Licence 3 de Mathématiques
Équations différentielles ordinaires

Contrôle continu du 15 mai 2024 – Corrigé

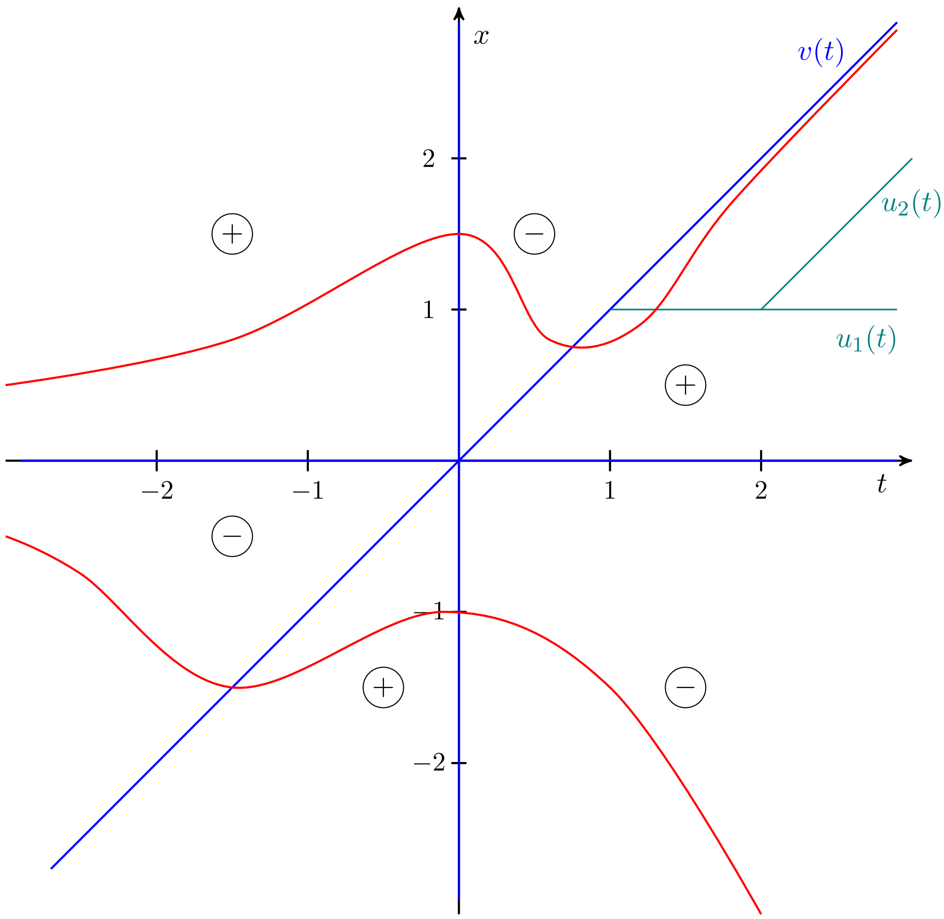
Questions de cours 1 (4 points)**.**

1. (a) x_0 est un point singulier de $(\mathcal{E})$ si $f(x_0) = 0$.
   (b) Le point singulier x_0 est stable dans le futur si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in U$ avec $\|x - x_0\| < \delta$, on ait $\|\varphi_t(x) - x_0\| < \varepsilon$ pour tout $t \in I_x$ avec $t \geqslant 0$. (Ici φ désigne le flot associé à $(\mathcal{E})$ et I_x dénote l'intervalle maximal d'existence de la solution de condition initiale $x(0) = x$.)
   (c) Le point singulier x_0 est asymptotiquement stable dans le futur si x_0 est stable, et si de plus il existe un voisinage W de x_0, $W \subset U$, tel que $\varphi_(x) \to x_0$ lorsque $t \to +\infty$ pour tout $x \in V$.
2. (a) V est une fonction de Lyapunov pour f en x_0 si V admet un minimum strict en x_0, et V décroît le long des orbites incluses dans W.
   (b) V est une fonction de Lyapunov stricte pour f en x_0 si c'est une fonction de Lyapunov, et de plus la décroissance de V le long des orbites est stricte sur $W \setminus \{0\}$.
3. Si $W \subset U$ est un voisinage de x_0, et $V : W \to \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour f en x_0, alors x_0 est stable dans le futur. Si de plus V est une fonction de Lyapunov stricte, alors x_0 est asymptotiquement stable dans le futur.

