Mathématiques du Quotidien

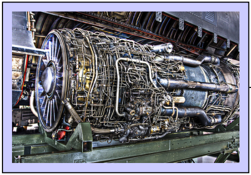
et Quotidien des Mathématicien-ne-s

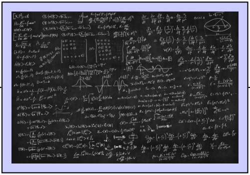
Nils Berglund

MAPMO, Université d'Orléans
CNRS, UMR 7349 et Fédération Denis Poisson
www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund

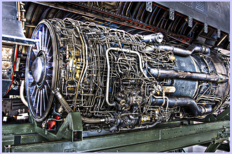
Orléans, Octobre 2014

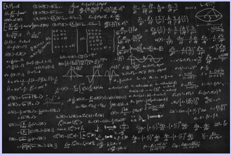
Modélisation mathématique



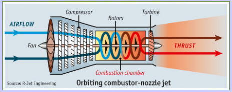


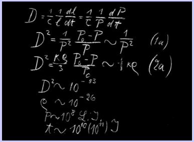
Modélisation mathématique



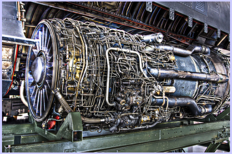


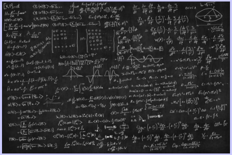
Simplification





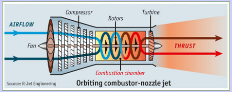
Modélisation mathématique

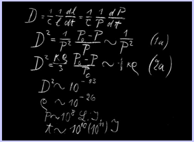




Simplification

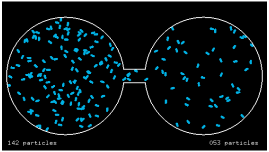
Validation
Stabilité

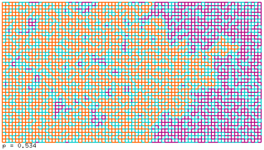


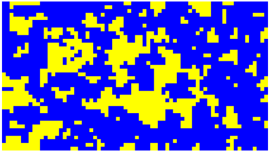


Un choix d'exemples

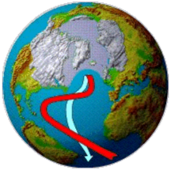
- Physique



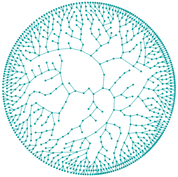




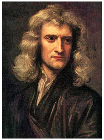
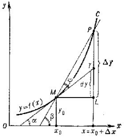
- Climatologie



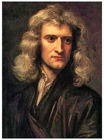
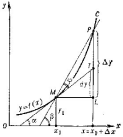
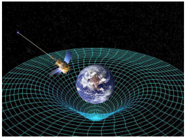
- Biologie



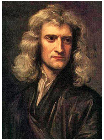
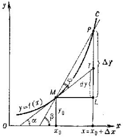
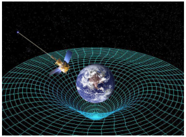
Physique et mathématique

Physique	Mathématique
Gravitation et dynamique  Newton 1687	Calcul différentiel Newton, Leibniz 

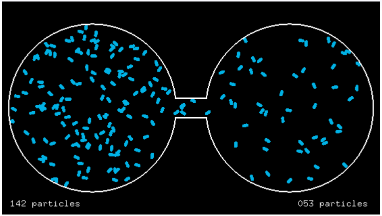
Physique et mathématique

Physique	Mathématique
Gravitation et dynamique  Newton 1687	Calcul différentiel Newton, Leibniz 
Relativité  Einstein 1905, 1916	Géométrie différentielle Riemann 1854 

Physique et mathématique

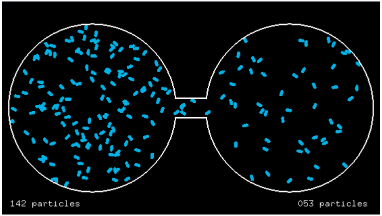
Physique	Mathématique
Gravitation et dynamique  Newton 1687	Calcul différentiel Newton, Leibniz 
Relativité  Einstein 1905, 1916	Géométrie différentielle Riemann 1854 
Mécanique quantique  Heisenberg 1925,...	Calcul matriciel $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Un gaz dans un récipient



- Description microscopique: positions et vitesses des $\sim 10^{23}$ molécules
- Description macroscopique: pression, volume, température

Un gaz dans un récipient



- Description microscopique: positions et vitesses des $\sim 10^{23}$ molécules
- Description macroscopique: pression, volume, température

Questions:

- Peut-on déduire le macroscopique du microscopique ?
- D'où vient l'irréversibilité du système macroscopique ?

