L'intégrabilité de Full Kostant-Toda périodique pour toute algèbre de Lie simple (arXiv:1102.0036v1)

Khaoula Ben Abdeljelil

Université d'Orléans

Orléans, 03 février 2011

Système hamiltonien

Système hamiltonien symplectique

Définition

Un système d'équations différentielles $(\mathcal{S})$ est dit hamiltonien s'il est donné par les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

L'hamiltonien $H = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ est conservé au cours du temps (Exemple : l'énergie totale).

Définition

Soit M une variété (réelle ou complexe) et soit Π un champ de bivecteurs sur M. On dit que Π est une *structure de Poisson* sur M si, pour tout ouvert U de M, la bidérivation antisymétrique définie, pour tous $F, G \in \mathcal{F}(U)$ et $m \in U$, par :

$$\{F, G\}(m) := \Pi_m(\mathrm{d}_m F, \mathrm{d}_m G) \tag{2}$$

satisfait *l'identité de Jacobi*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0, \quad \forall F, G, H \in \mathcal{F}(U).$$

Le premier crochet de Poisson : Structure symplectique

Soit $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ un système de coordonnées sur $\mathbf{R}^{2n}$. Poisson a défini le crochet de Poisson par

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}. \qquad (3)$$

Pour tout hamiltonien $H \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$, on introduit

$$\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

On retrouve les équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_j & = & \mathcal{X}_H[q_j] = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j & = & \mathcal{X}_H[p_j] = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n.$$

Système Hamiltonien (Poisson)

Soit $(\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\})$ l'espace de phases d'un système d'équations différentielles $(\mathcal{S})$

Définition

$(\mathcal{S})$ est dit hamiltonien s'il existe une fonction H sur $\mathcal{T}$, telle que

$$\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\} \text{ représente le système } (\mathcal{S})$$

Intégrabilité de $(\mathcal{S})$ au sens de Liouville

Soit $(\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\})$ une variété de Poisson
$H \in \mathcal{F} = (F_1, \dots, F_s) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$.
Si

- $\mathcal{F}$ est involutive pour $\{\cdot\,,\cdot\}$.
- $\mathcal{F}$ est indépendante sur $\mathcal{T}$.
- $\mathrm{card}(\mathcal{F}) = \dim\,\mathcal{T} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Rk}\,\{\cdot\,,\cdot\}$.

On dit que $(\mathcal{T}, \{\cdot\,,\cdot\}\,, \mathcal{F})$ est Liouville intégrable.

Le réseau de Toda

Le réseau de Toda est le système hamiltonien associé à

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \exp[2(q_k - q_{k+1})]$$

pour la structure de Poisson symplectique.

Équation de mouvement

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_j, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 2\exp[2(q_{j-1}-q_j)]-2\exp[2(q_j-q_{j+1})],$$

$1 \leq j \leq n$, avec

$$q_0 = -\infty \qquad \text{et} \qquad q_{n+1} = +\infty.$$

Transformation de Flashka

On fait le changement de variable

$$\begin{aligned} a_k &= \exp[2(q_k - q_{k+1})], & 1 \leq k \leq n-1, \\ b_j &= p_j, & 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Le système est hamiltonien pour

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

et pour une structure de Poisson linéaire.

Nouvelle équation de mouvement

$$\begin{aligned} \dot{a}_j &= 2(b_j - b_{j+1})a_j, & 1 \leq j \leq n-1, \\ \dot{b}_k &= 2(a_{k-1} - a_k), & 1 \leq k \leq n, \end{aligned}$$

par convention, $a_0 = a_n = 0$.

Formulation de Lax

Théorème

L'équation de mouvement du réseau de Toda est donnée par l'équation (dite de Lax) suivante :

$$\dot{L} = [L, M] = LM - ML$$

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix},$$

$M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$ est la partie triangulaire strictement inférieure de la matrice L.

