Probabilités et Physique Statistique

Nils Berglund
MAPMO, Université d'Orléans
CNRS, UMR 6628 et Fédération Denis Poisson
www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund

Centre Galois, 22 juin 2011

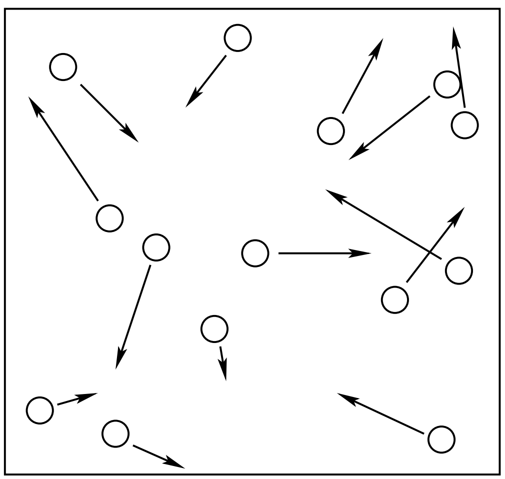
La physique statistique

Etude de matière composée d'un grand nombre d'unités (atomes, molécules) identiques

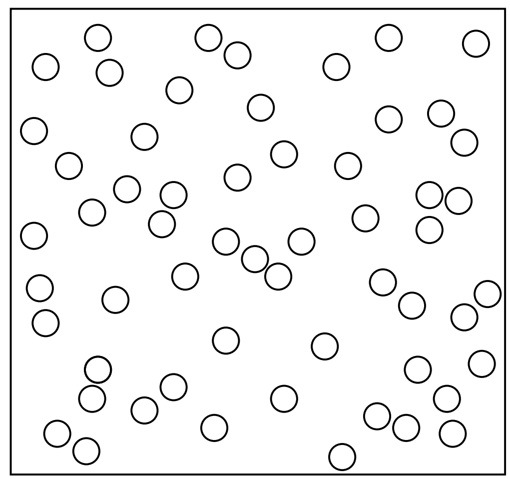
La physique statistique

Etude de matière composée d'un grand nombre d'unités (atomes, molécules) identiques

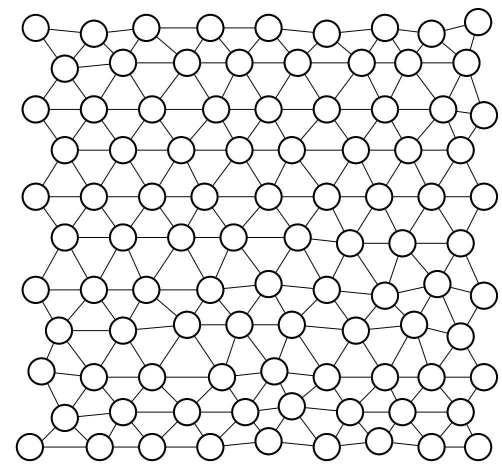
Principaux états de la matière :



Gaz



Liquide



Solide

Combien d’atomes?

1 mole :
échantillon contenant autant d’atomes que 12g de carbone 12
(les noyaux de carbone 12 contiennent 12 nucléons : 6 protons et 6 neutrons)

Combien d'atomes?

1 mole :
échantillon contenant autant d'atomes que 12g de carbone 12 (les noyaux de carbone 12 contiennent 12 nucléons : 6 protons et 6 neutrons)

1 mole d'hydrogène H_2 pèse environ 2g
1 mole d'uranium 238 pèse environ 238g, etc...

Combien d'atomes?

1 mole :
échantillon contenant autant d'atomes que 12g de carbone 12
(les noyaux de carbone 12 contiennent 12 nucléons : 6 protons et 6 neutrons)

1 mole d'hydrogène H_2 pèse environ 2g
1 mole d'uranium 238 pèse environ 238g, etc...

Ce nombre est le *nombre d'Avogadro*
$N_{\mathsf{A}} = 6.022 \cdot 10^{23}$

Combien d'atomes?

1 mole :
échantillon contenant autant d'atomes que 12g de carbone 12 (les noyaux de carbone 12 contiennent 12 nucléons : 6 protons et 6 neutrons)

1 mole d'hydrogène H_2 pèse environ 2g
1 mole d'uranium 238 pèse environ 238g, etc...

Ce nombre est le *nombre d'Avogadro*
$N_{\mathsf{A}} = 6.022 \cdot 10^{23}$

Avec N_{A} cubes de 1cm de côté on peut...
...fabriquer un cube de 800km de côté
...ou recouvrir la terre sur une hauteur de 1000m
...ou faire une chaîne longue de 600 000 années-lumière (2 fois la circonférence de la voie lactée)

Deux descriptions d'un gaz

1. Description microscopique
   Loi de Newton $F = ma$ pour chacun des $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes
   $\Rightarrow$ système de N equations couplées
   Pas de solution connue pour $N > 2$ (comportement chaotique)

Deux descriptions d'un gaz

1. Description microscopique

   Loi de Newton $F = ma$ pour chacun des $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes

   $\Rightarrow$ système de N equations couplées

   Pas de solution connue pour $N > 2$ (comportement chaotique)

2. Description macroscopique

   Loi des gaz parfaits : $pV = Nk_{\mathrm{B}}T$

   - p : pression
   - V : volume
   - T : température
   - N : nombre d'atomes ou molécules
   - k_{B} : constante de Boltzmann

Deux descriptions d'un gaz

1. Description microscopique

   Loi de Newton $F = ma$ pour chacun des $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes

   $\Rightarrow$ système de N equations couplées

   Pas de solution connue pour $N > 2$ (comportement chaotique)

2. Description macroscopique

   Loi des gaz parfaits : $pV = Nk_{\mathrm{B}}T$

   - p : pression – effet des collisions des atomes
   - V : volume
   - T : température – mesure de l'agitation des atomes
   - N : nombre d'atomes ou molécules
   - k_{B} : constante de Boltzmann $k_{\mathrm{B}} = 1.380 \cdot 10^{23}$ J/K

Deux descriptions d'un gaz

1. Description microscopique

   Loi de Newton $F = ma$ pour chacun des $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes

   $\Rightarrow$ système de N equations couplées

   Pas de solution connue pour $N > 2$ (comportement chaotique)

2. Description macroscopique

   Loi des gaz parfaits : $pV = N k_\mathrm{B} T$

   - p : pression – effet des collisions des atomes
   - V : volume
   - T : température – mesure de l'agitation des atomes
   - N : nombre d'atomes ou molécules
   - k_B : constante de Boltzmann $k_\mathrm{B} = 1.380 \cdot 10^{23}$ J/K

La physique statistique a pour but de dériver
les équations macroscopiques des équations microscopiques.

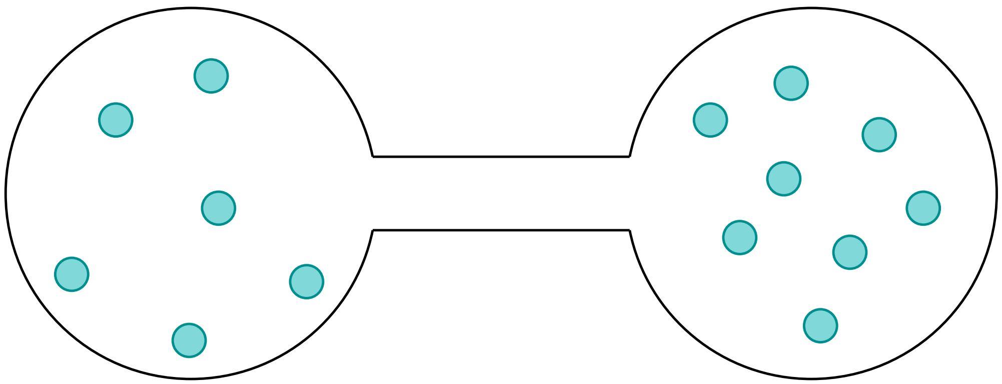
Deux questions

1. Les equations microscopiques sont compliquées à étudier.
   Pourquoi les lois macroscopiques sont-elles si simples?
2. Les equations microscopiques sont réversibles.
   D'où vient l'irréversibilité du monde macroscopique?

La théorie des probabilités apporte des éléments de réponse à ces questions.

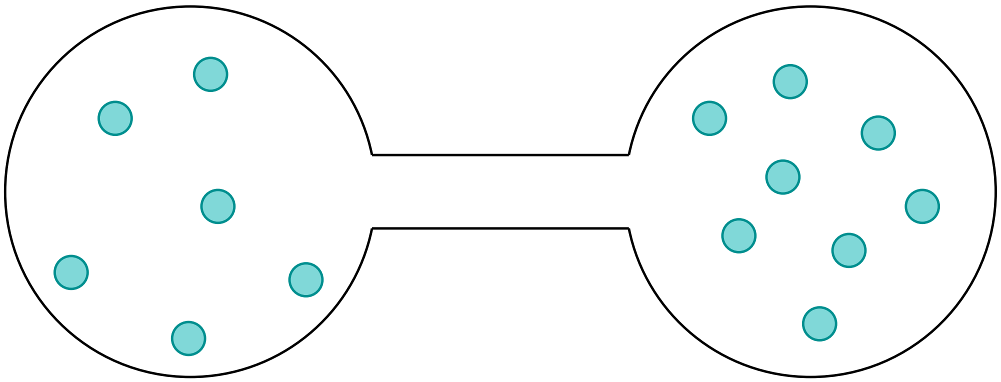
Modèle simplifié

Nous considérons la situation idéalisée suivante :
N atomes sont répartis entre deux parties d'un récipient.



Modèle simplifié

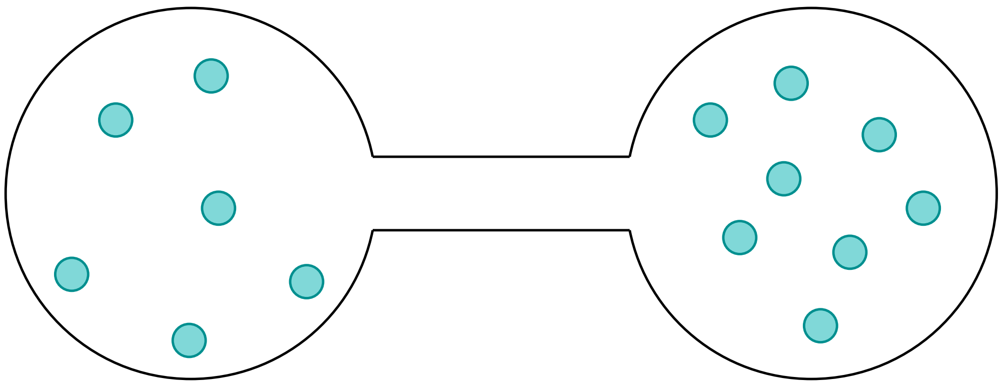
Nous considérons la situation idéalisée suivante :
N atomes sont répartis entre deux parties d'un récipient.



- Description microscopique : pour chaque atome, on dit dans quelle partie il se trouve.
- Description macroscopique : on spécifie combien d'atomes se trouvent dans chaque partie.

Modèle simplifié

Nous considérons la situation idéalisée suivante :
N atomes sont répartis entre deux parties d'un récipient.



- Description microscopique : pour chaque atome, on dit dans quelle partie il se trouve. Il y a 2^N configurations possibles
- Description macroscopique : on spécifie combien d'atomes se trouvent dans chaque partie. Il y a $N + 1$ config. possibles

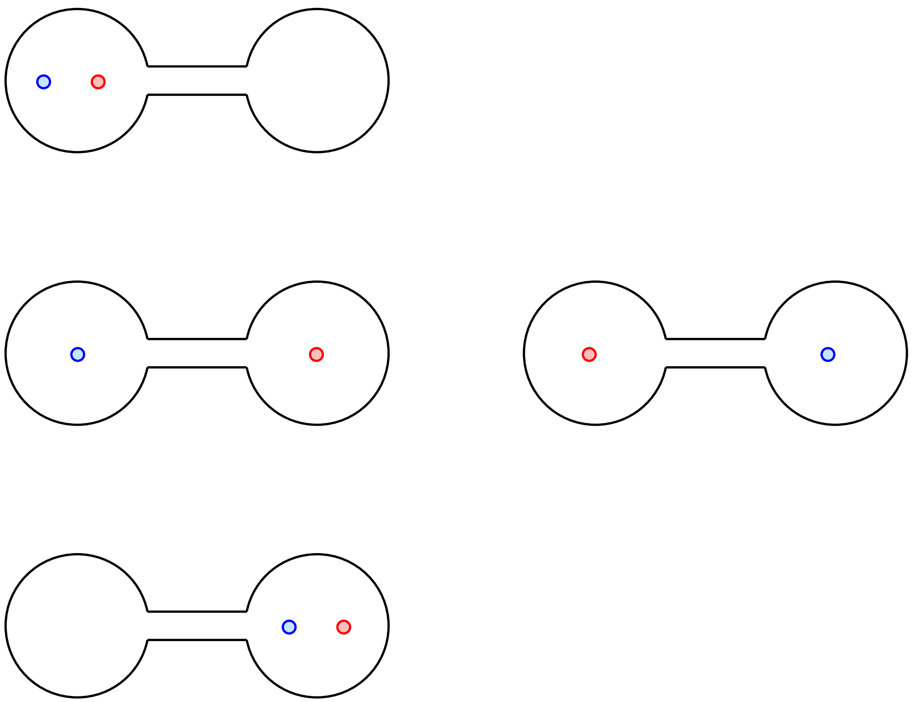
Modèle probabiliste : les 2^N configurations microscopiques ont chacune la probabilité $1/2^N$

Modèle simplifié : cas $N = 2$

$2^2 = 4$ configurations microscopiques

$2 + 1 = 3$ configurations macroscopiques

$X \in \{0, 1, 2\}$: nombre d'atomes dans la moitié de droite

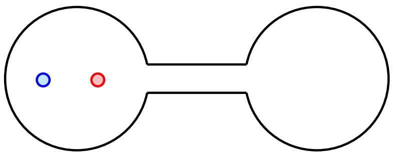


Modèle simplifié : cas $N = 2$

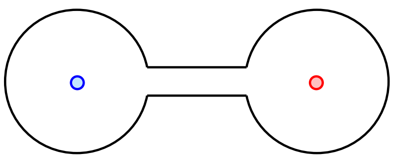
$2^2 = 4$ configurations microscopiques

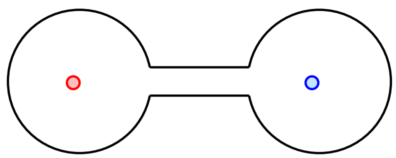
$2 + 1 = 3$ configurations macroscopiques

$X \in \{0, 1, 2\}$: nombre d'atomes dans la moitié de droite

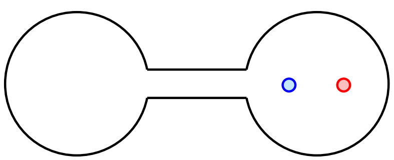


$X = 0$ $\qquad \mathbb{P}\{X = 0\} = 1/4$





$X = 1$ $\qquad \mathbb{P}\{X = 1\} = 2/4$

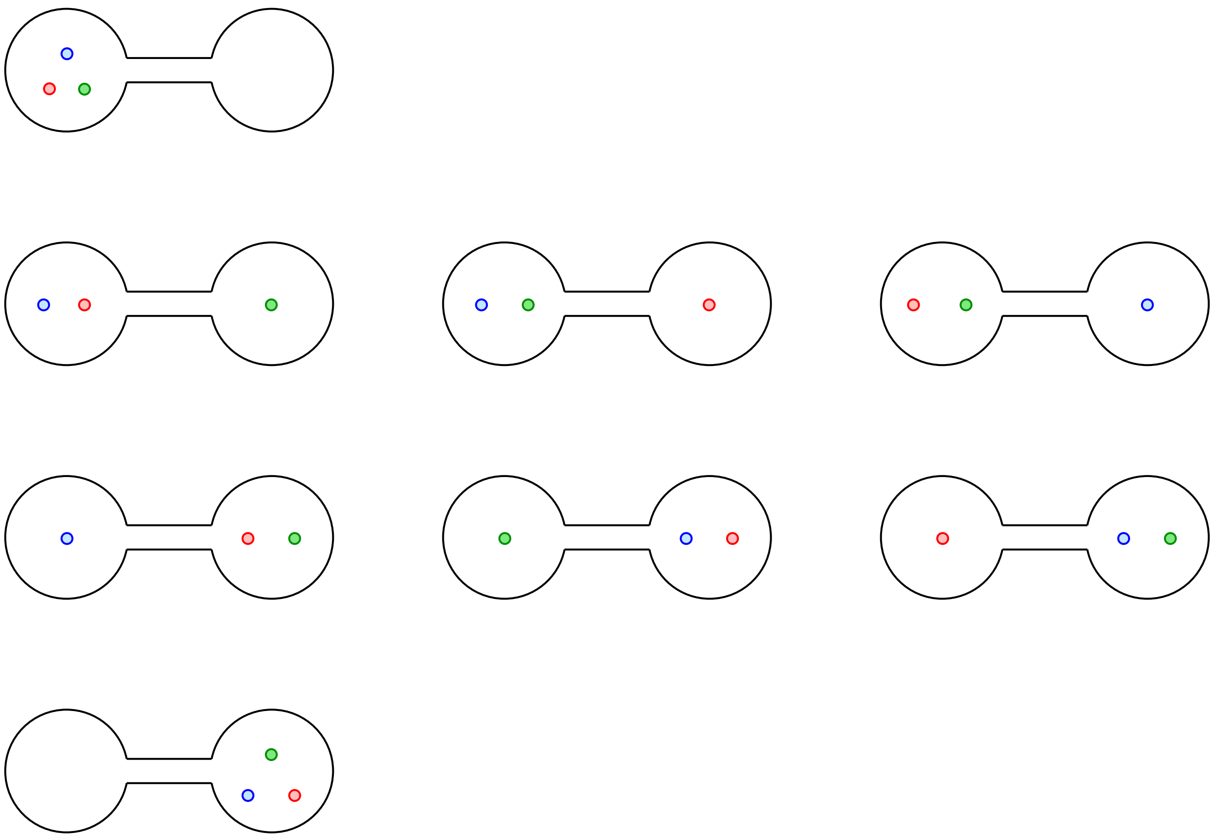


$X = 2$ $\qquad \mathbb{P}\{X = 2\} = 1/4$

Modèle simplifié : cas $N = 3$

$2^3 = 8$ configurations microscopiques

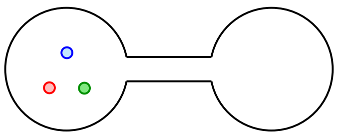
$3 + 1 = 4$ configurations macroscopiques