Comportement irréversible

L'effet de la forme du bord

L'effet de la forme du bord

Hypothèse ergodique (Boltzmann):

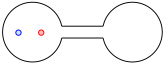
Un système "typique" va occuper tous les états possibles

Artur Avila et Giovanni Forni (2007) : c'est vrai pour presque tout polygone

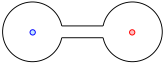
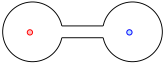
Conséquence de l'hypothèse ergodique

Si on répartit 2 molécules au hasard:

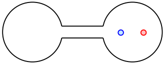
$2^2 = 4$ configurations microscopiques
$2 + 1 = 3$ configurations macroscopiques
$X \in \{0, 1, 2\}$: nombre de molécules dans la moitié de droite



$X = 0 \qquad \mathbb{P}\{X = 0\} = 1/4$

$X = 1 \qquad \mathbb{P}\{X = 1\} = 2/4$

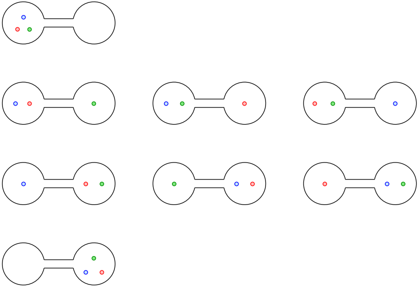


$X = 2 \qquad \mathbb{P}\{X = 2\} = 1/4$

Conséquence de l'hypothèse ergodique

Si on répartit 3 molécules au hasard:

$2^3 = 8$ configurations microscopiques
$3 + 1 = 4$ configurations macroscopiques



$\mathbb{P}\{X = 0\} = 1/8$

$\mathbb{P}\{X = 1\} = 3/8$

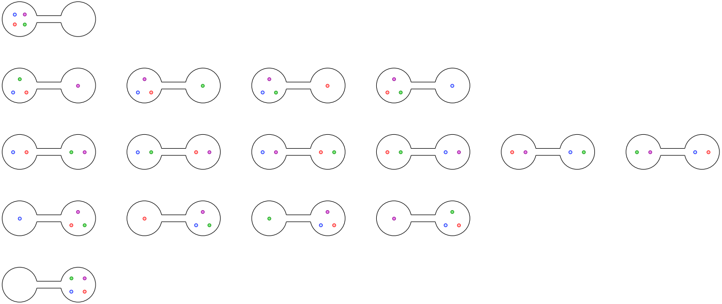
$\mathbb{P}\{X = 2\} = 3/8$

$\mathbb{P}\{X = 3\} = 1/8$

Conséquence de l'hypothèse ergodique

Si on répartit 4 molécules au hasard:

$2^4 = 16$ configurations microscopiques
$4 + 1 = 5$ configurations macroscopiques



$\mathbb{P}\{X = 0\} = \frac{1}{16}$

$\mathbb{P}\{X = 1\} = \frac{4}{16}$

$\mathbb{P}\{X = 2\} = \frac{6}{16}$

$\mathbb{P}\{X = 3\} = \frac{4}{16}$

$\mathbb{P}\{X = 4\} = \frac{1}{16}$

Le modèle d'Ehrenfest

Loi des grands nombres:

Plus le nombre de molécules est grand, plus il y a de chances d'en voir environ autant de chaque côté

Le modèle d'Ehrenfest

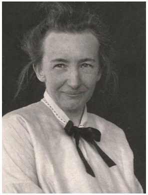
Loi des grands nombres:

Plus le nombre de molécules est grand, plus il y a de chances d'en voir environ autant de chaque côté

Modèle d'Ehrenfest :

Tatiana Ehrenfest-Afanaseva (1876 – 1964)
Paul Ehrenfest (1880 – 1933)

On choisit une molécule au hasard et on la change de côté, puis on recommence



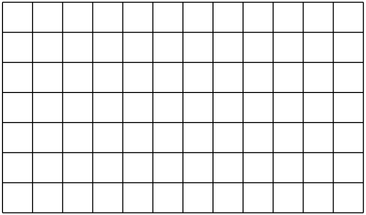
Marc Kac (1914 – 1984)

Si toutes les N molécules partent du côté gauche, elles reviendront toutes à gauche, mais après un temps d'ordre 2^N

La percolation

Question : Est-ce que l'eau passe à travers un matériau poreux?

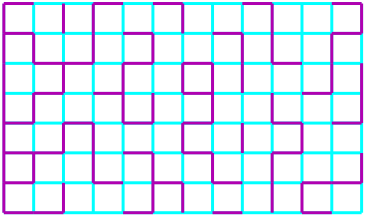
Modèle : Réseau carré



La percolation

Question : Est-ce que l'eau passe à travers un matériau poreux?

Modèle : Réseau carré
Liens ouverts avec proba p
et fermés avec proba $1 - p$



La percolation

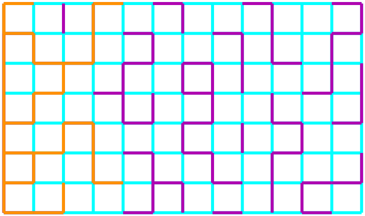
Question : Est-ce que l'eau passe à travers un matériau poreux?

Modèle : Réseau carré

Liens ouverts avec proba p

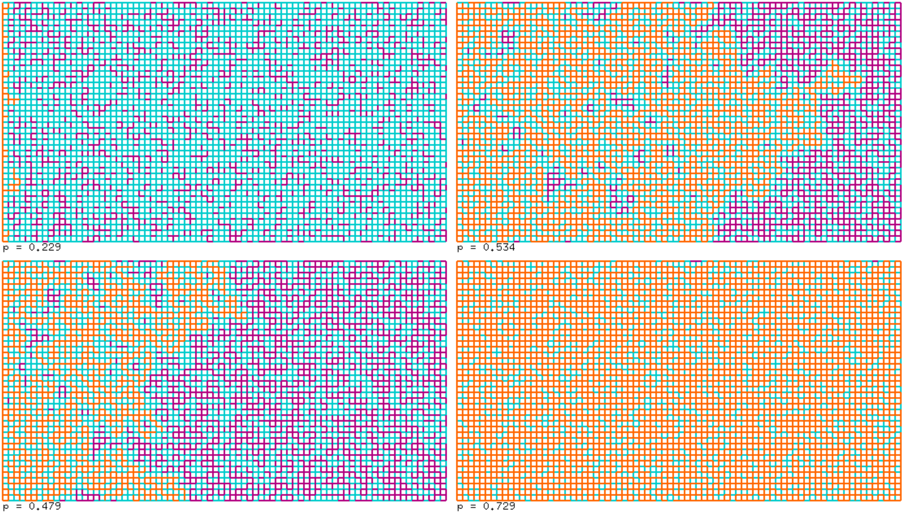
et fermés avec proba $1 - p$

Quelle est la probabilité que la composante connexe ouverte issue du bord gauche aille jusqu'au bord droit?



La percolation

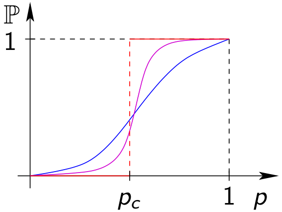
La percolation



Analyse mathématique

$\mathbb{P}(p) =$ proba qu'une composante ouverte aille de gauche à droite
si la proba qu'un lien soit ouvert vaut p

$p = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(0) = 0$
$p = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(1) = 1$
$p_2 > p_1 \Rightarrow \mathbb{P}(p_2) > \mathbb{P}(p_1)$