Le hamiltonien devient

$$H(L) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}(L^2)$$

Intérêts de cette formulation

- Les fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ sont des constantes de mouvement. C'est en particulier le cas des fonctions

$$H_i(L) = \frac{1}{i+1} \operatorname{Trace}(L^{i+1}), \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

- Fait apparaître une structure de Poisson sur l'espace de phases $\mathcal{T}$ du réseau de Toda.

Généralités

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, munie d'une forme $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ bilinéaire, symétrique, non-dégénérée

- **Crochet de Lie-Poisson :** Le crochet de Lie usuel donne une structure de Poisson appelée le crochet de Lie-Poisson et définie par

$$\{F, G\}(x) = \langle x \,|\, [\nabla_x F, \nabla_x G] \rangle . \tag{4}$$

- *R*-**crochet de Poisson :** Soit R un endomorphisme de $\mathfrak{g}$. Si, pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ le crochet $[x, y]_R = \frac{1}{2}([Rx, y] + [x, Ry])$ est de Lie alors $\mathfrak{g}$ est munie d'un nouveau crochet de Lie-Poisson appelé le R-crochet de Poisson, défini par

$$\{F, G\}_R(x) = \langle x \,|\, [\nabla_x F, \nabla_x G]_R \rangle \tag{5}$$

- **Cas particulier :** $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$,

$$[x, y]_R = [x_+, y_+] - [x_-, y_-] \tag{6}$$

Théorème de Adler-Kostant-Symes

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ une décomposition d'algèbre de Lie et soit $R = P_+ - P_-$ la différence des projections sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. On suppose $\mathfrak{g}$ munie d'une forme bilinéaire symétrique, Ad-invariante, non-dégénérée $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soient F et H deux fonctions Ad-invariantes sur $\mathfrak{g}$.

- Les fonctions F et H commutent pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_R$;
- Le champ hamiltonien de H pour $\{\cdot\,,\cdot\}_R$ est donné par

$$\mathcal{X}_H(y) = \pm[y, (\nabla_y H)_\mp], \tag{7}$$

pour tout $y \in \mathfrak{g}$.

Théorème

Le réseau de Toda est hamiltonien

Preuve :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C}) = \mathfrak{g}_{\Delta_\geq} \oplus \mathfrak{g}_{\Delta_<} \qquad R = P_{\Delta_\geq} - P_{\Delta_<}$$

$\Rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ est munie d'un R-crochet de Poisson.

- $\mathcal{T}$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g}, \{\cdot\,,\cdot\}_R)$
- La fonction $H(X) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}(X^2)$ est l'hamiltonien du système :

$$\mathcal{X}_H(L) = [L, L_-].$$

Théorème

Le réseau de Toda est Liouville intégrable

Preuve :

- Le théorème (AKS) prouve l'involutivité de

$$\mathcal{F} = (\mathrm{Trace}\, L^2, \mathrm{Trace}\, L^3, \ldots, \mathrm{Trace}\, L^n).$$

- $\mathcal{F}$ est indépendante sur $\mathcal{T}$ (determinant de Vandermonde).
- $\mathrm{card}\, \mathcal{F} = \dim \mathcal{T} - \frac{1}{2} \mathrm{Rk} \{\cdot\,,\cdot\}_R$

Le réseau de Toda périodique

Le réseau de Toda périodique est le système hamiltonien associé à

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{k=1}^{n} \exp[2(q_k - q_{k+1})]$$

pour la structure de Poisson symplectique. (Condition de périodisité est equivalente à $\forall j \in \mathbf{N}, \quad q_{n+j} = q_j$).

Équation de mouvement

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_j, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 2\exp[2(q_{j-1}-q_j)] - 2\exp[2(q_j - q_{j+1})],$$

$$q_{n+j} = q_j, \qquad \forall j \in \mathbf{N}.$$

Transformation de Flashka

On fait le changement de variable

$$\begin{array}{rcl} a_j & = & \exp[2(q_j - q_{j+1})], \\ b_j & = & p_j, \end{array}$$

Le système est hamiltonien pour

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j$$

et pour une structure de Poisson linéaire.