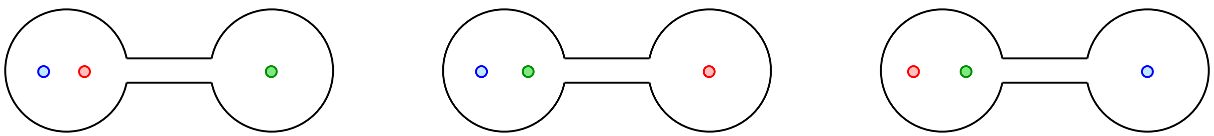
Modèle simplifié : cas $N = 3$

$2^3 = 8$ configurations microscopiques

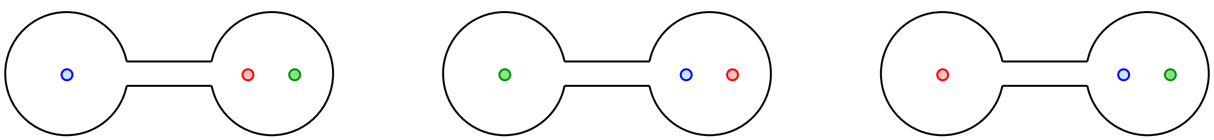
$3 + 1 = 4$ configurations macroscopiques



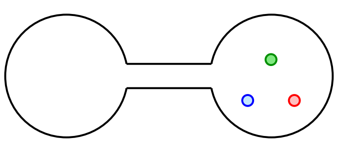
$\mathbb{P}\{X = 0\} = 1/8$



$\mathbb{P}\{X = 1\} = 3/8$



$\mathbb{P}\{X = 2\} = 3/8$

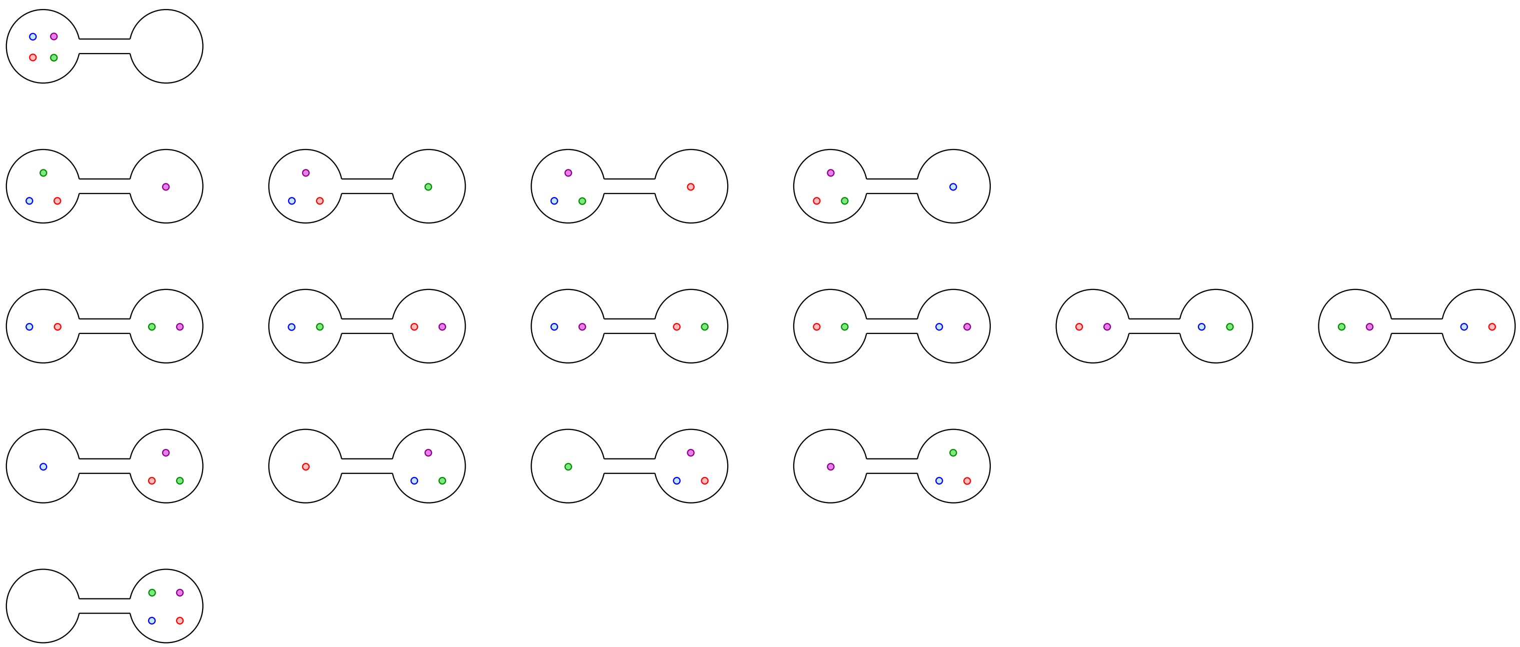


$\mathbb{P}\{X = 3\} = 1/8$

Modèle simplifié : cas $N = 4$

$2^4 = 16$ configurations microscopiques

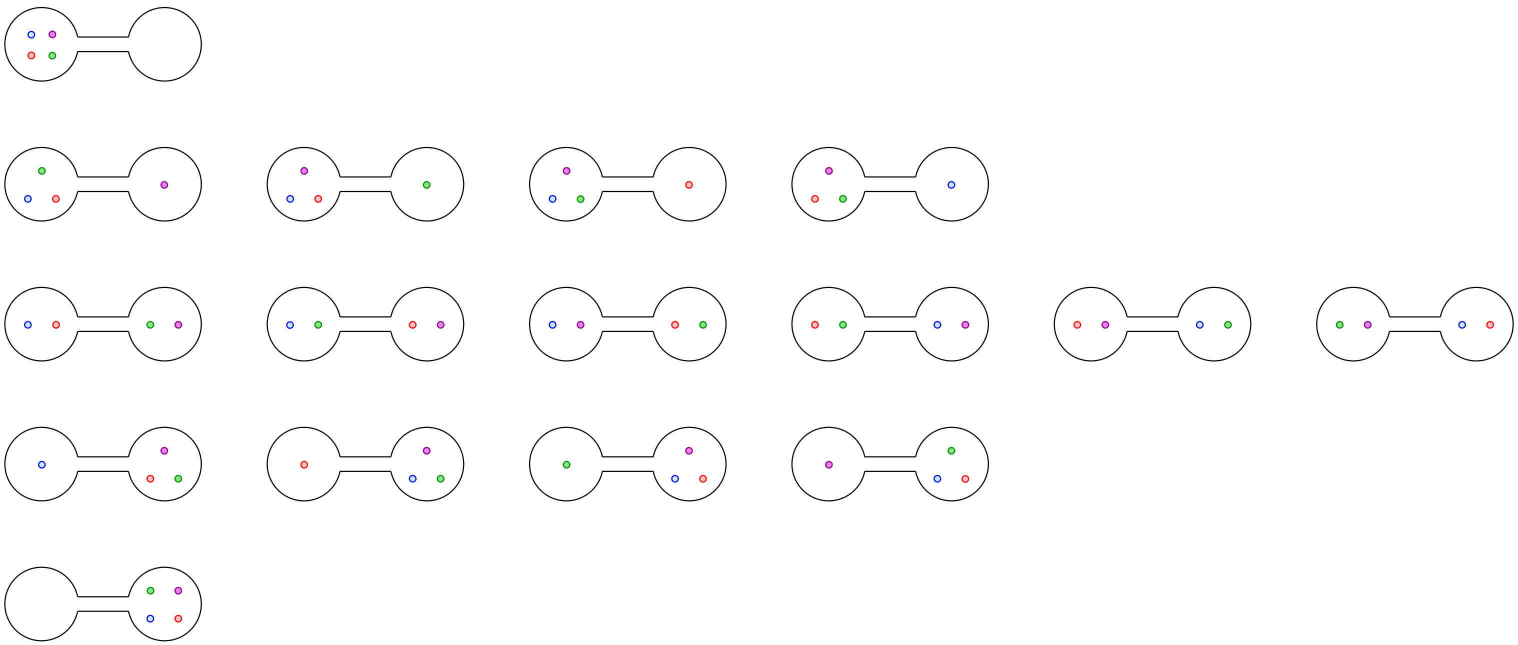
$4 + 1 = 5$ configurations macroscopiques



Modèle simplifié : cas $N = 4$

$2^4 = 16$ configurations microscopiques

$4 + 1 = 5$ configurations macroscopiques



$1/16$

$4/16$

$6/16$

$4/16$

$1/16$

Probabilités des configurations macroscopiques

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
$N = 1$	1/2	1/2			
$N = 2$	1/4	2/4	1/4		
$N = 3$	1/8	3/8	3/8	1/8	
$N = 4$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Probabilités des configurations macroscopiques

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$N=1$	$1/2$	$1/2$				
$N=2$	$1/4$	$2/4$	$1/4$			
$N=3$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$		
$N=4$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$	
$N=5$	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

Probabilités des configurations macroscopiques

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$N=1$	$1/2$	$1/2$				
$N=2$	$1/4$	$2/4$	$1/4$			
$N=3$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$		
$N=4$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$	
$N=5$	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

Probabilités des configurations macroscopiques

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$N=1$	$1/2$	$1/2$				
$N=2$	$1/4$	$2/4$	$1/4$			
$N=3$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$		
$N=4$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$	
$N=5$	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

Triangle de Pascal

La loi binomiale

Cas général : pour N atomes,

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{2^N} C_N^k$$

C_N^k (aussi noté $\binom{N}{k}$) : nombre de choix de k objets parmi N

La loi binomiale

Cas général : pour N atomes,

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{2^N} C_N^k$$

C_N^k (aussi noté $\binom{N}{k}$) : nombre de choix de k objets parmi N

$$C_N^k = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

où $N! = N(N-1)(N-2)\dots 2 \cdot 1$ est la factorielle de N.

La loi binomiale

Cas général : pour N atomes,

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{2^N} C_N^k$$

C_N^k (aussi noté $\binom{N}{k}$) : nombre de choix de k objets parmi N

$$C_N^k = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k(k-1)\dots2\cdot1} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

où $N! = N(N-1)(N-2)\dots2\cdot1$ est la factorielle de N.

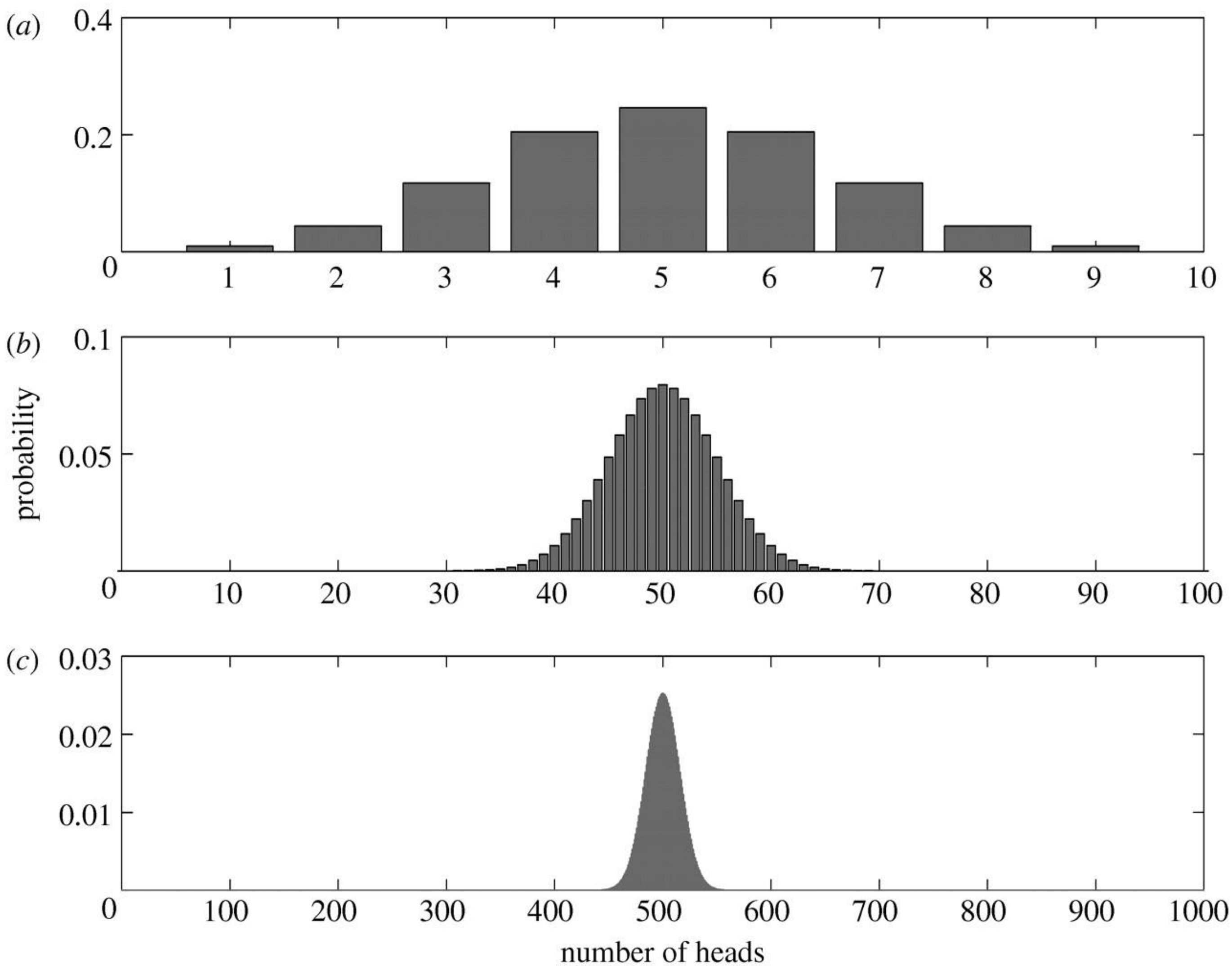
$$1! = 1 \qquad 5! = 120$$

$$2! = 2\cdot1 = 2 \qquad 10! = 3628800$$

$$3! = 3\cdot2\cdot1 = 6 \qquad 15! = 1307674368000$$

$$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24 \qquad 20! = 2432902008176640000$$

La loi des grands nombres



Lorsque N augmente, la probabilité que $X/N \simeq 1/2$ tend vers 1.

La formule de Moivre–Laplace

Plus précisément, on sait montrer que

$$\frac{1}{2^N} C_N^k \sim \frac{1}{\sqrt{\pi N/2}} \,\mathrm{e}^{-(k-N/2)^2/(N/2)} \qquad \text{pour } N \gg 1$$

(loi de Gauss) où $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ est la constante de Néper.
Cette probabilité est très petite dès que $|k/N - 1/2| \gg 1/\sqrt{N}$.

La formule de Moivre–Laplace

Plus précisément, on sait montrer que

$$\frac{1}{2^N} C_N^k \sim \frac{1}{\sqrt{\pi N/2}}\, \mathrm{e}^{-(k-N/2)^2/(N/2)} \qquad \text{pour } N \gg 1$$

(loi de Gauss) où $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ est la constante de Néper. Cette probabilité est très petite dès que $|k/N - 1/2| \gg 1/\sqrt{N}$.

La preuve utilise la formule de Stirling :

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N}\, N^N\, \mathrm{e}^{-N}$$

pour $N \gg 1$

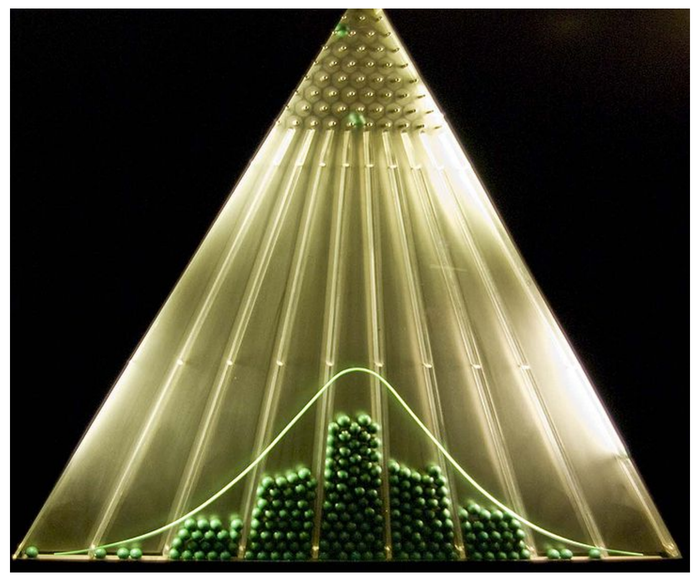


Planche de Galton

Conséquences de la loi des grands nombres en physique statistique

- Dans notre modèle simplifié, avec très grande probabilité, la moitié des atomes se trouvera de chaque côté du récipient (en fait, la moitié à $1/\sqrt{N} \simeq 10^{-12}$ près)

Conséquences de la loi des grands nombres en physique statistique

- Dans notre modèle simplifié, avec très grande probabilité, la moitié des atomes se trouvera de chaque côté du récipient (en fait, la moitié à $1/\sqrt{N} \simeq 10^{-12}$ près)

- Le même raisonnement s'applique si l'on divise le récipient en plus de deux parties.
  Cela montre qu'il y aura à peu près le même nombre d'atomes dans différentes parties de même volume (tant que ce nombre est grand)

Conséquences de la loi des grands nombres en physique statistique

- Dans notre modèle simplifié, avec très grande probabilité, la moitié des atomes se trouvera de chaque côté du récipient (en fait, la moitié à $1/\sqrt{N} \simeq 10^{-12}$ près)
- Le même raisonnement s'applique si l'on divise le récipient en plus de deux parties.
  Cela montre qu'il y aura à peu près le même nombre d'atomes dans différentes parties de même volume (tant que ce nombre est grand)
- La loi des gaz parfaits s'obtient de manière similaire, en considérant aussi les vitesses des atomes
  La seule différence est que l'énergie totale est constante (énergie cinétique: somme des $\frac{1}{2}mv^2$)

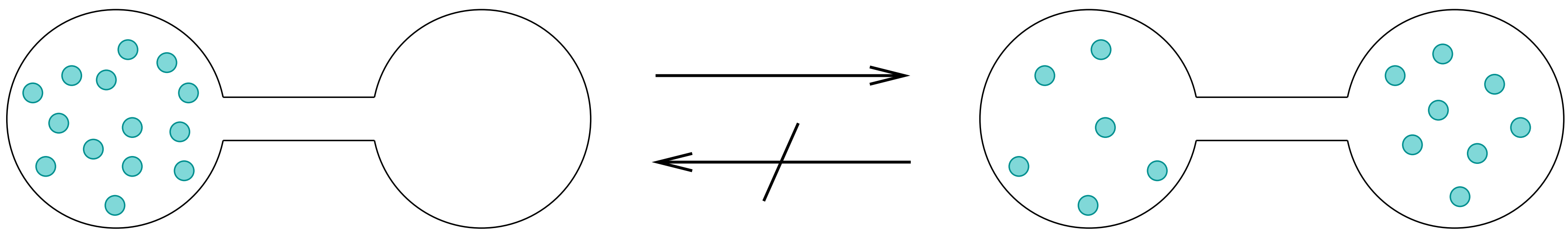
Réversibilité et irréversibilité

- La dynamique microscopique du gaz est réversible :
  Un film, passé en inversant le sens du temps, est indistinguable d'un film passé dans le bon sens

Réversibilité et irréversibilité

- La dynamique microscopique du gaz est réversible :
  Un film, passé en inversant le sens du temps, est indistinguable d'un film passé dans le bon sens

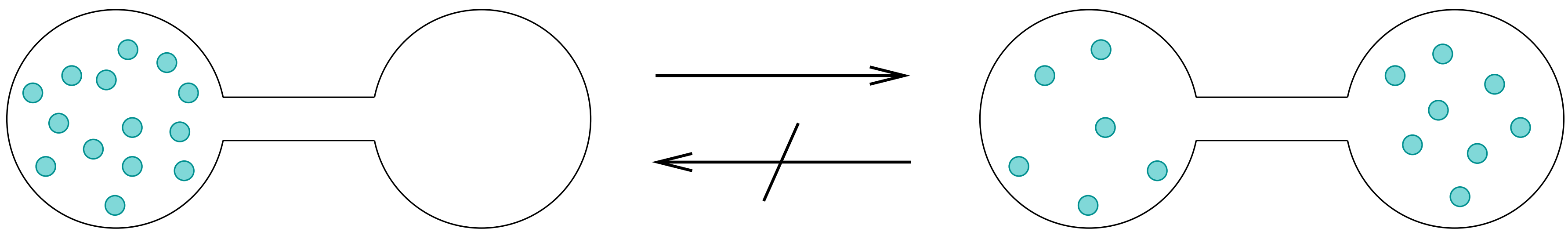
- La dynamique macroscopique du gaz est irréversible :
  - Gaz chaud + gaz froid $\overrightarrow{\not\leftarrow}$ gaz tiède
  - Gaz dans une seule moitié $\overrightarrow{\not\leftarrow}$ gaz dans les deux moitiés



Réversibilité et irréversibilité

- La dynamique microscopique du gaz est réversible :
  Un film, passé en inversant le sens du temps, est indistinguable d'un film passé dans le bon sens

- La dynamique macroscopique du gaz est irréversible :
  - Gaz chaud + gaz froid $\stackrel{\rightarrow}{\not\leftarrow}$ gaz tiède
  - Gaz dans une seule moitié $\stackrel{\rightarrow}{\not\leftarrow}$ gaz dans les deux moitiés



Comment résoudre ce paradoxe apparent?

Le modèle d'Ehrenfest

On considère le même récipient en deux parties qu'avant
On ajoute une dynamique aléatoire :

Le modèle d'Ehrenfest

On considère le même récipient en deux parties qu'avant
On ajoute une dynamique aléatoire :

- Formulation microscopique :
  à intervalles de temps réguliers (disons toutes les secondes)
  on tire au hasard l'un des N atomes (chacun avec proba $1/N$)
  et on le change de côté

Le modèle d'Ehrenfest

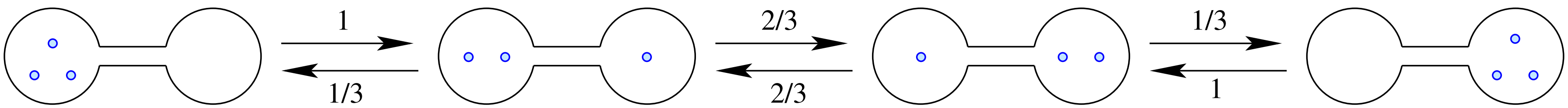
On considère le même récipient en deux parties qu'avant
On ajoute une dynamique aléatoire :

- Formulation microscopique :
  à intervalles de temps réguliers (disons toutes les secondes) on tire au hasard l'un des N atomes (chacun avec proba $1/N$) et on le change de côté

- Formulation macroscopique :
  Toutes les secondes, s'il y a X atomes du côté droit
  on déplace un atome de droite à gauche avec probabilité X/N
  on déplace un atome de gauche à droite avec probabilité $1-X/N$

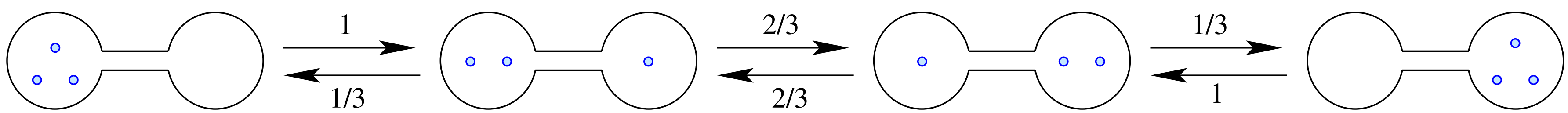
Le modèle d'Ehrenfest

$N = 3$:



Le modèle d'Ehrenfest

$N = 3$:

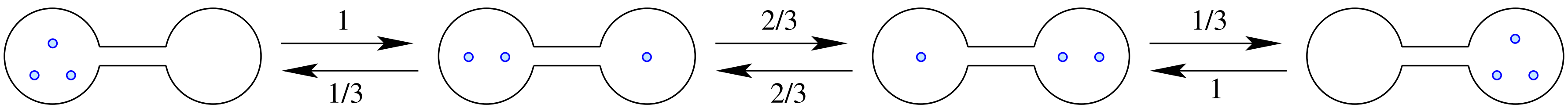


$N = 4$:

$$\{X = 0\} \;\overset{1}{\underset{1/4}{\rightleftarrows}}\; \{X = 1\} \;\overset{3/4}{\underset{2/4}{\rightleftarrows}}\; \{X = 2\} \;\overset{2/4}{\underset{3/4}{\rightleftarrows}}\; \{X = 3\} \;\overset{1/4}{\underset{1}{\rightleftarrows}}\; \{X = 4\}$$

Le modèle d'Ehrenfest

$N = 3$:



$N = 4$:

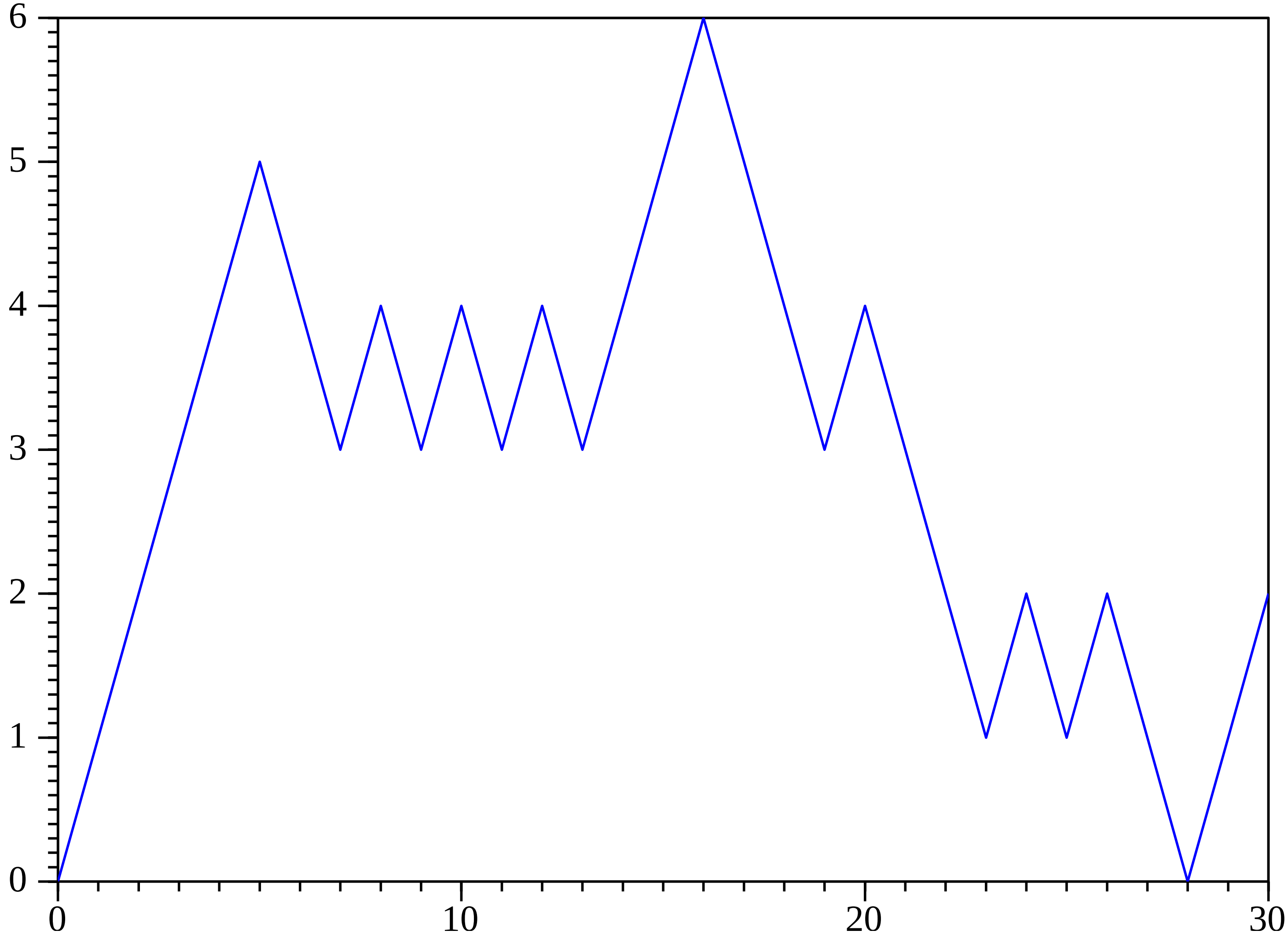
$$\{X=0\} \underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \{X=1\} \underset{2/4}{\overset{3/4}{\rightleftarrows}} \{X=2\} \underset{3/4}{\overset{2/4}{\rightleftarrows}} \{X=3\} \underset{1}{\overset{1/4}{\rightleftarrows}} \{X=4\}$$

De manière générale, on a $\{X=k\} \underset{(k+1)/N}{\overset{1-k/N}{\rightleftarrows}} \{X=k+1\}$

C'est un exemple de chaîne de Markov

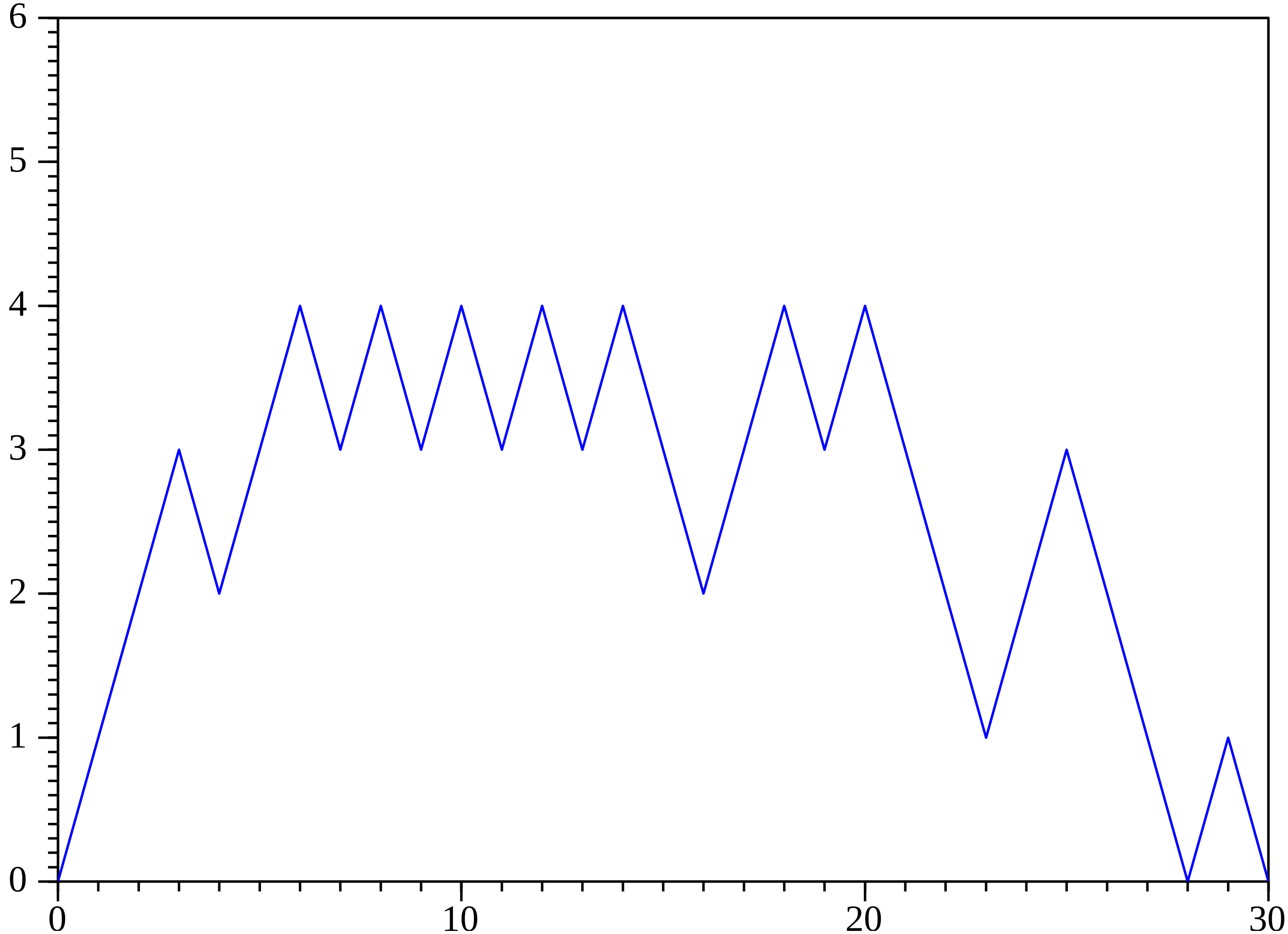
Simulations du modèle d'Ehrenfest

$N = 6$, 30 itérations



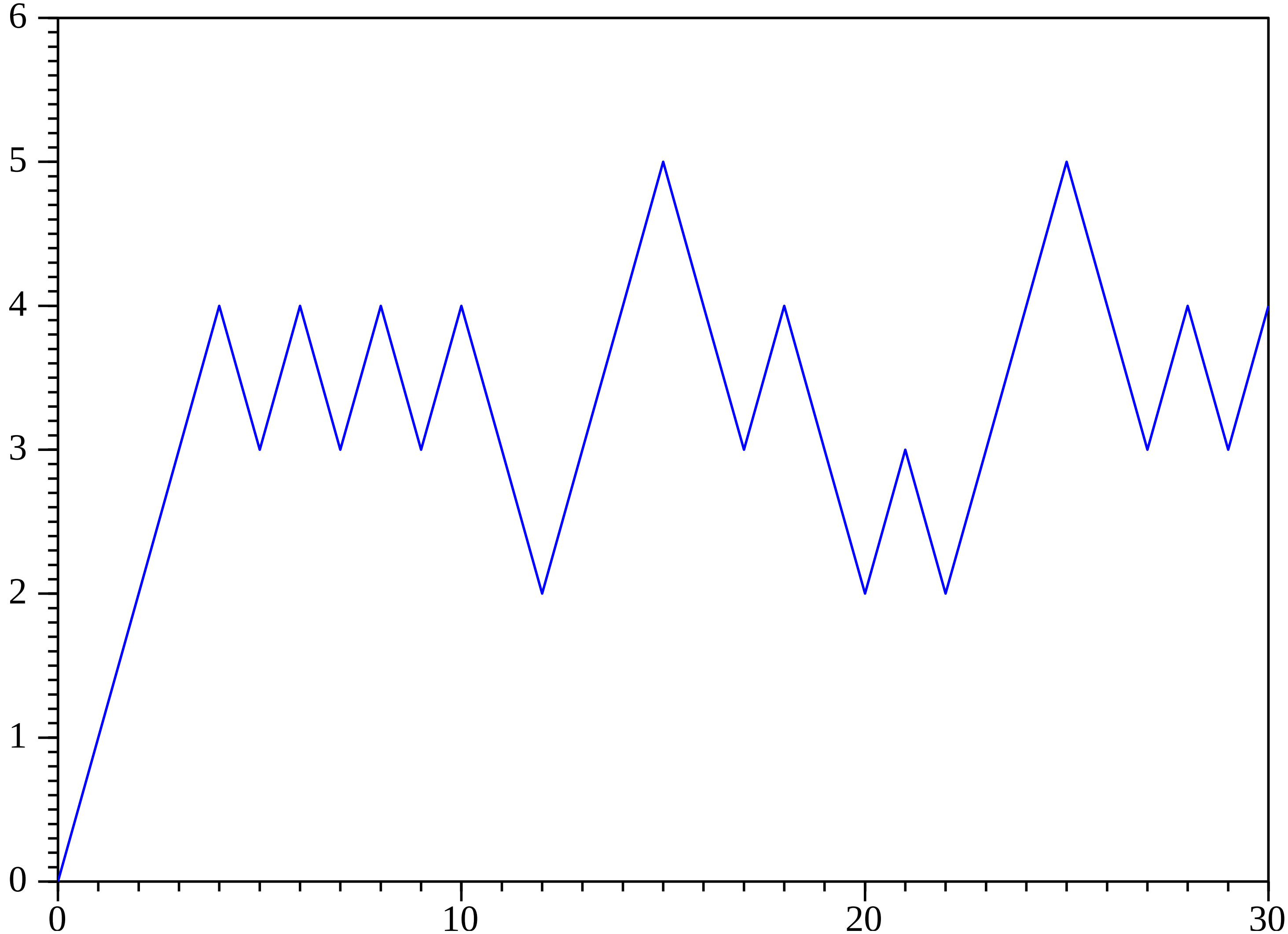
Simulations du modèle d'Ehrenfest

$N = 6$, 30 itérations



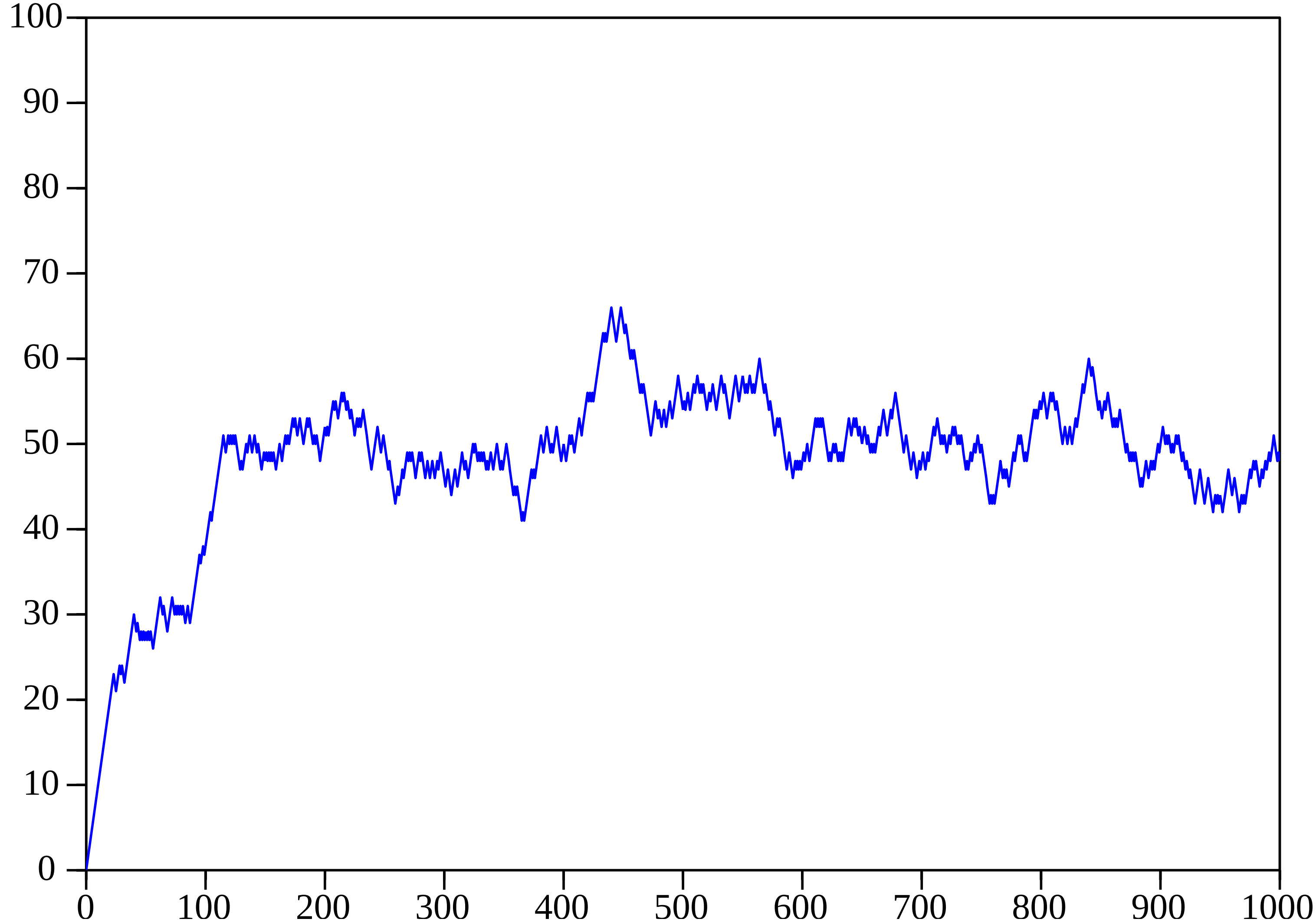
Simulations du modèle d'Ehrenfest

$N = 6$, 30 itérations



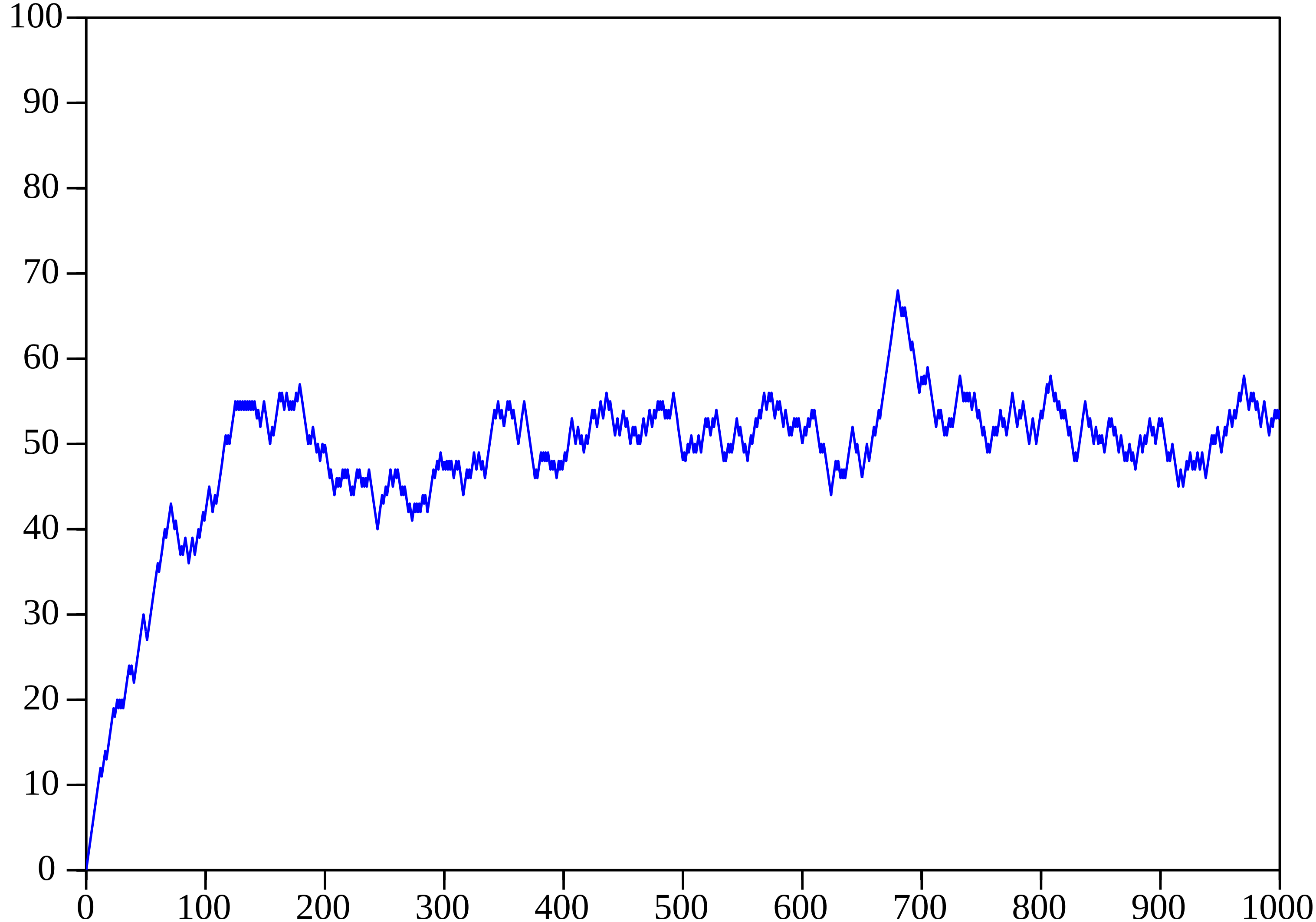
Simulations du modèle d'Ehrenfest

N = 100, 1000 itérations



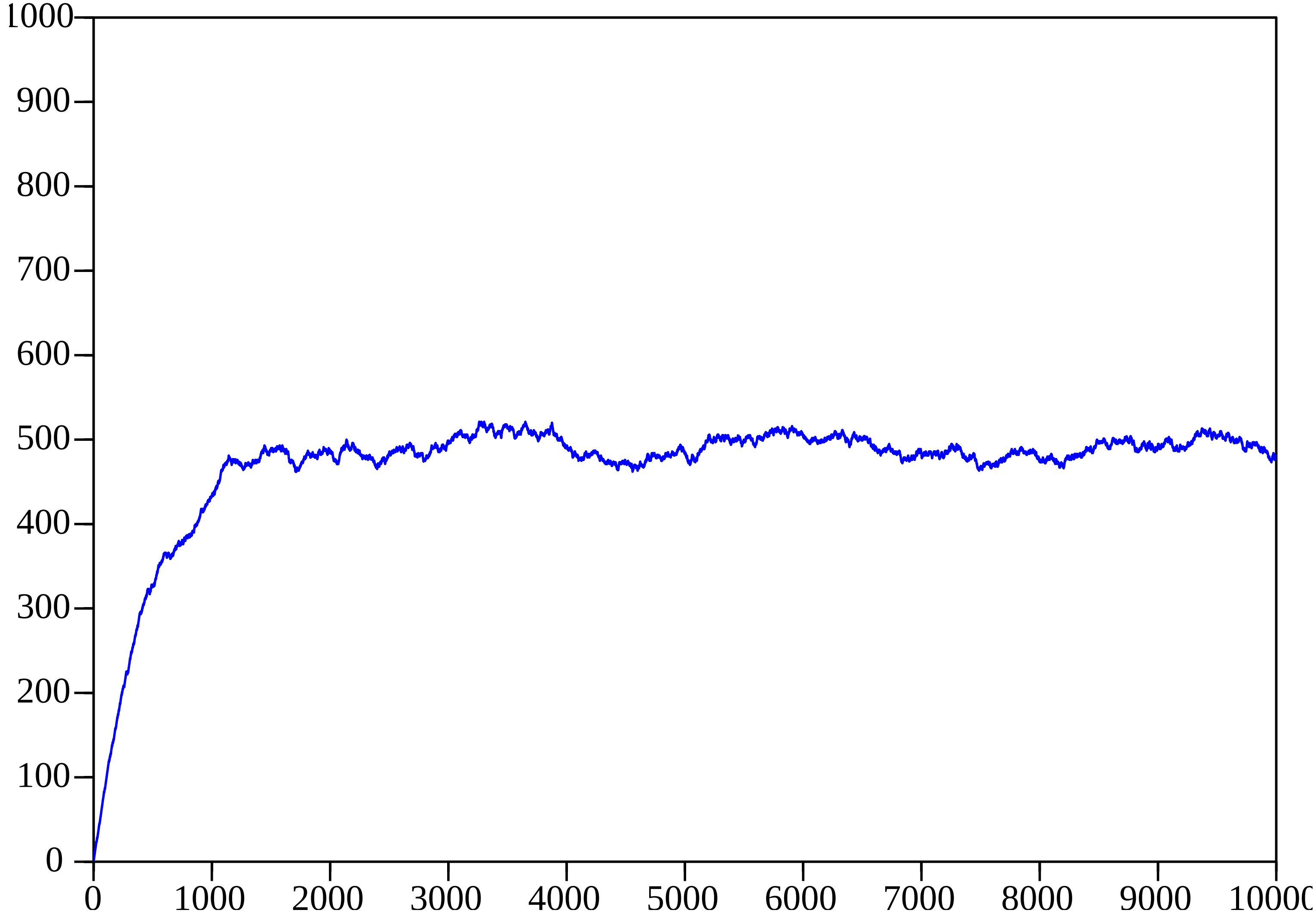
Simulations du modèle d'Ehrenfest

$N = 100$, 1000 itérations



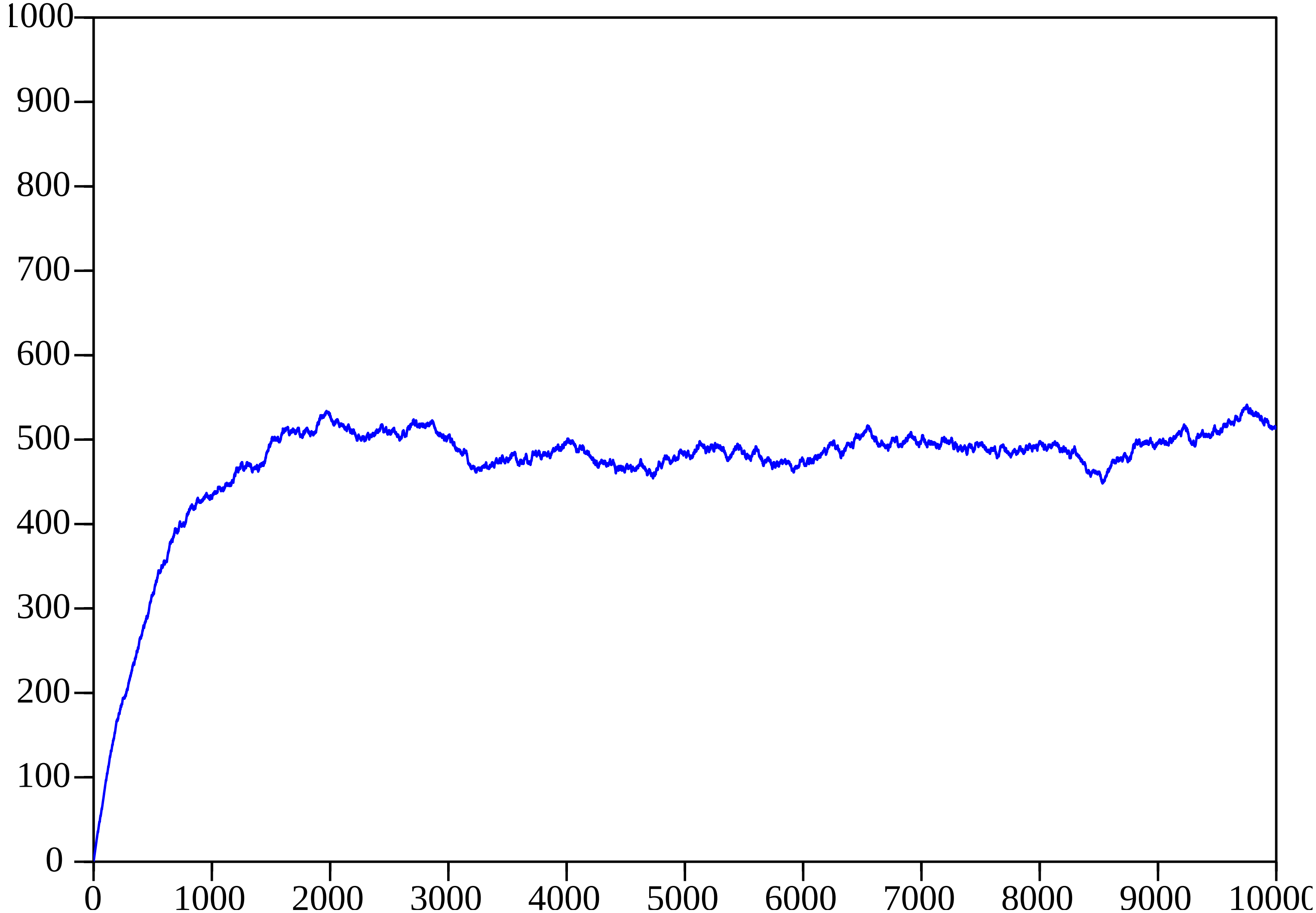
Simulations du modèle d'Ehrenfest

$N = 1000$, 10 000 itérations



Simulations du modèle d'Ehrenfest

$N = 1000$, $10\,000$ itérations



Evolution de la distribution de probabilité

$$0 \quad \underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad 1 \quad \underset{2/4}{\overset{3/4}{\rightleftarrows}} \quad 2 \quad \underset{3/4}{\overset{2/4}{\rightleftarrows}} \quad 3 \quad \underset{1}{\overset{1/4}{\rightleftarrows}} \quad 4$$

X	0	1	2	3	4
$n = 0$	1				

Evolution de la distribution de probabilité

$$0 \;\underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\; 1 \;\underset{2/4}{\overset{3/4}{\rightleftarrows}}\; 2 \;\underset{3/4}{\overset{2/4}{\rightleftarrows}}\; 3 \;\underset{1}{\overset{1/4}{\rightleftarrows}}\; 4$$

$$\begin{array}{r|ccccc}
X & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
\hline
n=0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & \searrow^{1} & & & & & & & \\
n=1 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & &
\end{array}$$

Evolution de la distribution de probabilité

$$0 \quad \underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad 1 \quad \underset{2/4}{\overset{3/4}{\rightleftarrows}} \quad 2 \quad \underset{3/4}{\overset{2/4}{\rightleftarrows}} \quad 3 \quad \underset{1}{\overset{1/4}{\rightleftarrows}} \quad 4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc}
X & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
\hline
n=0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & \searrow^{1} & & & & & & & \\
n=1 & & & 1 & & & & & & \\
 & & {}^{1/4}\swarrow & & \searrow^{3/4} & & & & & \\
n=2 & \frac{1}{4} & & & & \frac{3}{4} & & & & \\
\end{array}$$

Evolution de la distribution de probabilité

$$0 \quad \underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad 1 \quad \underset{2/4}{\overset{3/4}{\rightleftarrows}} \quad 2 \quad \underset{3/4}{\overset{2/4}{\rightleftarrows}} \quad 3 \quad \underset{1}{\overset{1/4}{\rightleftarrows}} \quad 4$$

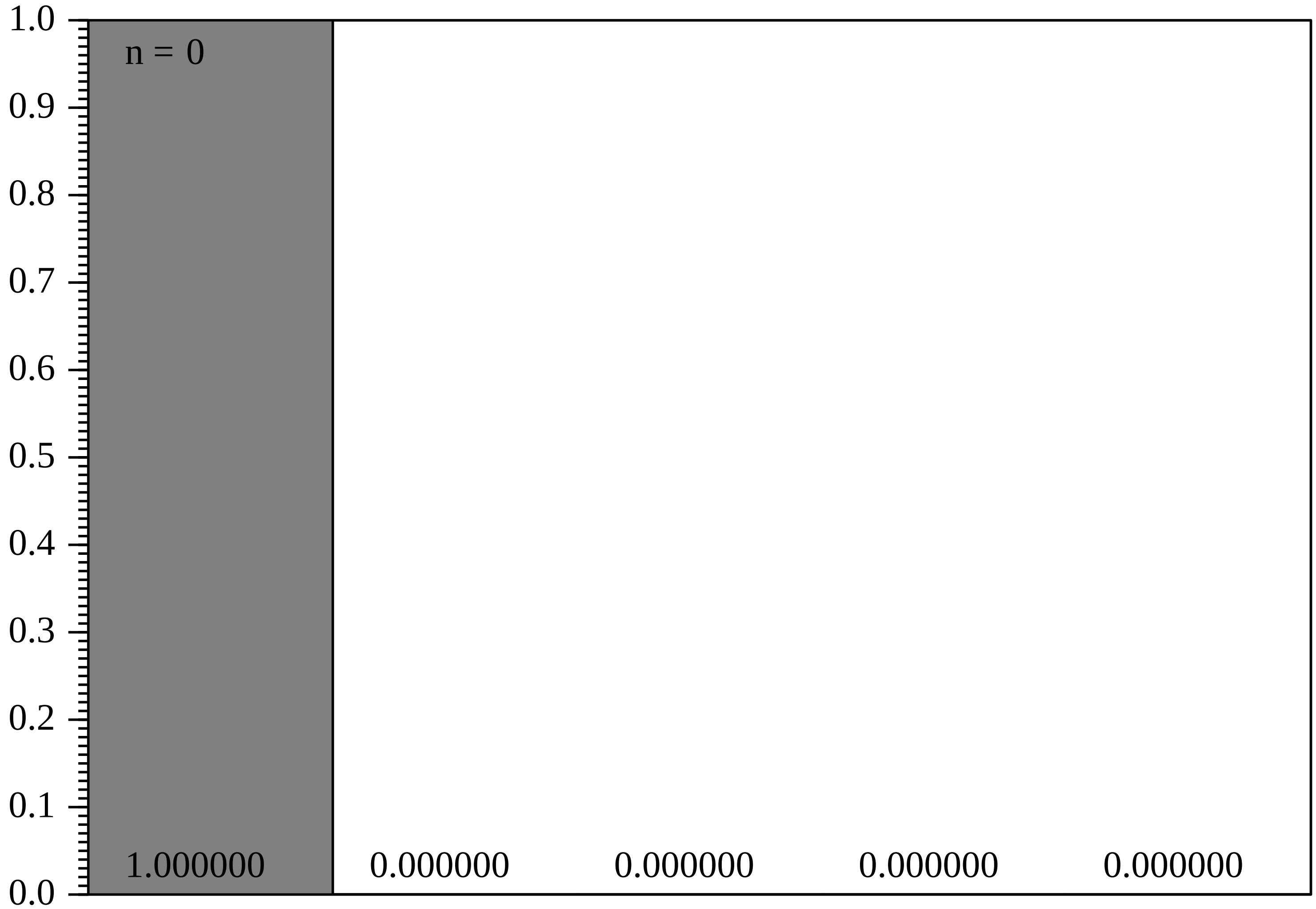
$$\begin{array}{r|ccccccccc}
X & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
\hline
n=0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & \searrow 1 & & & & & & & \\
n=1 & & & 1 & & & & & & \\
 & & 1/4 \swarrow & & \searrow 3/4 & & & & & \\
n=2 & \frac{1}{4} & & & & \frac{3}{4} & & & & \\
 & & \searrow 1 & & 2/4 \swarrow & & \searrow 2/4 & & & \\
n=3 & & & \frac{5}{8} & & & & \frac{3}{8} & & \\
\end{array}$$

Evolution de la distribution de probabilité

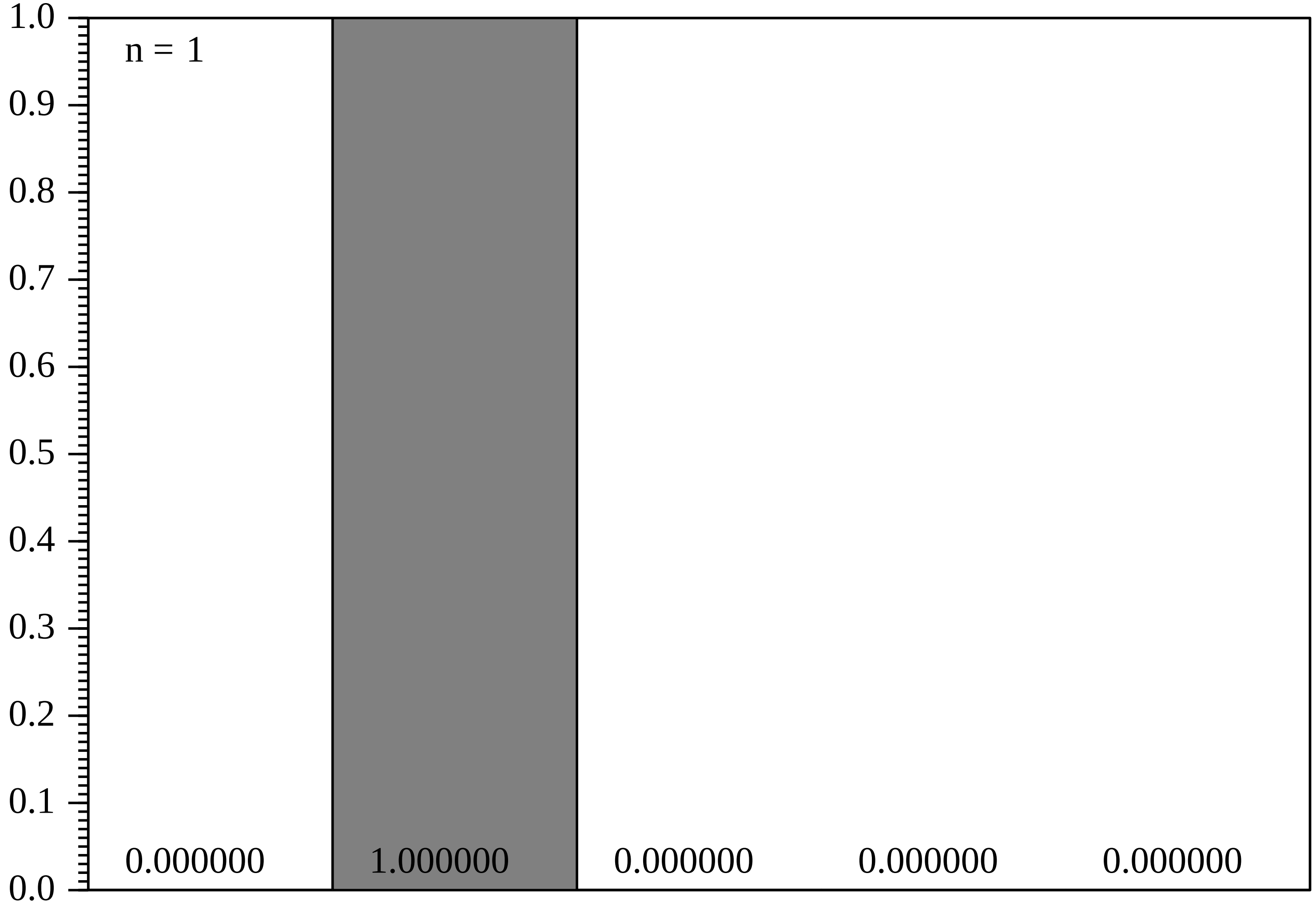
$$0 \;\underset{1/4}{\overset{1}{\rightleftarrows}}\; 1 \;\underset{2/4}{\overset{3/4}{\rightleftarrows}}\; 2 \;\underset{3/4}{\overset{2/4}{\rightleftarrows}}\; 3 \;\underset{1}{\overset{1/4}{\rightleftarrows}}\; 4$$

X	0		1		2		3		4
$n=0$	1								
		$\searrow$ 1							
$n=1$			1						
		1/4 $\swarrow$		$\searrow$ 3/4					
$n=2$	$\frac{1}{4}$				$\frac{3}{4}$				
		$\searrow$ 1		2/4 $\swarrow$		$\searrow$ 2/4			
$n=3$			$\frac{5}{8}$				$\frac{3}{8}$		
		1/4 $\swarrow$		$\searrow$ 3/4		3/4 $\swarrow$		$\searrow$ 1/4	
$n=4$	$\frac{5}{32}$				$\frac{3}{4}$				$\frac{3}{32}$

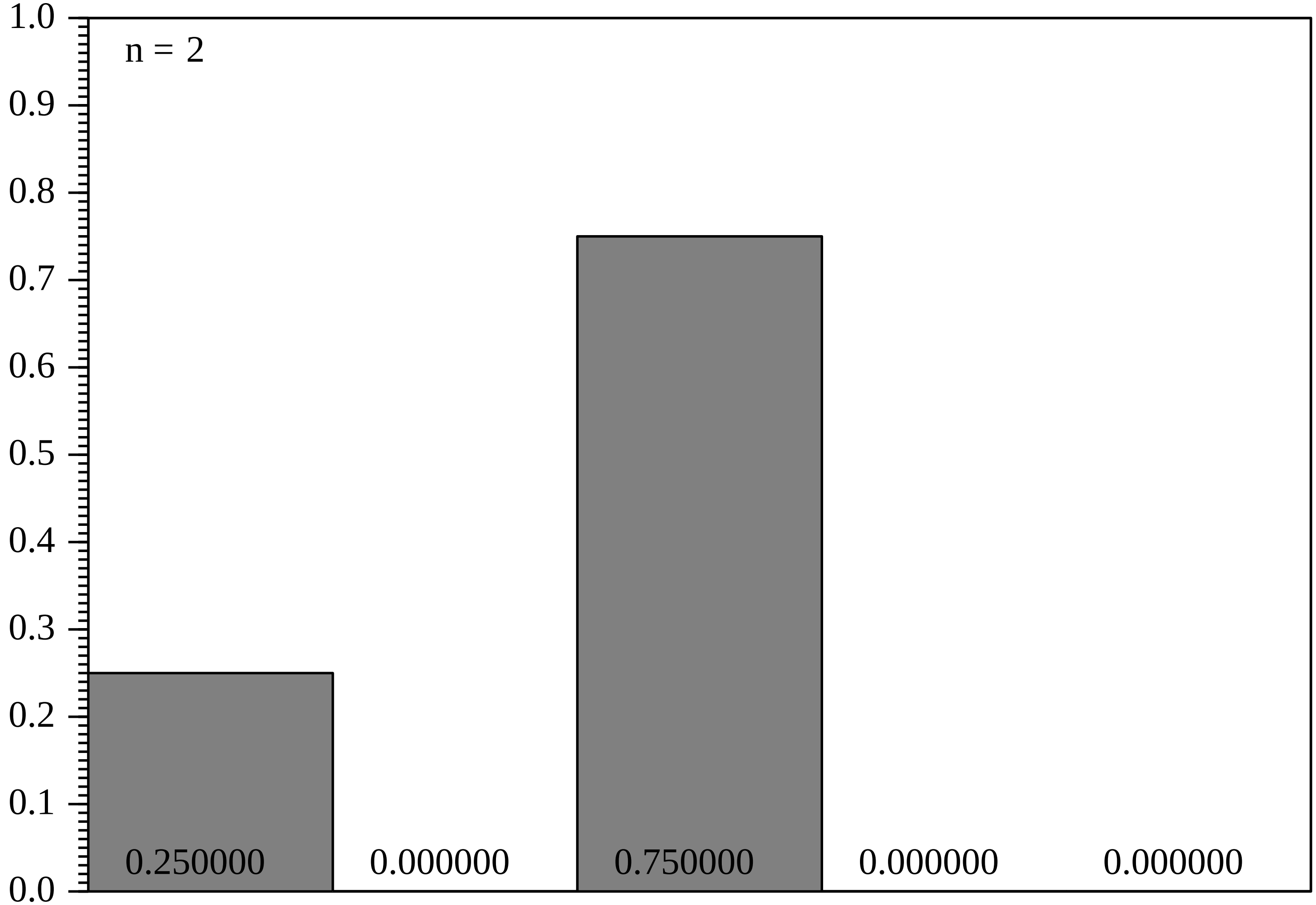
Evolution de la distribution de probabilité



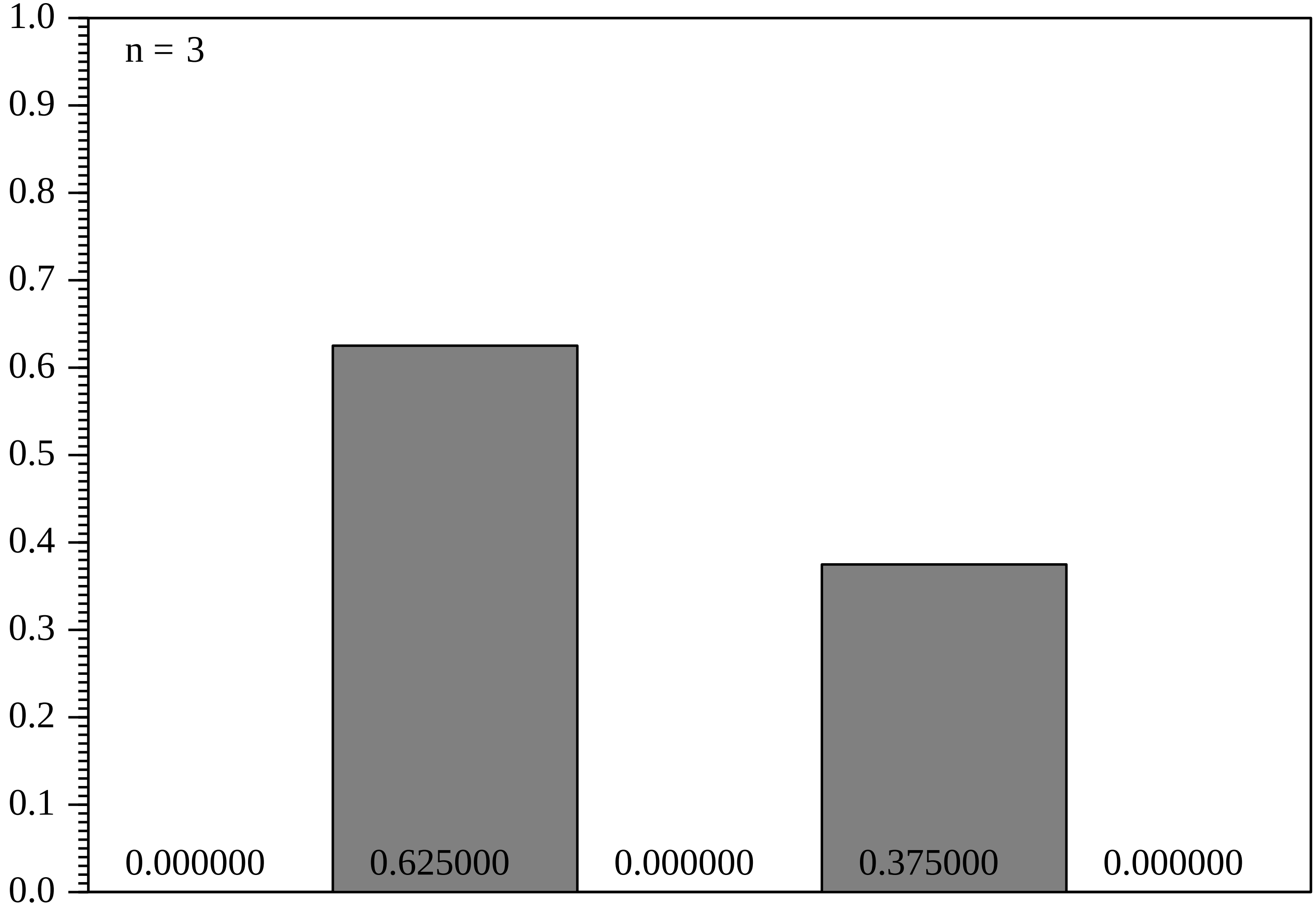
Evolution de la distribution de probabilité



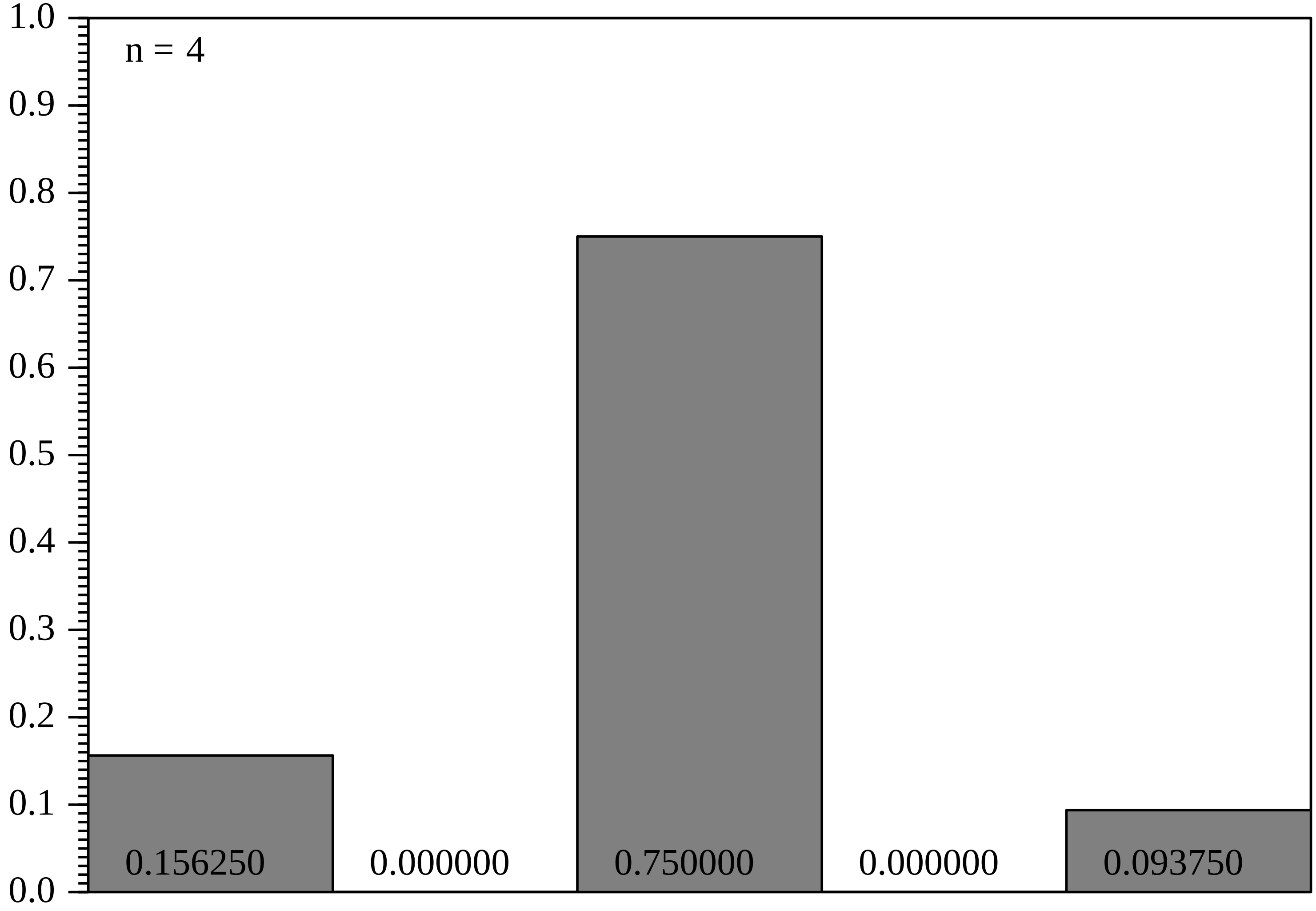
Evolution de la distribution de probabilité



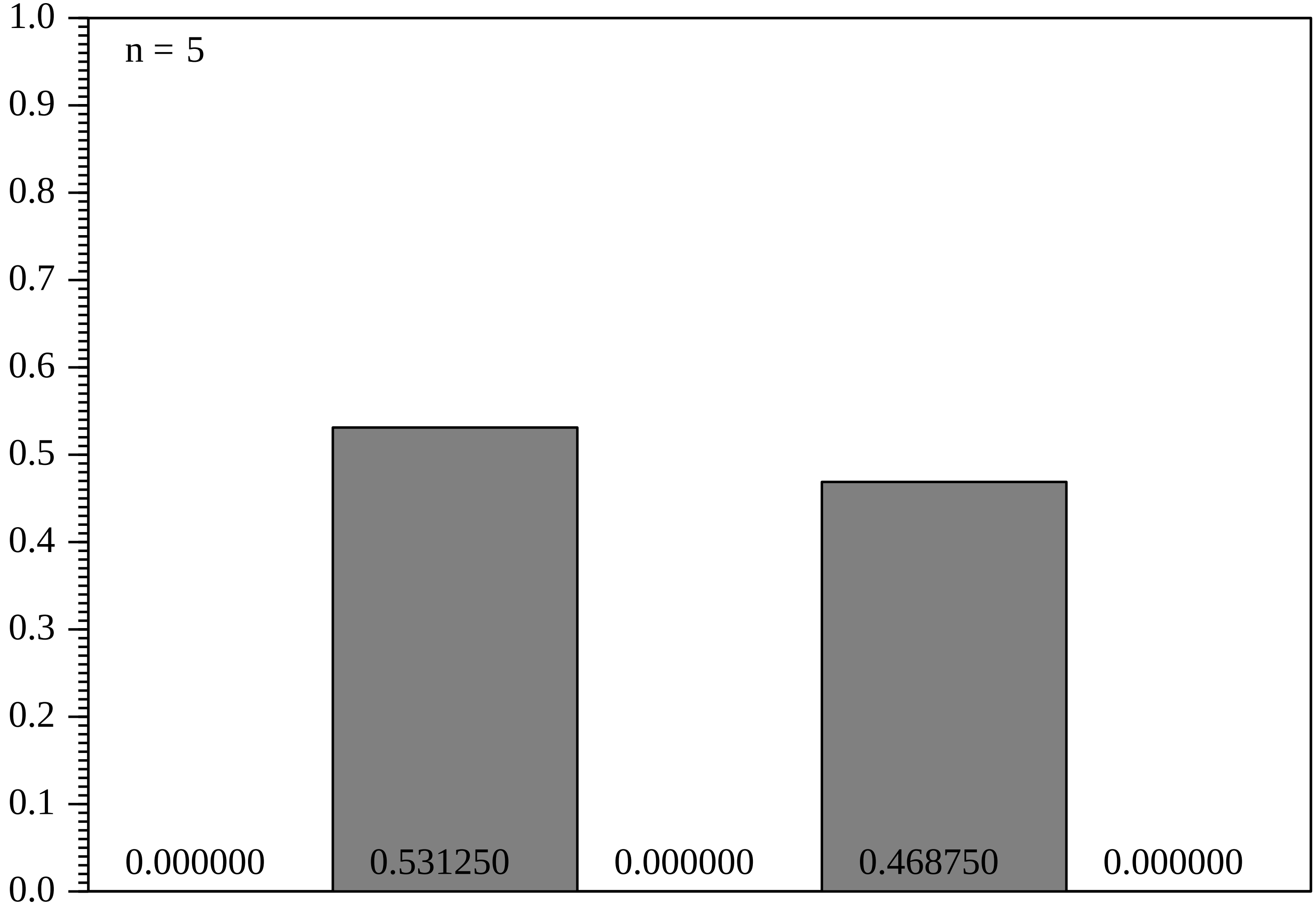
Evolution de la distribution de probabilité



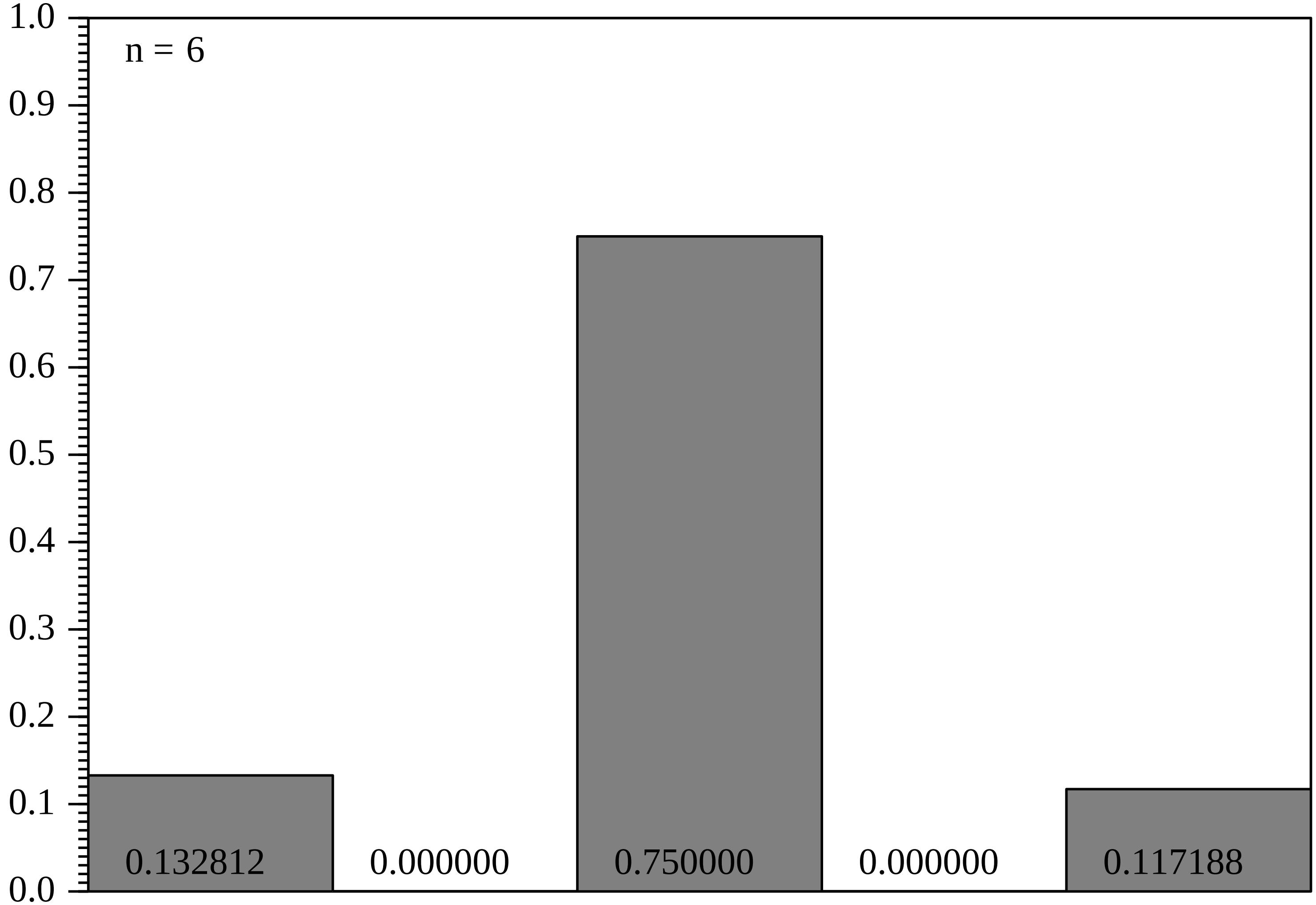
Evolution de la distribution de probabilité



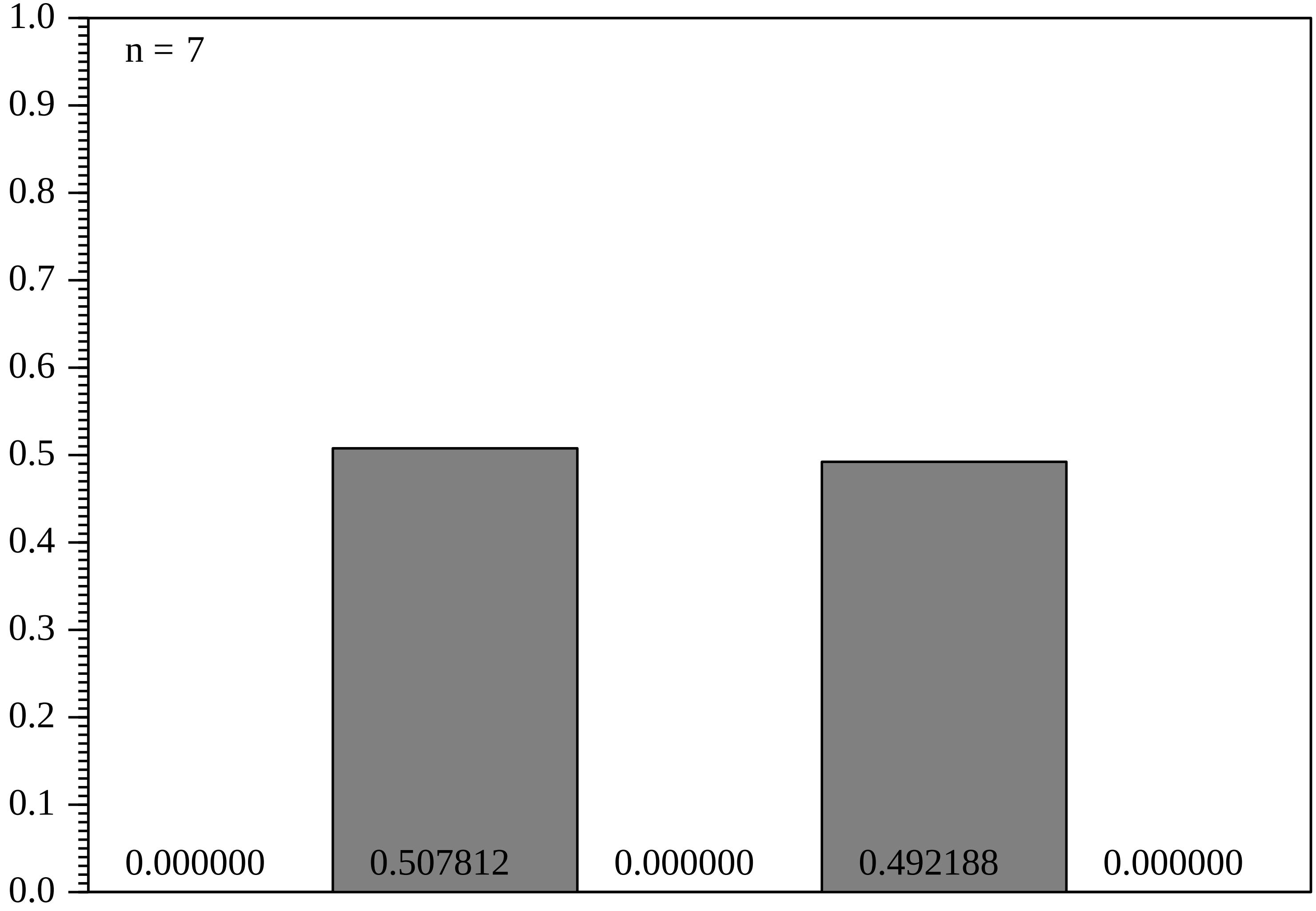
Evolution de la distribution de probabilité



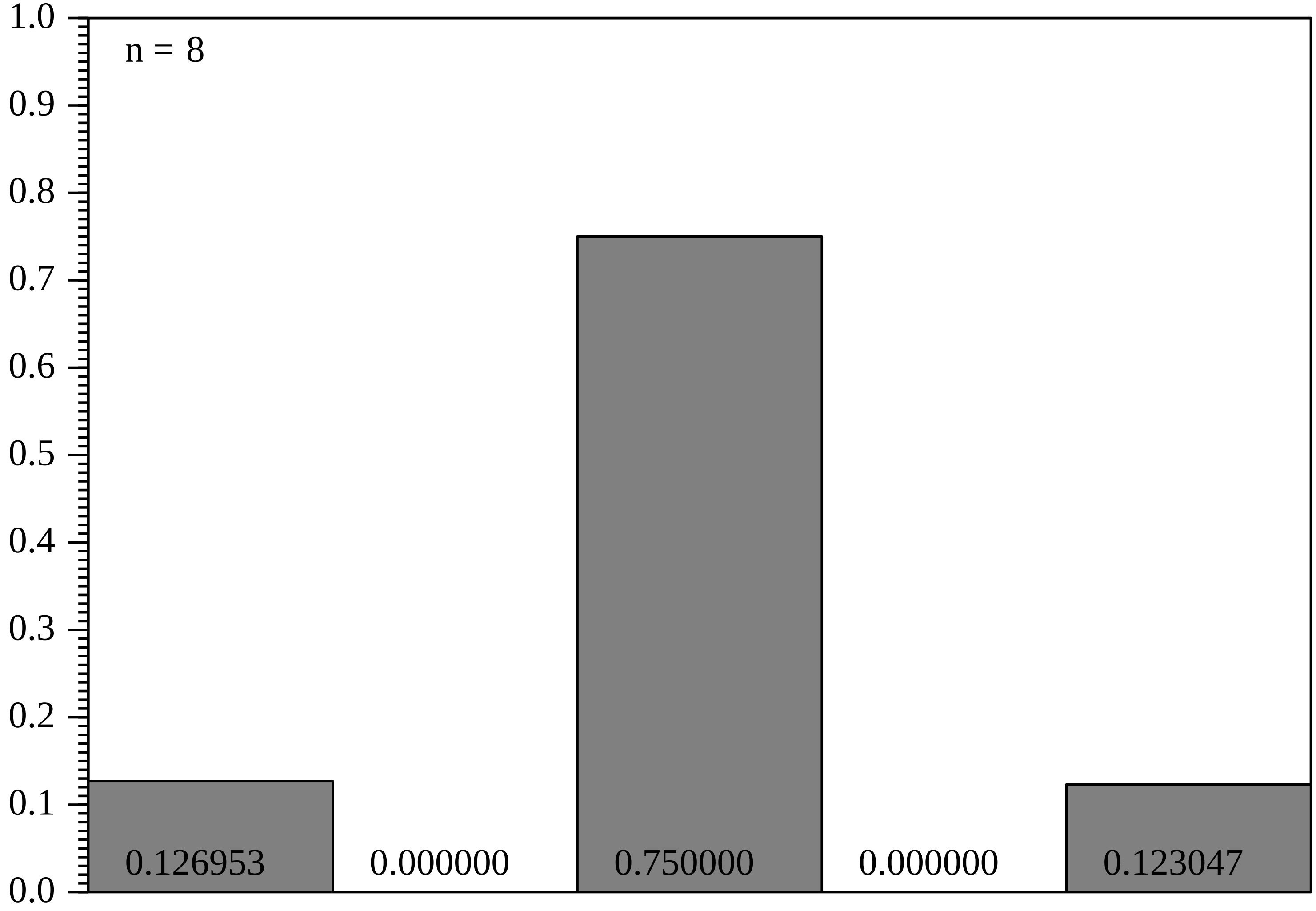
Evolution de la distribution de probabilité



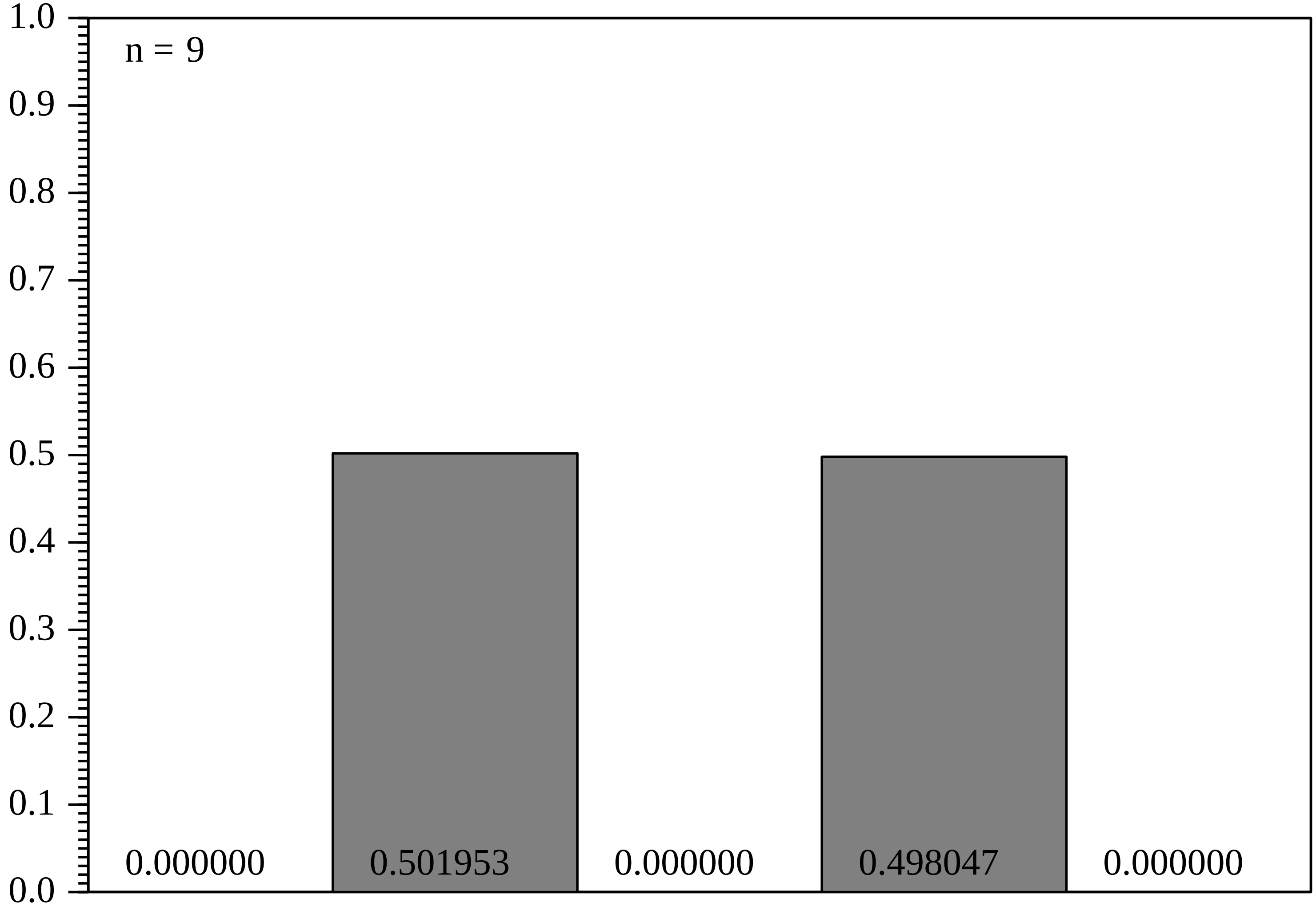
Evolution de la distribution de probabilité



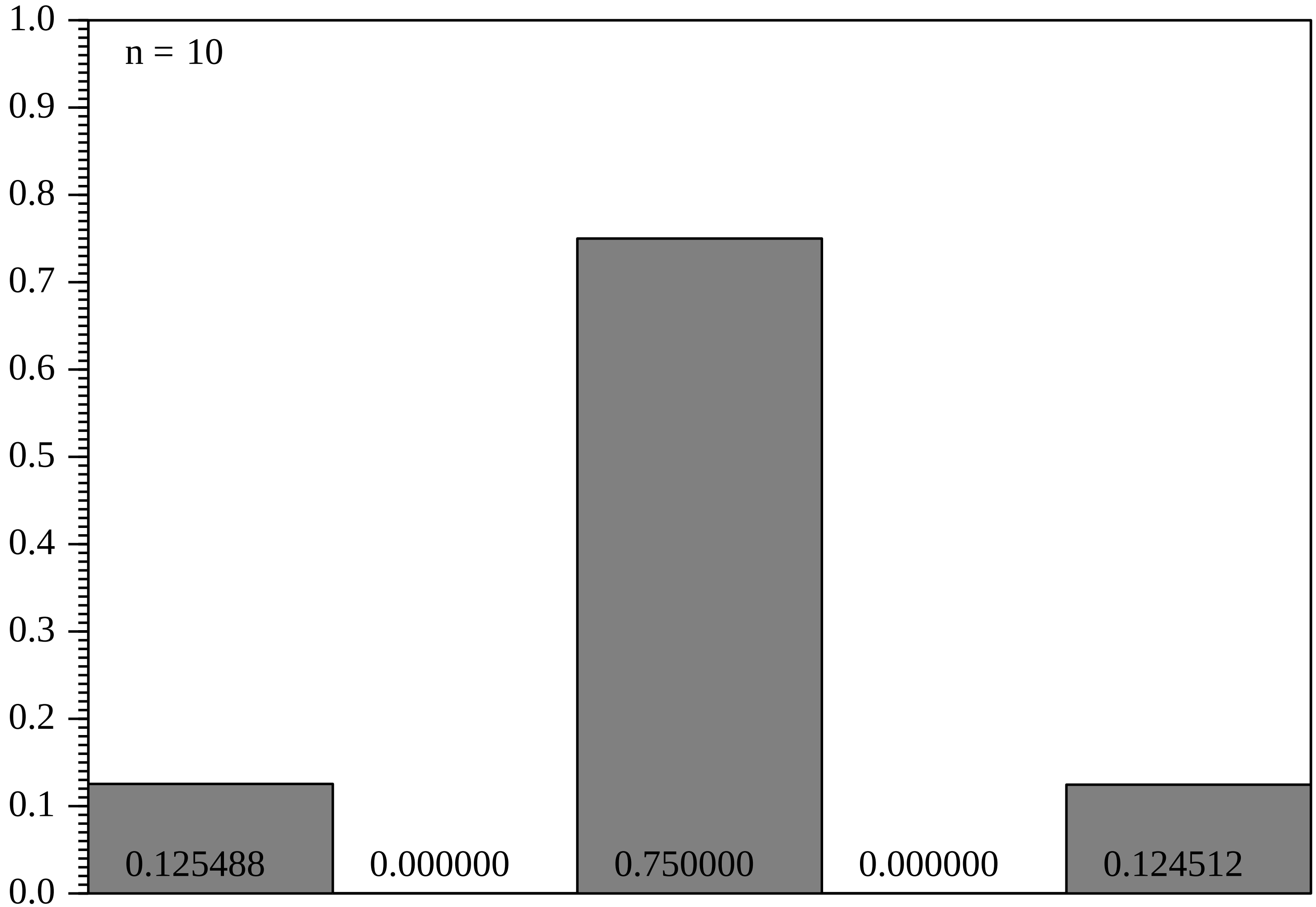
Evolution de la distribution de probabilité



Evolution de la distribution de probabilité



Evolution de la distribution de probabilité



Distribution invariante

Asymptotiquement, la distribution suit un cycle de période 2 entre les deux distributions

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1/8 & , & 0 & , & 3/4 & , & 0 & , & 1/8 &) \\ (& 0 & , & 1/2 & , & 0 & , & 1/2 & , & 0 &) \end{array}$$

Distribution invariante

Asymptotiquement, la distribution suit un cycle de période 2 entre les deux distributions

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1/8 & , & 0 & , & 3/4 & , & 0 & , & 1/8 &) \\ (& 0 & , & 1/2 & , & 0 & , & 1/2 & , & 0 &) \end{array}$$

La moyenne des deux distributions est

$$(\quad 1/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 6/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 1/16 \quad)$$

Distribution invariante

Asymptotiquement, la distribution suit un cycle de période 2 entre les deux distributions

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1/8 & , & 0 & , & 3/4 & , & 0 & , & 1/8 &) \\ (& 0 & , & 1/2 & , & 0 & , & 1/2 & , & 0 &) \end{array}$$

La moyenne des deux distributions est

$$(\quad 1/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 6/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 1/16 \quad)$$

C'est une loi binomiale.

Distribution invariante

Asymptotiquement, la distribution suit un cycle de période 2 entre les deux distributions

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1/8 & , & 0 & , & 3/4 & , & 0 & , & 1/8 &) \\ (& 0 & , & 1/2 & , & 0 & , & 1/2 & , & 0 &) \end{array}$$

La moyenne des deux distributions est

$$(\quad 1/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 6/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 1/16 \quad)$$

C'est une loi binomiale. Elle est invariante :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1/16 & & 4/16 & & 6/16 & & 4/16 & & 1/16 \\ & \searrow^{1} & & {}^{2/4}\swarrow & & \searrow^{2/4} & & {}^{1}\swarrow & \\ & & 4/16 & & & & 4/16 & & \end{array}$$

Distribution invariante

Asymptotiquement, la distribution suit un cycle de période 2 entre les deux distributions

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1/8 & , & 0 & , & 3/4 & , & 0 & , & 1/8 &) \\ (& 0 & , & 1/2 & , & 0 & , & 1/2 & , & 0 &) \end{array}$$

La moyenne des deux distributions est

$$(\quad 1/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 6/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 1/16 \quad)$$

C'est une loi binomiale. Elle est invariante :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1/16 & & 4/16 & & 6/16 & & 4/16 & & 1/16 \\ & {}^{1/4}\swarrow & & \searrow^{3/4} & & {}^{3/4}\swarrow & & \searrow^{1/4} & \\ 1/16 & & 4/16 & & 6/16 & & 4/16 & & 1/16 \end{array}$$

Distribution invariante

Asymptotiquement, la distribution suit un cycle de période 2 entre les deux distributions

$$\begin{array}{ccccccccccc} (& 1/8 & , & 0 & , & 3/4 & , & 0 & , & 1/8 &) \\ (& 0 & , & 1/2 & , & 0 & , & 1/2 & , & 0 &) \end{array}$$

La moyenne des deux distributions est

$$(\quad 1/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 6/16 \quad , \quad 4/16 \quad , \quad 1/16 \quad)$$

C'est une loi binomiale. Elle est invariante :

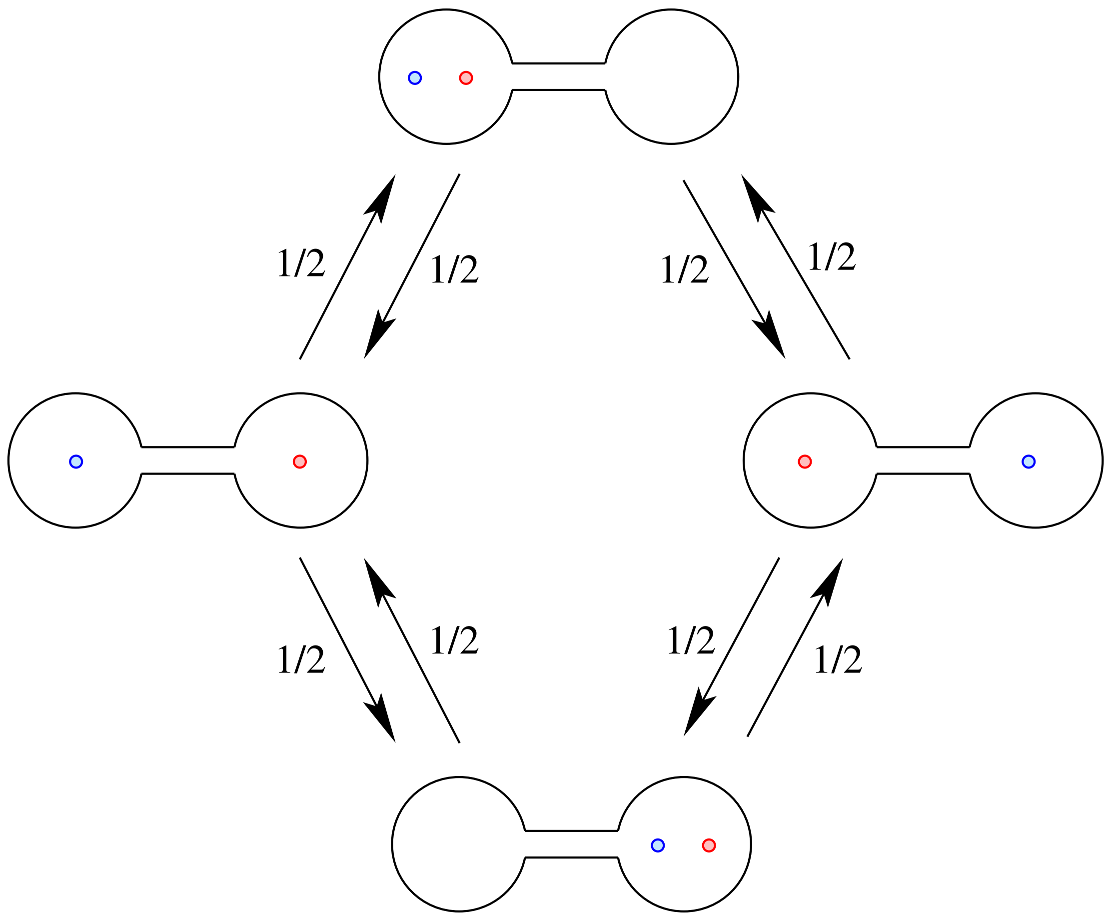
$$\begin{array}{ccccccccc} 1/16 & & 4/16 & & 6/16 & & 4/16 & & 1/16 \\ & {}^{1/4}\swarrow & & \searrow^{3/4} & & {}^{3/4}\swarrow & & \searrow^{1/4} & \\ 1/16 & & 4/16 & & 6/16 & & 4/16 & & 1/16 \end{array}$$

Le même résultat se montre pour N quelconque, en vérifiant

$$C_N^{k-1}\left(1-\frac{k-1}{N}\right)+C_N^{k+1}\frac{k+1}{N}=C_N^k$$

Explication microscopique

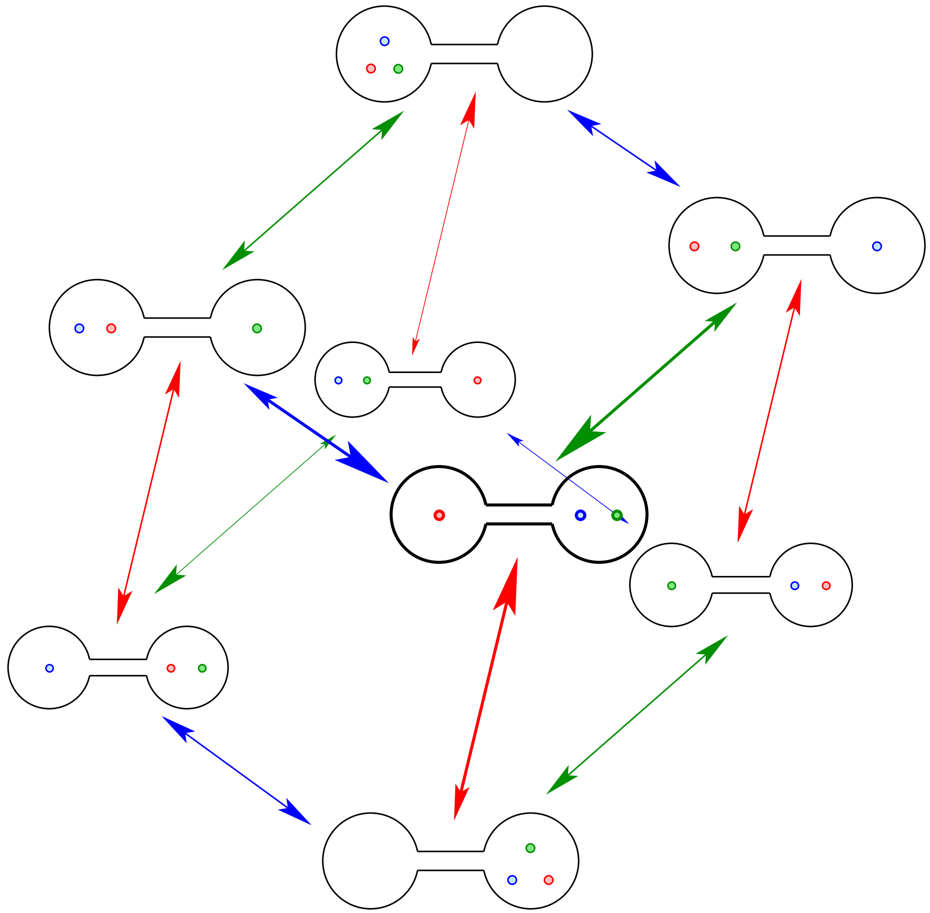
$N = 2$



Par symétrie, si les 4 états microscopiques ont chacun proba $1/4$, alors la distribution est invariante

Explication microscopique

$N = 3$



Par symétrie, si les 8 états microscopiques ont chacun proba $1/8$, alors la distribution est invariante

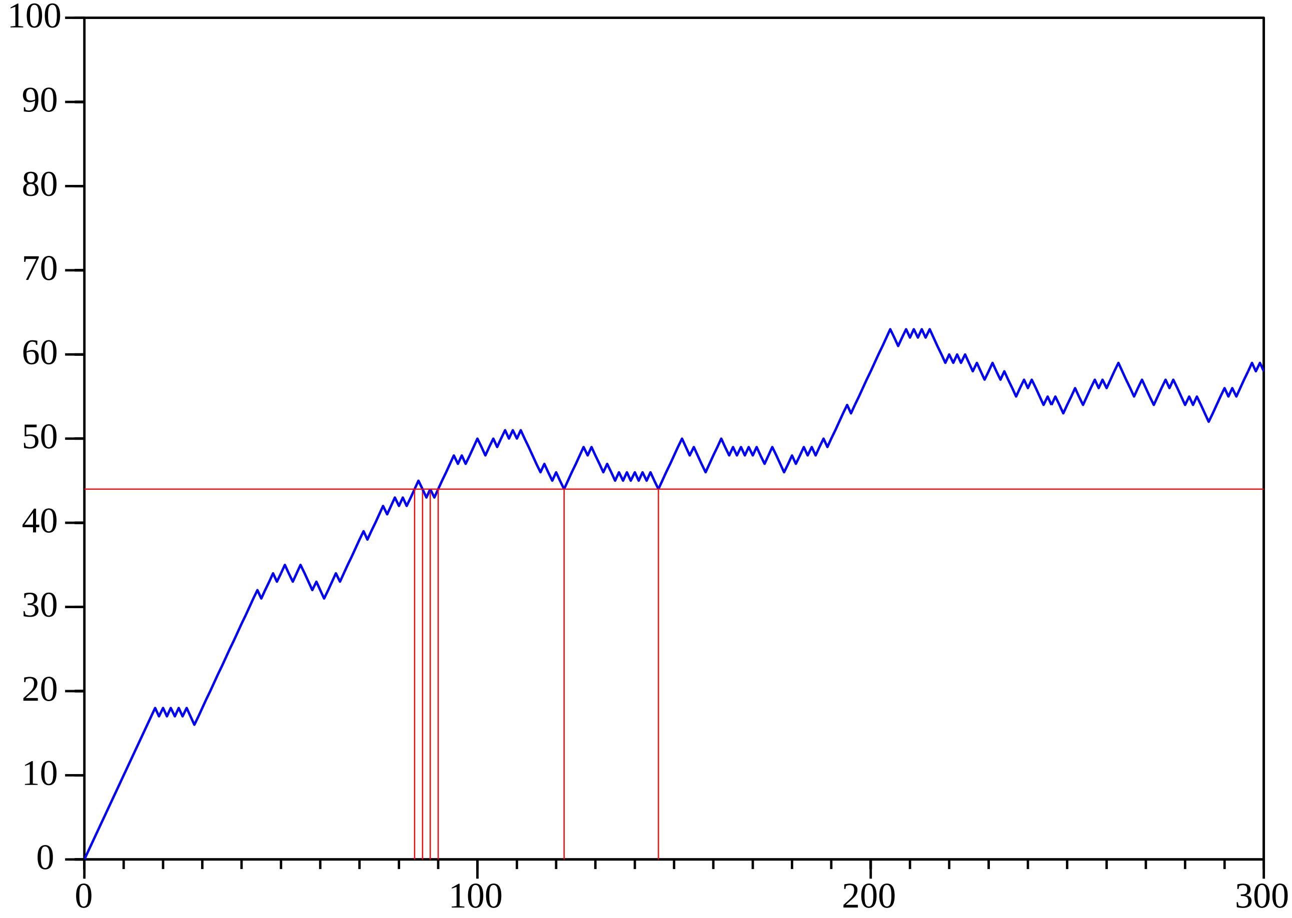
Explication microscopique

$N = 3$

Par symétrie, si les 8 états microscopiques ont chacun proba $1/8$, alors la distribution est invariante

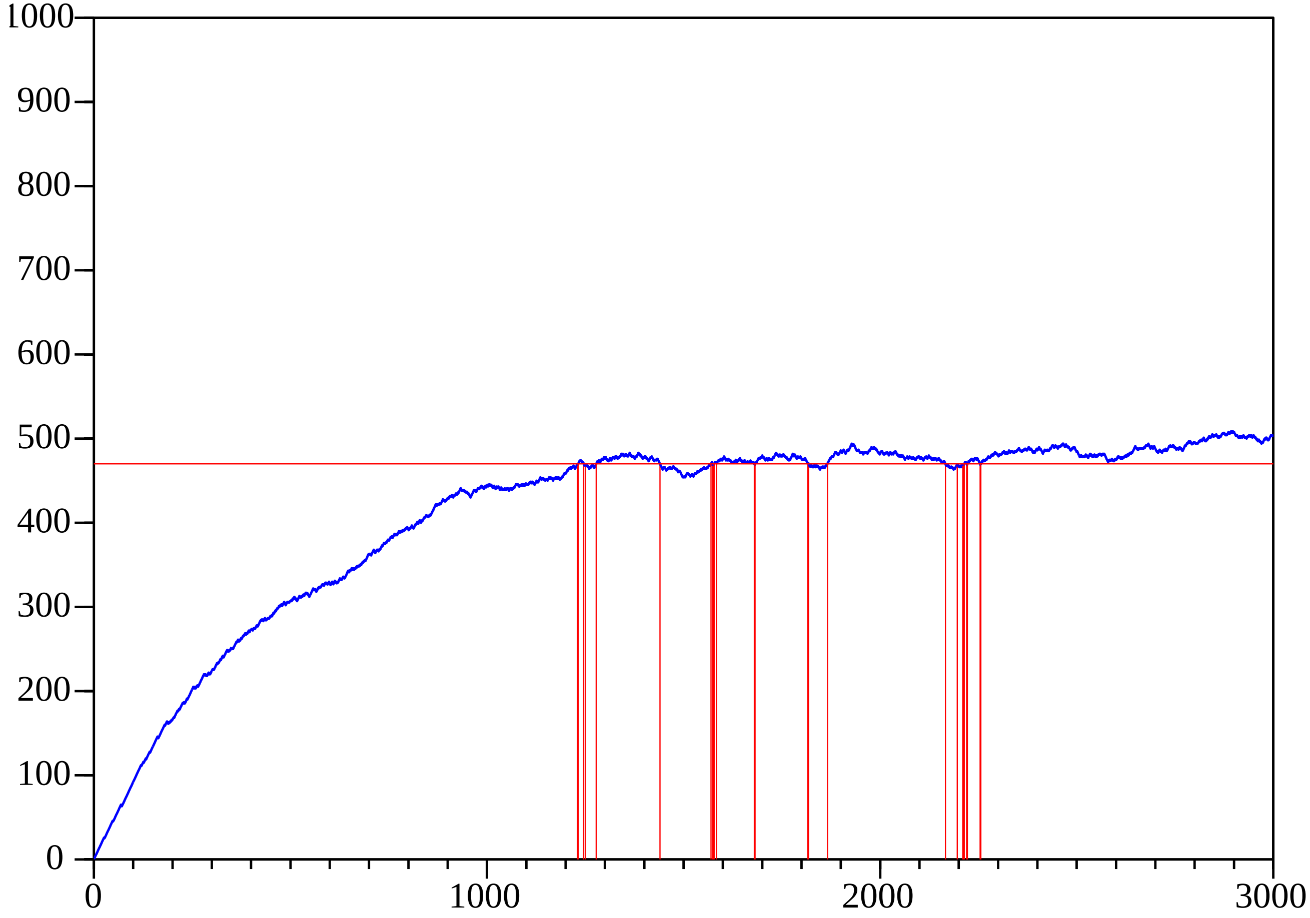
Temps de récurrence moyen

Le temps de récurrence moyen vers l'état k est le temps moyen entre passage consécutifs en k



Temps de récurrence moyen

Le temps de récurrence moyen vers l'état k est le temps moyen entre passage consécutifs en k



Temps de récurrence moyen

Théorème : Si p_k est la valeur en k de la distribution stationnaire, alors le temps de récurrence moyen vers k vaut $1/p_k$.

Temps de récurrence moyen

Théorème : Si p_k est la valeur en k de la distribution stationnaire, alors le temps de récurrence moyen vers k vaut $1/p_k$.

Exemple : Pour $N = 3$, la distribution stationnaire est

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

Le temps de récurrence moyen vers les états 0 et 3 est donc de 8, celui vers les états 1 et 2 est de $8/3$.

Temps de récurrence moyen

Théorème : Si p_k est la valeur en k de la distribution stationnaire, alors le temps de récurrence moyen vers k vaut $1/p_k$.

Exemple : Pour $N = 3$, la distribution stationnaire est

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

Le temps de récurrence moyen vers les états 0 et 3 est donc de 8, celui vers les états 1 et 2 est de $8/3$.

Idée : Prenons $N = 3$ et $k = 0$.
Soit n_i le nombre moyen de visites en i entre deux visites en 0.
Par convention $n_0 = 1$.
On montre alors que la distribution n_i est invariante, donc c'est un multiple de p_i. Comme $n_0 = 1$ on a $n = (1, 3, 3, 1)$.
Le temps de récurrence moyen est alors $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.

Conséquence pour l'irréversibilité

Considérons le modèle d'Ehrenfest avec $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes.
Supposons qu'au temps 0, tous les atomes sont à gauche.
Combien de temps faut-il en moyenne pour que tous les atomes se retrouvent à gauche?

Conséquence pour l'irréversibilité

Considérons le modèle d'Ehrenfest avec $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes. Supposons qu'au temps 0, tous les atomes sont à gauche. Combien de temps faut-il en moyenne pour que tous les atomes se retrouvent à gauche?

Réponse : $1/p_0$, où

$$p_0 = \frac{1}{2^N} C_N^0 = \frac{1}{2^N} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{p_0} = 2^N$$

Conséquence pour l'irréversibilité

Considérons le modèle d'Ehrenfest avec $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes. Supposons qu'au temps 0, tous les atomes sont à gauche. Combien de temps faut-il en moyenne pour que tous les atomes se retrouvent à gauche?

Réponse : $1/p_0$, où

$$p_0 = \frac{1}{2^N} C_N^0 = \frac{1}{2^N} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{p_0} = 2^N$$

On a $2^{10} = 1024 \simeq 10^3$

donc $2^{6 \cdot 10^{23}} = (2^{10})^{6 \cdot 10^{22}} \simeq 10^{18 \cdot 10^{22}}$

Conséquence pour l'irréversibilité

Considérons le modèle d'Ehrenfest avec $N = 6 \cdot 10^{23}$ atomes. Supposons qu'au temps 0, tous les atomes sont à gauche. Combien de temps faut-il en moyenne pour que tous les atomes se retrouvent à gauche?

Réponse : $1/p_0$, où

$$p_0 = \frac{1}{2^N} C_N^0 = \frac{1}{2^N} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{p_0} = 2^N$$

On a $2^{10} = 1024 \simeq 10^3$

donc $2^{6 \cdot 10^{23}} = (2^{10})^{6 \cdot 10^{22}} \simeq 10^{18 \cdot 10^{22}}$

En comparaison : 1 année $\simeq 3 \cdot 10^7$ secondes

Age de l'univers : 10^{10} ans $\simeq 3 \cdot 10^{17}$ secondes

Conclusion : Même si en théorie, tous les atomes reviendront un jour tous dans la moitié de gauche, ce n'est pas demain la veille.