Exercice 1 (4 points)**.**

1. Comme $2 + \cos(t) \geqslant 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'isocline $\mathcal{I}_0$ est la réunion de trois droites :
$$\mathcal{I}_0 = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon t = 0\right\} \cup \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\right\} \cup \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon x = t\right\} .$$
   Esquisse de $\mathcal{I}_0$: voir plus bas.
2. Si $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $x'(t) = 0$ et $f(t, x(t)) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, x est une solution (globale) de $(\mathcal{E}_1)$.
3. $v(t)$ satisfait $v'(t) = 1 > 0 = f(t, v(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. C'est donc bien une sur-solution stricte de $(\mathcal{E}_1)$.
4. $u_1(t)$ satisfait $u_1'(t) = 0$ pour tout $t \in]1, \infty[$. De plus,
$$f(t, u_1(t)) = f(t, 1) = (2 + \cos(t))t(t-1) \geqslant t(t-1) > 0$$
   pour tout $t \in]1, \infty[$. u_1 est donc bien une sous-solution stricte de $(\mathcal{E}_1)$.
   $u_2(t)$ satisfait $u_2'(t) = 1$ pour tout $t \in [2, \infty[$. De plus,
$$f(t, u_2(t)) = f(t, t-1) = (2 + \cos(t))t(t-1) \geqslant t(t-1) > 0$$
   pour tout $t \in]2, \infty[$. u_2 est donc bien une sous-solution stricte de $(\mathcal{E}_1)$.

5. Esquisse :



Exercice 2 (7 points)**.**

1. Les points singuliers sont solutions du système

$$\begin{cases} x - xy = 0 \\ -y + xy = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(1-y) = 0 \\ y(1-x) = 0 \end{cases}$$

   La première équation a pour solutions 0 et 1. Si $x = 0$, alors la seconde équation admet $y = 0$ comme unique solution. Si $x = 1$, alors la seconde équation admet $y = 1$ comme unique solution. Il existe donc exactement deux points singuliers, $(0,0)$ et $(1,1)$.

2. La matrice jacobienne du champ de vecteurs en (x, y) est

$$\mathrm{D}f(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix} .$$

   Pour le point singulier $(0,0)$ ***:***

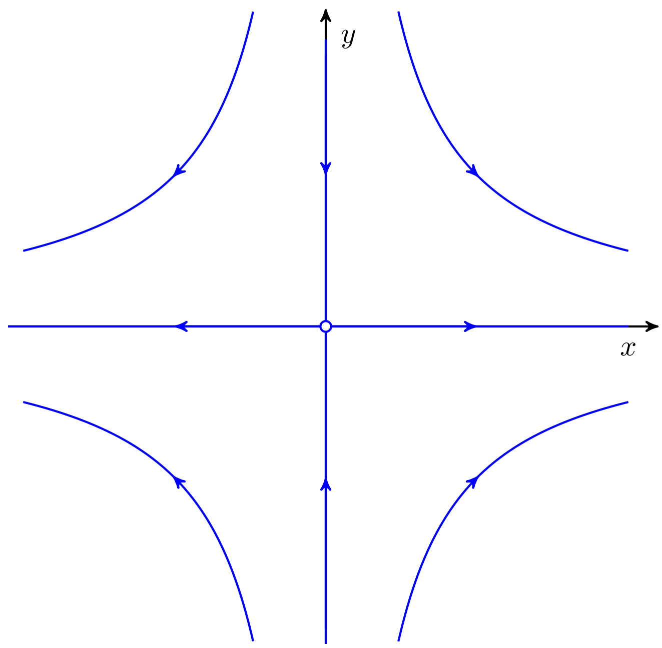
(a) La matrice jacobienne est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(b) Les valeurs propres de A sont 1 et -1. On peut choisir les vecteurs de base canoniques comme vecteurs propres associés.

(c) La matrice A étant diagonale, on a directement
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} .$$

(d) Le point singulier $(0,0)$ est un col.

(e) Portrait de phase :



Pour le point singulier $(1,1)$ ***:***

(a) La matrice jacobienne est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

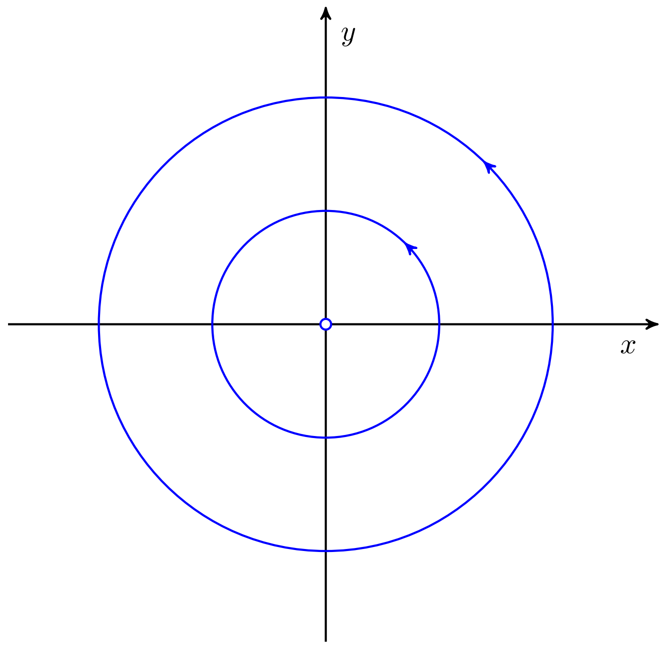
(b) Les valeurs propres de A sont i et $-\mathrm{i}$. On peut choisir comme vecteurs propres associés
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} , \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

(c) Comme vu dans la feuille de TD 4, on a
$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} .$$

Une façon de le montrer est d'observer que $A^2 = -I$, et de sommer la série de l'exponentielle, en distinguant les termes pairs et impairs. On peut également procéder par changement de base.

(d) Le point singulier $(0, 0)$ est un centre.

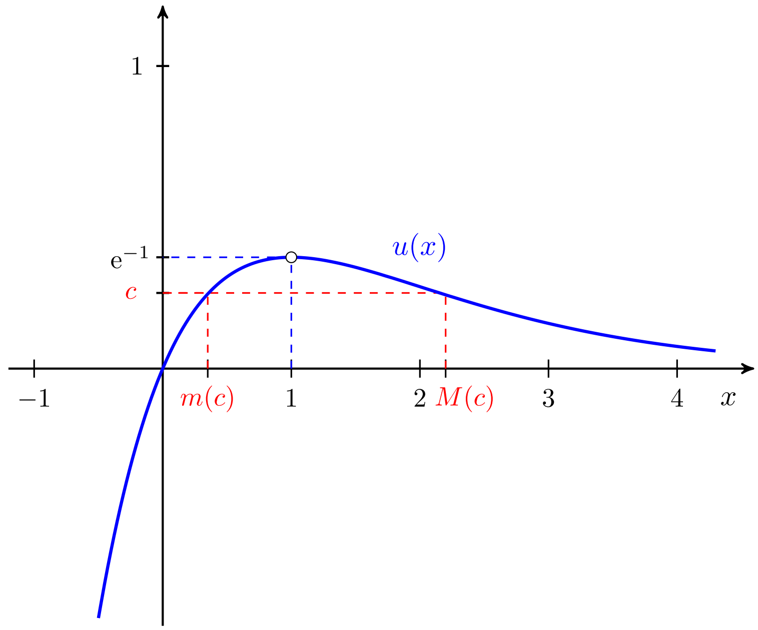
(e) Portrait de phase :



