer :

- Si $\mu < -2$, les valeurs propres sont réelles négatives. L'origine est donc un nœud stable.
 - Si $\mu = -2$, la matrice admet -1 comme valeur propre double, et n'est pas diagonalisable. L'origine est donc un nœud impropre stable.
 - Si $-2 < \mu < 0$, les valeurs propres sont complexes conjuguées, de partie réelle négative. L'origine est un foyer stable.
 - Si $\mu = 0$, les valeurs propres sont $\pm i$. L'origine est un centre, et la linéarisation seule ne permet pas de déterminer sa stabilité.
 - Si $0 < \mu < 2$, les valeurs propres sont complexes conjuguées, de partie réelle positive. L'origine est un foyer instable.
 - Si $\mu = 2$, la matrice admet 1 comme valeur propre double, et n'est pas diagonalisable. L'origine est donc un nœud impropre instable.
 - Si $\mu > 2$, les valeurs propres sont réelles positives. L'origine est donc un nœud instable.
3. La fonction V admet clairement un minimum global en $(0,0)$. De plus, la dérivée le long du champ de vecteurs est donnée par

$$xx' + yy' = \mu(1 - x^2)y^2.$$

Si $\mu < 0$, cette quantité est négative ou nulle pour x assez petit, mais elle s'annule en $y = 0$. La fonction V est donc une fonction de Lyapunov non stricte, ce qui implique que l'origine $(0,0)$ est stable. On ne peut toutefois pas immédiatement conclure quant à sa stabilité asymptotique.

4. La fonction W est quadratique, de matrice Hessienne

$$\begin{pmatrix} 2 + \mu^2 & -\mu \\ -\mu & 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant et la trace de cette matrice valent les deux $4 + \mu^2$. Par conséquent, elle est définie positive, et W admet un minimum global en $(0,0)$. Le calcul montre que la dérivée le long du champ de vecteurs de W vaut

$$\mu x^2 + \mu y^2 + \mu^2 x^3 y - 2\mu x^2 y^2.$$

On peut écrire cette expression sous la forme

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x, y)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

et $R(x, y) = \mu^2 x^3 y - 2\mu x^2 y^2$ est un reste d'ordre $o(x^2 + y^2)$. La matrice $-M = -\mu \mathbb{1}$ est définie positive pour $\mu < 0$. Par conséquent, W est une fonction de Lyapunov stricte, ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable.