

Mathématiques financières

Examen du 21 décembre 2011

Durée: 2 heures

Documents non autorisés

Les points sont donnés à titre indicatif

Questions de cours [4 points]

1. Qu'est-ce qu'une opportunité d'arbitrage?
2. Un marché financier comportant une opportunité d'arbitrage est-il viable? Expliquer pourquoi.
3. Expliquer pourquoi un modèle binomial dans lequel $s_0(1+r) \leq s_{1,1} < s_{1,2}$ n'est pas viable.
4. Quelle est la principale limitation de la formule de Black–Scholes?

Problème 1 [8 points]

Le loir du Loiret (*Marmota orleanensis*) se reproduit selon les règles suivantes: un couple reste sans descendants avec probabilité p , où $0 < p < 1/2$. Avec probabilité $1/2$, il a exactement un couple de descendants (toujours un mâle et une femelle), et avec probabilité $q = 1/2 - p$, il a deux couples de descendants. On note X_n le nombre de couples de la génération n , et on suppose que $X_0 = 1$.

1. Spécifier une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de décrire les trois premières générations, et expliciter la filtration canonique $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.
2. Donner les lois de X_0 , X_1 et X_2 .
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1|X_0)$ et $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.
4. Pour quelles valeurs de p la suite (X_0, X_1, X_2) est-elle une martingale? Une surmartingale? Une sous-martingale?
5. Généraliser au cas d'un nombre quelconque de générations.

Problème 2 [8 points]

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 8)	(1, 6)	(1, 5)
ω^2	(1, 8)	(1, 6)	(1, 6)
ω^3	(1, 8)	(1, 12)	(1, 10)
ω^4	(1, 8)	(1, 12)	(1, 15)

Marché 2:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 10)	(1, 6)	(1, 5)
ω^2	(1, 10)	(1, 6)	(1, 10)
ω^3	(1, 10)	(1, 12)	(1, 10)
ω^4	(1, 10)	(1, 12)	(1, 15)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?

Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.

2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre \mathbb{P}^* .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 9$. Sa fonction de paiement est donc $g(\bar{S}_2^2) = (9 - \bar{S}_2^2)_+$. Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas ω^1 .