3. (a) Notons f le champ de vecteurs défini par $f(x, y) = (x - xy, -y + xy)$. On remarque tout d'abord que le champ de vecteurs f, étant de classe $\mathcal{C}^1$, satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz. Par conséquent, les solutions de l'EDO sont uniques.
   Soit maintenant $(x_0, 0) \in E_+$. Supposons que la solution de condition initiale $(x_0, 0)$ au temps $t = 0$ satisfait $y(t) = 0$ pour tout $t \in I_{(x_0,0)}$. Alors on obtient $f(x(t), y(t)) = f(x(t), 0)$, d'où $y'(t) = 0$ pour tout $t \in I_{(x_0,0)}$.
   Ceci montre que si $x : I_{(x_0,0)} \to \mathbb{R}$ satisfait le problème de Cauchy $x'(t) = f(x(t), 0)$, $x(0) = x_0$, alors $t \mapsto (x(t), 0)$ est bien une solution de l'équation. Par unicité, c'est l'unique solution de condition initiale $(x_0, 0)$. Par ailleurs, $x(t)$ ne peut pas atteindre 0, qui est un point singulier de $x'(t) = f(x(t), 0)$. Ceci montre que E_+ est invariant.
   Un raisonnement similaire s'applique à E_-.

   (b) L'équation restreinte à E_+ s'écrit $x'(t) = f(x(t), 0) = x(t)$. C'est une équation linéaire dont la solution est donnée par $x(t) = x_0 \,\mathrm{e}^t$. De manière analogue, l'équation restreinte à E_- s'écrit $y'(t) = f(0, y(t)) = -y(t)$. C'est une équation linéaire dont la solution est donnée par $y(t) = y_0 \,\mathrm{e}^{-t}$.

4. (a) $u(x)$ est négatif pour $x < 0$, nul en $x = 0$, et positif pour $x > 0$. La fonction est dérivable, de dérivée $u'(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Cette dérivée s'annule en $x = 1$, est positive pour $x < 1$, et négative pour $x > 1$.
   Il suit que u est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, admet un maximum global en 1, et strictement décroissante sur $]1, \infty[$. Sa valeur maximale est $u(1) = \mathrm{e}^{-1}$.
   Finalement, on obtient
$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = -\infty \,, \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0 \,.$$



(b) V est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Son gradient vaut

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x,y), \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\right) = (u'(x)u(y), u(x)u'(y)) \ .$$

Pour que $u'(x)u(y) = 0$, il faut que soit $x = 1$, soit $y = 0$. Si $x = 1$, alors $u(x)u'(y) = \mathrm{e}^{-1} u'(y) = 0$ si et seulement si $y = 1$. Si $y = 0$, alors $u(x)u'(y) = \mathrm{e}^{-1} u(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. La fonction V a donc deux points stationnaires, à savoir $(0,0)$ et $(1,1)$.
La matrice Hessienne de V en (x,y) est

$$HV(x,y) = \begin{pmatrix} u''(x)u(y) & u'(x)u'(y) \\ u'(x)u'(y) & u(x)u''(y) \end{pmatrix} \ .$$

En particulier, on trouve

$$HV(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \qquad HV(1,1) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix} \ .$$

Les valeurs propres de $HV(0,0)$ sont -1 et 1, ce qui implique que $(0,0)$ est un point selle. La matrice $HV(1,1)$ admet e^{-2} comme valeur propre double, ce qui implique que $(1,1)$ est un maximum (global) de V.

