

Mathématiques financières

Examen du 16 décembre 2009

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

Questions de cours [4 points]

1. Qu'est-ce qu'une opportunité d'arbitrage?
2. Qu'est-ce qu'une filtration d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$?
3. Expliquer en quelques mots l'utilité de la mesure de risque neutre dans le modèle binomial.
4. Expliquer la différence entre une option de vente et une option d'achat (européenne).

Problème 1 [8 points]

On se donne deux nombres réels positifs p, q tels que $p + q < 1$. On suppose que dans une population, chaque individu a

- aucun enfant avec probabilité $1 - p - q$,
- un enfant avec probabilité p ,
- deux enfants avec probabilité q .

On admet que la génération 0 comprend $X_0 = 1$ individu. Soit X_n le nombre d'individus de la génération n (X_1 est le nombre d'enfants du premier individu, X_2 le nombre de ses petits-enfants, etc).

1. Quelle est la filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ définie par les générations 0, 1 et 2?
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{F}_0)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1)$.
4. Pour quelles valeurs de p, q le processus (X_0, X_1, X_2) est-il une sous-martingale? Une surmartingale? Une martingale?
5. Peut-on généraliser à la génération n ?

Problème 2 [8 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 10)	(1, 6)	(1, 5)
ω^2	(1, 10)	(1, 6)	(1, 10)
ω^3	(1, 10)	(1, 12)	(1, 10)
ω^4	(1, 10)	(1, 12)	(1, 15)

Marché 2:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 8)	(1, 6)	(1, 5)
ω^2	(1, 8)	(1, 6)	(1, 6)
ω^3	(1, 8)	(1, 12)	(1, 10)
ω^4	(1, 8)	(1, 12)	(1, 15)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?
Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.
2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre \mathbb{P}^* .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 11$. Sa fonction de paiement est donc $g(\bar{S}_2) = (11 - \bar{S}_2)_+$. Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas ω^1 .