Nouvelle équation de mouvement

$$\begin{aligned} \dot{a}_j &= 2(b_j - b_{j+1})a_j, \\ \dot{b}_j &= 2(a_{j-1} - a_j), \end{aligned}$$

par convention, $a_0 = a_n$ et $bn + 1 = b_1$.

Formulation de Lax

Théorème

L'équation de mouvement du réseau de Toda est donnée par l'équation (dite de Lax) suivante :

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n\lambda^{-1} \\ a_1 & b_2 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & a_{n-2} & b_{n-1} & 1 \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M(\lambda)} = -2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n\lambda^{-1} \\ a_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

tels que

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 0, \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k \neq 0.$$

L'hamiltonien devient

$$H(L) = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}((L(\lambda))^2)$$

Théorème : Le triplet $(\mathcal{T}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_R, \mathcal{F}_\lambda)$ est Liouville intégrable :

- L'espace de phases du réseau de Toda périodique $\mathcal{T}_\lambda$ est une sous-variété de Poisson de $(\mathfrak{g} \otimes [\lambda, \lambda^{-1}], \{\cdot\,,\cdot\}_R)$.
- La famille $\mathcal{F}_\lambda = (H_1, \ldots, H_{n-1})$ est, involutive pour le crochet $\{\cdot\,,\cdot\}_R$ et indépendante sur $\mathcal{T}_\lambda$.
- Le rang de $\{\cdot\,,\cdot\}_R$ sur $\mathcal{T}_\lambda$ est $2n-2$

Le réseau de Full Kostant-Toda sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$

Définition :

Le réseau de Full Kostant-Toda est le système d'équations différentiells donné par l'équation de Lax

$$\dot{L} = [L, L_-],$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$$

et L_- est la partie triangulaire strictement inférieure de L.

Théorème :

Le réseau de Full Kostant-Toda est intégrable (Deift, Li, Nanda, Tomei).

Les fonctions k-chops forment le système intégrable :

$$F_{rk}(L) = \frac{E_{rk}(L)}{E_{0k}(L)} \qquad \text{et} \qquad F_{rk}(M) = \frac{E_{rk}(M)}{E_{0k}(M)},$$

$0 \leq k \leq [\frac{1}{2}n]$ et $0 \leq r \leq n - 2k$, avec

$$\det(X - \lambda I)_k = \sum_{r=0}^{n-2k} E_{rk}(X)\lambda^{n-2k-r}.$$

Le réseau de Full Kostant-Toda périodique sur $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$

Définition :

Le réseau de Full Kostant-Toda périodique est le système d'équations différentiells donné par l'équation de Lax

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), L(\lambda)_-],$$

où $L(\lambda) =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 1+b_{12}\lambda^{-1} & b_{13}\lambda^{-1} & \cdots & b_{1n}\lambda^{-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_{n-2,n}\lambda^{-1} \\ a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \ddots & 1+b_{n-1,n}\lambda^{-1} \\ a_{n1}+\lambda & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et

$$L(\lambda)_- = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}\lambda^{-1} & \cdots & b_{1n}\lambda^{-1} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1,n}\lambda^{-1} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

A morphisme prés ce système est un cas particulier des systèmes donnés par van Moerbeke et Mumford, qui ont montré l'intégrabilité de ces systèmes en donnant les solutions.

Notations :

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie de rang ℓ, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sa forme de Killing, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$;
- Φ le système de racines de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{h}$, Φ_+ l'ensemble des racines positives et β la plus longue racine de Φ ;
- $\Pi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ une base de Φ et $(h_1, \ldots, h_\ell)$ les coracines de Π ;
- $\forall \alpha$ dans Φ, e_α un vecteur propre non nul associé à α ($\forall 1 \leq i \leq \ell$, on écrira e_i lorsque la racine est α_i) ;
- pour tout $k \neq 0$, on définit $\mathfrak{g}_k = \mathrm{vect}\{e_\alpha \mid \alpha \in \Phi, |\alpha| = k\}$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ et on note

$$\mathfrak{g}_{<k} := \bigoplus_{i<k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\leq k} := \bigoplus_{i\leq k} \mathfrak{g}_i$$
$$\mathfrak{g}_{>k} := \bigoplus_{i>k} \mathfrak{g}_i, \qquad \mathfrak{g}_{\geq k} := \bigoplus_{i\geq k} \mathfrak{g}_i.$$