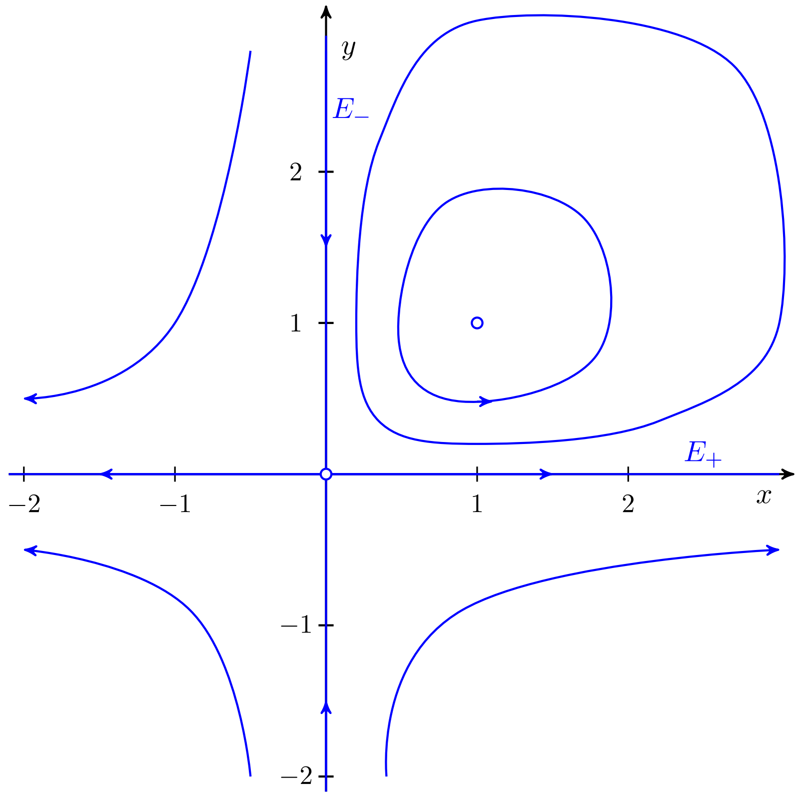
(c) On trouve

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(x)u(y)x(1-y) + u(x)u'(y)(-y)(1-x) \\ &= (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}\,y\,\mathrm{e}^{-y}\,x(1-y) - x\,\mathrm{e}^{-x}(1-y)\,\mathrm{e}^{-y}\,y(1-x) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto v(t)$ est donc constante sur les orbites.

5. La fonction u est strictement croissante sur $]0,1[$, et $u(0) = 0$, $u(1) = \mathrm{e}^{-1}$. Par conséquent, u définit une bijection de $]0,1[$ vers $]0,\mathrm{e}^{-1}[$, ce qui implique que pour tout $c \in]0,\mathrm{e}^{-1}[$, il existe un unique $m(c) \in]0,1[$ tel que $u(m(c)) = c$.
   Par ailleurs, la fonction u est strictement décroissante sur $]1,\infty[$, et $u(1) = \mathrm{e}^{-1}$, $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$. Par conséquent, u définit une bijection de $]1,\infty[$ vers $]0,\mathrm{e}^{-1}[$, ce qui implique que pour tout $c \in]0,\mathrm{e}^{-1}[$, il existe un unique $M(c) \in]1,\infty[$ tel que $u(M(c)) = c$.
   Fixons maintenant $x > 0$. Résoudre $V(x,y) = c^2$ par rapport à y revient à résoudre
   $$u(y) = \frac{c^2}{u(x)} \;.$$
   Pour qu'il existe des solutions, il faut que $\frac{c^2}{u(x)} \in]0,\mathrm{e}^{-1}]$, ce qui revient à exiger $u(x) \geqslant \mathrm{e}\,c^2$, ou encore $x \in [m(\mathrm{e}\,c^2), M(\mathrm{e}\,c^2)]$.
   Pour tout $x \in (m(\mathrm{e}\,c^2), M(\mathrm{e}\,c^2))$, il existe deux solutions, données par
   $$y_-(x,c) = m\biggl(\frac{c^2}{u(x)}\biggr) \in (0,1) \qquad \text{et} \qquad y_+(x,c) = M\biggl(\frac{c^2}{u(x)}\biggr) \in (1,\infty) \;.$$
   Dans le cas limite $x = m(\mathrm{e}\,c^2)$, on a $u(x) = \mathrm{e}\,c^2$, et l'équation devient $u(y) = \mathrm{e}^{-1}$, dont l'unique solution est $y = 1$. De même, si $x = M(\mathrm{e}\,c^2)$, alors l'unique solution est $y = 1$. On a donc montré que l'équation $V(x,y) = c^2$ admet
   - deux solutions $y = y_\pm(x,c)$ si $x \in (m(\mathrm{e}\,c^2), M(\mathrm{e}\,c^2))$;
   - une solution $y = 1$ si $x = m(\mathrm{e}\,c^2)$ ou si $x = M(\mathrm{e}\,c^2)$;
   - aucune solution sinon.