Loi 0-1

Lorsque la taille du réseau tend vers l'infini, $\mathbb{P}(p)$ tend vers 0 ou 1

Conséquence: dans la limite d'un système infini, il existe un p_c tel que

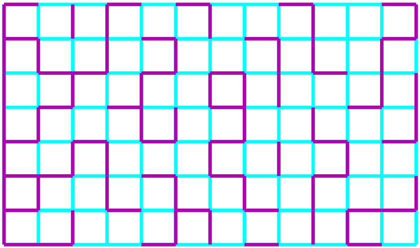
$$\mathbb{P}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p > p_c \end{cases}$$

Analyse mathématique

Théorème (Harris 1960, Kesten 1980)

Pour un réseau carré en dimension 2, on a $p_c = 1/2$

Idée intuitive : argument de symétrie

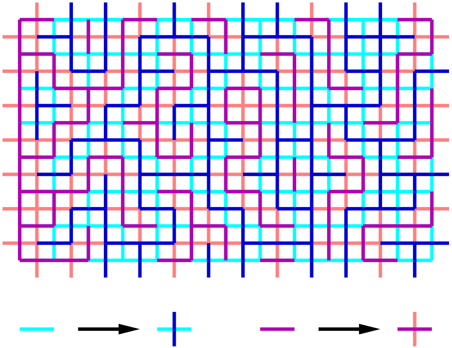


Analyse mathématique

Théorème (Harris 1960, Kesten 1980)

Pour un réseau carré en dimension 2, on a $p_c = 1/2$

Idée intuitive : argument de symétrie

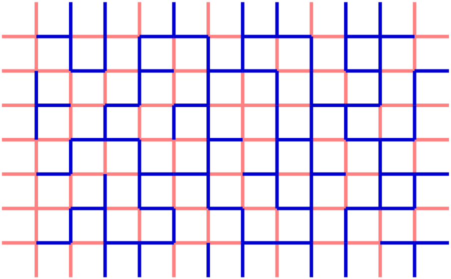


Analyse mathématique

Théorème (Harris 1960, Kesten 1980)

Pour un réseau carré en dimension 2, on a $p_c = 1/2$

Idée intuitive : argument de symétrie



$$1 - \mathbb{P}(p) = \mathbb{P}(1-p) \qquad \Rightarrow \qquad p_c = 1 - p_c \qquad \Rightarrow \qquad p_c = 1/2$$

Wendelin Werner

Stanislas Smirnov

Qu'est-ce que la température ?

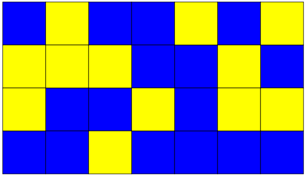
- Que se passe-t-il lorsqu'un glaçon fond ?
- Pourquoi les aimants se démagnétisent-ils à haute température ?

Qu'est-ce que la température ?

Un aimant est constitué d'un grand nombre de spins

Dans le modèle d'Ising, ces spins ne prennent que deux valeurs:
"up" (vers le haut) et "down" (vers le bas)

Une configuration est définie par la valeur du spin en chaque point du réseau



Règles de base :

- chaque spin a envie d'imiter ses voisins
- chaque spin a envie de s'aligner sur le champ magnétique h

Qu'est-ce que la température ?

L'énergie d'une configuration mesure son degré d'insatisfaction:

$$\begin{aligned} E = &\text{ nombre de voisins de couleur différente} \\ &- h \cdot (\text{nombre de spins up} - \text{nombre de spins down}) \end{aligned}$$

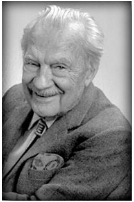
- Si $h > 0$, l'énergie est minimale si tous les spins sont up
- Si $h < 0$, l'énergie est minimale si tous les spins sont down

Rôle de la température T :

- Si $T = 0$ l'aimant est dans une configuration d'énergie minimale
- Si $T = \infty$ toutes les configurations ont même probabilité
- Si $0 < T < \infty$, la proba d'une configuration est proportionnelle à

$$\mathrm{e}^{-E/T}$$

L'algorithme de Metropolis –Rosenbluth–Rosenbluth–Teller–Teller



?

Nicholas Metropolis, Arianna Rosenbluth, Marshall Rosenbluth, Augusta Teller et Edward Teller

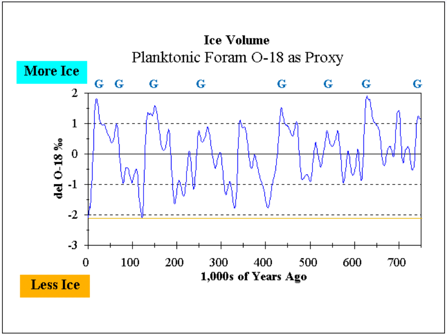
- Choisir in spin au hasard
- Calculer le changement d'énergie si on retourne ce spin
- Si l'énergie diminue, retourner le spin
- Si l'énergie augmente de ΔE, retourner le spin avec proba $e^{-\Delta E/T}$
- Recommencer

L'effet de la température

$T = 10$

$T = 1$

Les glaciations durant les derniers $750'000$ ans

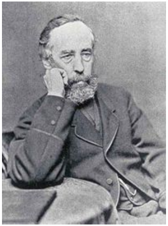


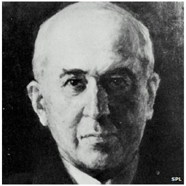
Explication astronomique :

James Croll (1821 – 1890)

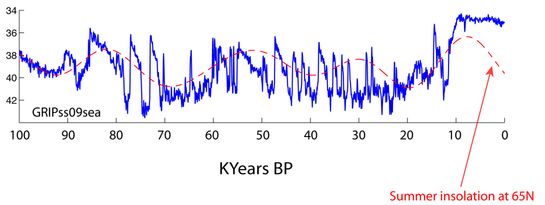
Milutin Milankovich (1879 – 1958)

L'orbite terrestre est soumise à des variations causées par les autres planètes



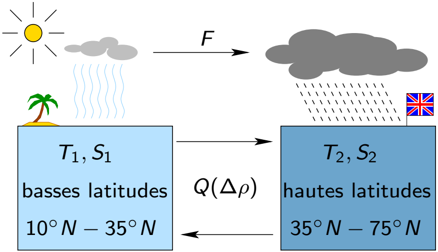


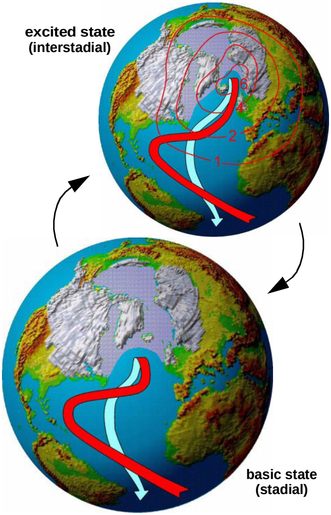
Le climat durant les derniers $100'000$ ans



Evénements de Dansgaard–Oeschger

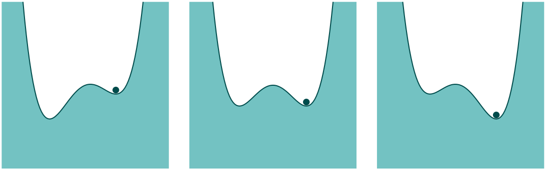
Modèle à deux boîtes de Stommel





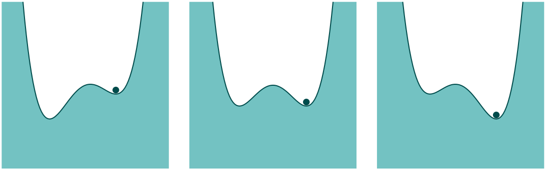
La résonance stochastique

Les variations périodiques de l'orbite terrestre ne suffisent pas à expliquer les transitions



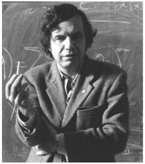
La résonance stochastique

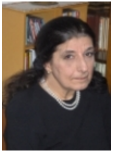
Les variations périodiques de l'orbite terrestre ne suffisent pas à expliquer les transitions



Nouvelle idée (1981) : Ajouter un terme de hasard

Roberto Benzi
Alfonso Sutera
Angelo Vulpiani
Giorgio Parisi
Catherine Nicolis
Grégoire Nicolis

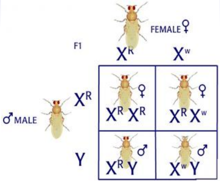




La résonance stochastique

Exemples d'applications des maths en biologie

Génétique

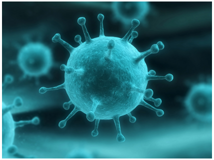


Séquençage ADN

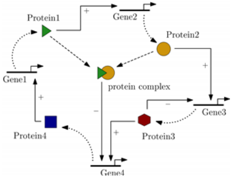
Morphogénèse

Phyllotaxie

Epidémiologie



Réseaux de régulation géniques



Dynamique des populations

Comment évolue une population (bactéries, gibier, humains, ...)?

1. Prolifération de bactéries ou d'une espèce introduite
2. Extinction d'une espèce menacée
3. Combien peut-on pêcher sans que les poissons disparaissent?

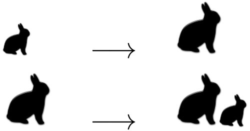
Dynamique des populations

Comment évolue une population (bactéries, gibier, humains, ...)?

1. Prolifération de bactéries ou d'une espèce introduite
2. Extinction d'une espèce menacée
3. Combien peut-on pêcher sans que les poissons disparaissent?

Léonard de Pise – Leonardo Fibonacci
(1175 – $\sim$ 1250)

Evolution d'une population de lapins:



La suite de Fibonacci

An		Population
1		1
2		1
3		2
4		3
5		5
6		8
7		13
...	...	...

Autres modèles de population

Thomas Robert Malthus (1766 – 1834)

P_n population de l'année n
p taux de natalité
q taux de mortalité

$P_{n+1} = P_n + pP_n - qP_n$

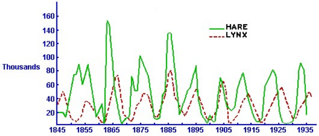
Pierre François Verhulst (1804 – 1849)

Limitation des ressources: $p - q$ dépend de P_n

$p - q = a - bP_n$

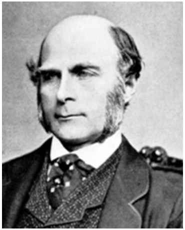
$P_{n+1} = (1 + a - bP_n)P_n = \underbrace{(1+a)}_{r} P_n - bP_n^2$

Alfred James Lotka (1880 – 1949)
Vito Volterra (1860 – 1940)



Le modèle de Bienaymé–Galton–Watson

Irénée–Jules Bienaymé (1796 – 1878)

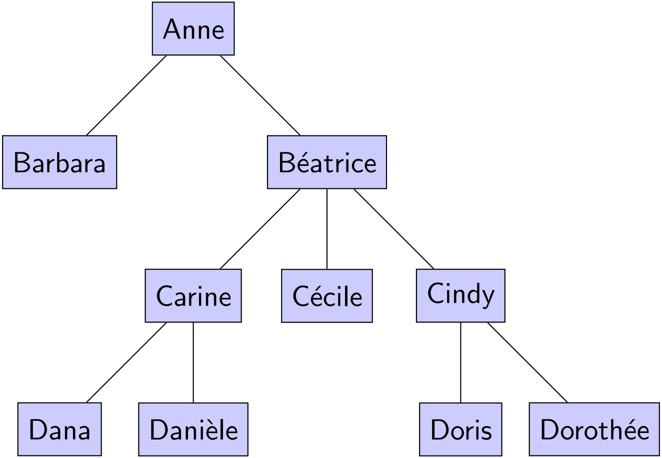


Sir Francis Galton (1822 – 1911)

Rev. Henry William Watson (1827 – 1903)

- Extinction des noms de famille
- Extinction d'une espèce

Arbres généalogiques



Modèle probabiliste

Chaque individu a

- aucun enfant avec probabilité $1/8$
- 1 enfant avec probabilité $3/8$
- 2 enfants avec probabilité $3/8$
- 3 enfants avec probabilité $1/8$

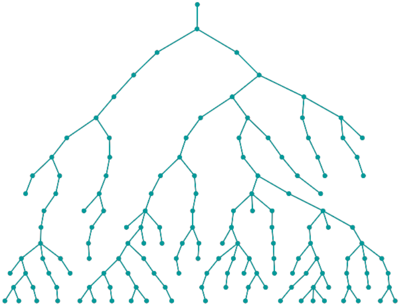
Les nombres d'enfants d'individus différents sont indépendants.

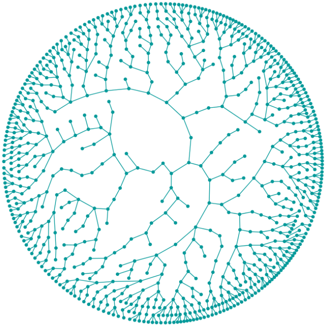
Modèle probabiliste

Chaque individu a

- aucun enfant avec probabilité $1/8$
- 1 enfant avec probabilité $3/8$
- 2 enfants avec probabilité $3/8$
- 3 enfants avec probabilité $1/8$

Les nombres d'enfants d'individus différents sont indépendants.





Modèle probabiliste

Distribution d'enfants générale

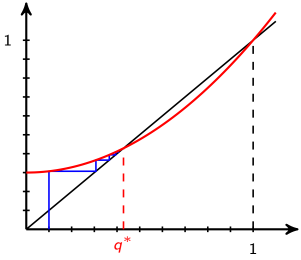
p_0 = proba d'avoir 0 enfant, ..., p_k = proba d'avoir k enfants
q_n = proba qu'il n'y ait pas de décendants à la génération n
$q_1 = p_0$ et $q_{n+1} = f(q_n)$ avec

$$f(q) = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + \cdots + p_k q^k$$

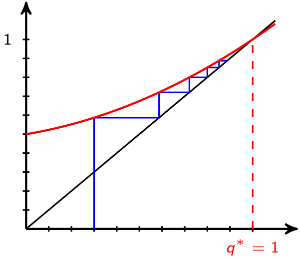
Distribution d'enfants générale

p_0 = proba d'avoir 0 enfant, ..., p_k = proba d'avoir k enfants
q_n = proba qu'il n'y ait pas de décendants à la génération n
$q_1 = p_0$ et $q_{n+1} = f(q_n)$ avec

$$f(q) = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + \cdots + p_k q^k$$



Pente en $q = 1 \ > \ 1$
Proba d'extinction $q^* < 1$



Pente en $q = 1 \ \leqslant \ 1$
Proba d'extinction $q^* = 1$

Distribution d'enfants générale

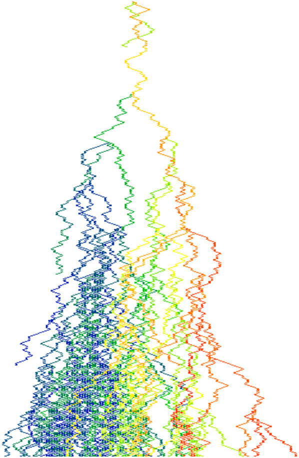
p_0 = proba d'avoir 0 enfant, ..., p_k = proba d'avoir k enfants
q_n = proba qu'il n'y ait pas de décendants à la génération n
$q_1 = p_0$ et $q_{n+1} = f(q_n)$ avec

$$f(q) = p_0 + p_1 q + p_2 q^2 + \cdots + p_k q^k$$

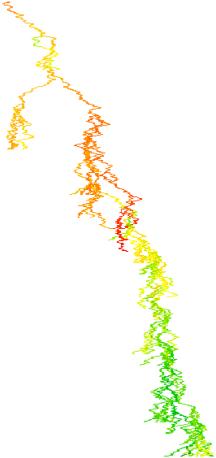
Théorème

- *Si le nombre moyen d'enfants est* > 1, *la population s'éteint avec proba* $q^* < 1$, *où* q^* *est une solution de* $f(q^*) = q^*$
- *Si le nombre moyen d'enfants est* $\leqslant 1$, *la population s'éteint avec proba* 1

Recherche actuelle : processus de branchement



Marche aléatoire branchante



Marche aléatoire branchante
avec sélection

Pour en savoir plus

- Articles dans Images des mathématiques :
  http://images.math.cnrs.fr/_Berglund-Nils-1343_.html
- Simulations en JavaScript :
  http://experiences.math.cnrs.fr/
- Sur YouTube :
  http://www.youtube.com/channel/UCqO9j1kihaQzlTpxJriVWMQ/videos
- Laboratoire de maths d'Orléans :
  http://www.univ-orleans.fr/MAPMO/
- Cette présentation :
  http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/fetescience14.pdf