Licence 3 de Mathématiques
Équations différentielles ordinaires

Contrôle terminal du 15 mai 2024

Durée: 3 heures
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Les téléphones portables, ordinateurs, tablettes et autres appareils électroniques doivent être éteints.
Les points sont donnés à titre indicatif.

Questions de cours 1 (4 points)**.**
On considère l'EDO

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{$\mathcal{E}$}$$

avec $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Soit $x_0 \in U$. Définir
   (a) x_0 est un point singulier de $(\mathcal{E})$.
   (b) x_0 est un point singulier stable dans le futur de $(\mathcal{E})$.
   (c) x_0 est un point singulier asymptotiquement stable dans le futur de $(\mathcal{E})$.
2. Soit $V : W \to \mathbb{R}$, où $W \subset U$ est un voisinage de x_0. Définir
   (a) V est une fonction de Lyapunov pour f au point singulier x_0.
   (b) V est une fonction de Lyapunov stricte pour f au point singulier x_0.
3. Énoncer le théorème de Lyapunov.

Exercice 1 (4 points)**.**
On pose $J = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'EDO $(\mathcal{E}_1)$ sur $J \times U$ donnée par

$$x'(t) = f(t, x(t)) \ , \qquad f(t, x) = t(2 + \cos(t))x(t - x) \ .$$

1. Représenter graphiquement l'isocline $\mathcal{I}_0 = \{(t, x) \in J \times U : \ f(t, x) = 0\}$, et établir le régionnement de $\mathbb{R}^2 = J \times U$ selon le signe de f.
2. Montrer que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ est une solution de $(\mathcal{E}_1)$.
3. Montrer que $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(t) = t$ est une sur-solution stricte de $(\mathcal{E}_1)$.
4. On définit deux fonctions $u_1 :]1, 2] \to \mathbb{R}$, $u_1(t) = 1$ et $u_2 :]2, \infty[\to \mathbb{R}$, $u_2(t) = t - 1$. Montrer que ce sont des sous-solutions strictes de $(\mathcal{E}_1)$.
5. Esquisser le graphe de v, u_1, u_2 et quelques solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur le même graphe qu'à la question 1.

Exercice 2 (7 points)**.**
Soit $(\mathcal{E}_2)$ l'EDO sur $J \times U$, avec $J = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}^2$, définie par

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t) \;, \\ y'(t) &= -y(t) + x(t)y(t) \;. \end{aligned}$$

1. Déterminer tous les points singuliers de $(\mathcal{E}_2)$.
2. Pour chacun des points singuliers,
   (a) Calculer la matrice Jacobienne A du champ de vecteurs en ce point singulier. La linéarisation de $(\mathcal{E}_2)$ autour du point singulier s'écrit donc $\left(\begin{smallmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x(t) \\ y(t) \end{smallmatrix}\right)$.
   (b) Calculer les valeurs propres de A, et déterminer un vecteur propre pour chacune de ces valeurs propres.
   (c) Calculer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (d) Préciser la nature du point singulier (noeud, foyer, col, centre).
   (e) Esquisser le portrait de phase du système linéarisé.
3. On définit les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

$$E_+ = \{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \;, \qquad E_- = \{(0, y) \colon y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \;.$$

   (a) Montrer que E_+ et E_- sont chacun invariant par le flot de $(\mathcal{E}_2)$. En d'autres termes, montrer que pour toute condition initiale (x_0, y_0) appartenant à E_+ (respectivement E_-), la solution maximale de $(\mathcal{E}_2)$ avec cette condition initiale appartient à E_+ (respectivement E_-) pour tous les temps dans son intervalle d'existence.
   (b) Résoudre l'équation restreinte à chacun de ces sous-ensembles.
4. Soit la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) Étudier la fonction u : signe, extrêma, comportement en $\pm\infty$. Esquisser le graphe de u.
   (b) On définit la fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $V(x, y) = u(x)u(y)$. Déterminer les points stationnaires de V et leur nature (maximum, minimum, point selle).
   (c) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et soit $(x, y) : I_{(x_0,y_0)} \to \mathbb{R}^2$ la solution maximale de $(\mathcal{E}_2)$ de condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Soit $v(t) = V(x(t), y(t))$. Calculer $v'(t)$ pour tout $t \in I_{(x_0,y_0)}$.
5. On se donne $c \in]0, \mathrm{e}^{-1}[$. Montrer que l'équation $u(x) = c$ admet exactement deux solutions $M(c) > m(c) > 0$. En déduire que l'ensemble

$$\Gamma(c) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon V(x, y) = c^2\right\}$$

   est une courbe fermée, incluse dans $]0, \infty[\times]0, \infty[$.
   Indication : On pourra résoudre l'équation $V(x, y) = c^2$ par rapport à y, en précisant l'intervalle d'existence et le nombre de solutions selon la valeur de x.
6. Déduire des questions précédentes que $(\mathcal{E}_2)$ admet des orbites périodiques dans $]0, \infty[\times]0, \infty[$. Esquisser le portrait de phase de $(\mathcal{E}_2)$.

Exercice 3 (5 points)**.**
Soit $(\mathcal{E}_3)$ l'EDO sur $J \times U$, avec $J = \mathbb{R}$ et $U = \mathbb{R}^3$, définie par

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = f(x(t), y(t), z(t))$$

où

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y - 3x \\ rx - y - xz \\ xy - z \end{pmatrix} ,$$

et $r \geqslant 0$ est un paramètre.

1. Le flot de $(\mathcal{E}_3)$ est-il conservatif ? Est-il dissipatif ?
2. Montrer que $(0, 0, 0)$ est un point singulier de $(\mathcal{E}_3)$. Pour quelles valeurs de r existe-t-il d'autres points singuliers ? Calculer ces points.
3. Soit A la linéarisation de $(\mathcal{E}_3)$ en $(0, 0, 0)$. Déterminer les valeurs propres de A en fonction de r. Que peut-on en déduire sur la stabilité de $(0, 0, 0)$?
4. On considère la fonction $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

   $$V(x, y, z) = \frac{1}{2}\big(x^2 + 3y^2 + 3z^2\big) .$$

   Montrer que

   $$\langle \nabla V(x, y, z), f(x, y, z) \rangle = (x, y, z) M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   pour une matrice symétrique M que l'on précisera.
5. Déterminer le signe des valeurs propres de M. Pour quelles valeurs de r la fonction V est-elle une fonction de Lyapunov stricte pour $(0, 0, 0)$? Qu'est-ce que cela signifie pour le comportement lorsque $t \to \infty$ des solutions de $(\mathcal{E}_3)$?