

Mathématiques financières

Examen du 16 décembre 2008

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

Questions de cours [4 points]

1. Un marché financier comportant une opportunité d'arbitrage est-il viable? Expliquer pourquoi.
2. Expliquer en quelques mots l'utilité de la mesure de risque neutre dans le modèle binomial.
3. Quelle est la signification du terme “vendre à découvert des titres risqués”?
4. Expliquer la différence entre le modèle binomial et le modèle de Cox–Ross–Rubinstein.

Problème 1 [8 points]

Une urne contient initialement 1 boule rouge et 1 boule noire. Un jeu consiste à tirer une boule de l'urne.

- Si la boule est rouge, on gagne g euros. On replace alors la boule dans l'urne, ainsi qu'une seconde boule rouge.
- Si la boule est noire, on perd 1 euro. On replace alors la boule dans l'urne, ainsi qu'une seconde boule noire.

On tire alors à nouveau une boule de l'urne, et on suit les mêmes règles que ci-dessus. On considère les variables aléatoires

- X_k égale à la proportion de boules rouges dans l'urne (le nombre de boules rouges divisé par le nombre total de boules) après k tirage.
 - Y_k égale à la somme totale gagnée après k tirages.
1. Quelle est la filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ définie par les deux premiers tirages?
 2. Calculer $\mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0)$ et $\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{F}_0)$.
 3. Calculer $\mathbb{E}(X_2|\mathcal{F}_1)$ et $\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{F}_1)$.
 4. Pour quelles valeurs de g processus (Y_0, Y_1, Y_2) est-il une sous-martingale? Une sur-martingale? Une martingale?
 5. Soit r_k le nombre de boules rouges se trouvant dans l'urne après k tirages. Quelles sont les valeurs possibles de r_k et de X_k ?
 6. Calculer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k|\mathcal{F}_k)$ et $\mathbb{E}(Y_{k+1} - Y_k|\mathcal{F}_k)$ en fonction de r_k . Que peut-on en conclure sur les suites X_k et Y_k ?

Problème 2 [8 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 3)	(1, 2)	(1, 1)
ω^2	(1, 3)	(1, 2)	(1, 6)
ω^3	(1, 3)	(1, 5)	(1, 4)
ω^4	(1, 3)	(1, 5)	(1, 10)

Marché 2:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2)
ω^2	(1, 4)	(1, 3)	(1, 6)
ω^3	(1, 4)	(1, 6)	(1, 7)
ω^4	(1, 4)	(1, 6)	(1, 10)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?

Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.

2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre \mathbb{P}^* .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 3$. Sa fonction de paiement est donc $g(\bar{S}_2^2) = (3 - \bar{S}_2^2)_+$. Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas ω^1 .