   En résumé, l'ensemble des solutions s'écrit $\Gamma(c) = \Gamma_+(c) \cup \Gamma_-(c)$, où
   $$\begin{aligned}\Gamma_+(c) &= \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [m(\mathrm{e}\,c^2), M(\mathrm{e}\,c^2)], y = y_+(x,c)\bigr\}\\ \Gamma_-(c) &= \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [m(\mathrm{e}\,c^2), M(\mathrm{e}\,c^2)], y = y_-(x,c)\bigr\} \;.\end{aligned}$$
   Γ_+ et Γ_- sont deux courbes non fermées, se rencontrant aux points $(m(\mathrm{e}\,c^2), 1)$ et $(M(\mathrm{e}\,c^2), 1)$. Leur réunion est donc une courbe fermée, située dans le premier quadrant.
6. Nous avons vu au point 4. que $V(x(t), y(t))$ est constant sur les orbites. Au point 5., nous avons montré que pour $0 < c < \mathrm{e}^{-1}$, la courbe de niveau $\Gamma(c) = \{(x,y) \colon V(x,y) = c^2\}$ est une courbe fermée. Comme $\Gamma(c)$ ne contient pas de point singulier, c'est nécessairement une orbite périodique.



Exercice 3 (5 points)**.**

1. On calcule la divergence de f :

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(3y-3x) + \frac{\partial}{\partial y}(rx-y-xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy-z) = -3-1-1 = -5 \; .$$

   Comme cette quantité est strictement négative pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, le flot est dissipatif.

2. Les points singuliers sont solutions du système

$$\begin{cases} 3y-3x = 0 \\ rx-y-xz = 0 \\ xy-z = 0 \; . \end{cases}$$

   Le point $(0,0,0)$ est bien une solution particulière de ce système. Par ailleurs, comme toute solution doit satisfaire $x=y$ et $z=xy$, le système se réduit à

$$x(r-1-x^2) = 0 \; .$$

   La solution $x=0$ donne le point singulier $(0,0,0)$ déjà obtenu. Si $r>1$, il y a deux autres solutions $x = \pm\sqrt{r-1}$. Il existe alors deux autres points singuliers

$$(\sqrt{r-1}, \sqrt{r-1}, r-1) \qquad \text{et} \qquad (-\sqrt{r-1}, -\sqrt{r-1}, r-1) \; .$$

3. On a
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$
Les valeurs propres de A sont -1 et les valeurs propres de $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 \\ r & -1 \end{smallmatrix}\right)$, à savoir $-2 \pm \sqrt{1+3r}$. Si $0 \leqslant r < 1$, toutes les valeurs propres sont réelles négatives, donc $(0,0,0)$ est asymptotiquement stable. Si $r > 1$, il y a deux valeurs propres réelles négatives, et une valeur propre réelle positive. Le point $(0,0,0)$ est alors instable.
4. On obtient
$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x,y,z), f(x,y,z) \rangle &= x(3y-3x) + 3y(rx - y - xz) + 3z(xy - z) \\ &= -3x^2 + 3(1+r)xy - 3y^2 - 3z^2 , \end{aligned}$$
qui est une forme quadratique, de matrice
$$M = \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2}(1+r) & 0 \\ \frac{3}{2}(1+r) & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$
5. Les valeurs propres de M sont -3 et $-3 \pm \frac{3}{2}(1+r)$. Ces valeurs propres sont toutes négatives pour $0 \leqslant r < 1$. Pour $r = 1$, deux valeurs propres sont négatives et la troisième est nulle. Pour $r > 1$, deux valeurs propres sont négatives et la troisième est positive.
La fonction V admet un minimum global strict en $(0,0,0)$. La dérivée de V le long des orbites différentes de $\{(0,0,0)\}$ est strictement négative si et seulement si $0 \leqslant r < 1$. Dans ce cas, V est une fonction de Lyapunov stricte dans tout $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Par conséquent, toute orbite du système converge vers $(0,0,0)$ dans le futur si $0 \leqslant r < 1$.