Le réseau de Full Kostant-Toda périodique

Définition

L'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique $\mathcal{T}_\lambda$ est

$$\mathcal{T}_\lambda := \lambda^{-1}\mathfrak{g}_{>0} + (\mathfrak{g}_{\leq 0} + \sum_{i=1}^{\ell} e_i) + \lambda e_{-\beta}.$$

Tout élément $L(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda$ est donc de la forme

$$L(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + \sum_{i=1}^{\ell}(a_i h_i + e_i) + \sum_{\alpha\in\Phi_+} a_{-\alpha}e_{-\alpha} + \lambda^{-1}\sum_{\alpha\in\Phi_+} b_\alpha e_\alpha$$

Définition

Le réseau de Full Kostant-Toda périodique, associé à $\mathfrak{g}$, est le système d'équations différentielles sur $\mathcal{T}_\lambda$ donné sous la forme de l'équation de Lax :

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), L(\lambda)_-],$$

où

$$L(\lambda)_- = \sum_{\alpha \in \Phi_+} a_{-\alpha} e_{-\alpha} + \lambda^{-1} b_\alpha e_\alpha,$$

Décomposition de l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_-,$$

avec

$$\tilde{\mathfrak{g}}_+ := \bigoplus_{i \geq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i, \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_- := \bigoplus_{i < 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i$$

où

$$\tilde{\mathfrak{g}}_i := \langle \lambda^k e_\alpha, \ \text{tel que } |\alpha| + (|\beta| + 1)k = i, \ \text{où } \alpha \in \Phi, k \in \mathbf{Z} \rangle.$$

Structure de Poisson sur l'algèbre de lacets $\tilde{\mathfrak{g}}$

- Soient $\tilde{P}_\pm$ la projection de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}_\pm$ et

$$\tilde{R} := \tilde{P}_+ - \tilde{P}_-,$$

- Soit

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot \mid \cdot \rangle_\lambda : & \tilde{\mathfrak{g}} \times \tilde{\mathfrak{g}} & \to & \mathbf{C} \\ & (X(\lambda), Y(\lambda)) & \mapsto & \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle X_k \mid Y_{-k} \rangle , \end{array}$$

- Soit $\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}})$ l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ (l'espace formée par toutes les formes linéaires, qui sont nulles sur tous les $\tilde{\mathfrak{g}}_i$ sauf sur un nombre fini d'entre eux).

Alors $\tilde{\mathfrak{g}}$ est munie de la structure de Poisson, donnée par :

$$\{F, G\}_{\tilde{R}}(x(\lambda)) = \left\langle x(\lambda) \mid [\nabla_{x(\lambda)} F, \nabla_{x(\lambda)} G]_{\tilde{R}} \right\rangle_\lambda$$

Théorème

Le réseau de Full Kostant-Toda périodique est un système hamiltonien :

- L'espace de phases du réseau de Full Kostant-Toda périodique $\mathcal{T}_\lambda$ hérite d'une structure de Poisson de $(\mathcal{F}(\tilde{\mathfrak{g}}), \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$. (Idée $\mathcal{T}_\lambda := \bigoplus_{-|\beta|\leq i\leq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_i + f$, où $f := \sum_{i=1}^{\ell} e_i + \lambda e_{-\beta} \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$)
- Soit H la fonction de $\tilde{\mathfrak{g}}$ définie en tout point par :

$$H(L(\lambda)) := \frac{1}{2}\langle L(\lambda) \,|\, L(\lambda)\rangle_\lambda.$$

L'équation du champ hamiltonien $\mathcal{X}_H := \{\cdot\,, H\}_{\tilde{R}}$ sur $\mathcal{T}_\lambda$ est l'équation décrit le mouvement du réseau de Full Kostant-Toda périodique.

Un nombre infini de fonctions en involution susceptible de donner l'intégrabilité du réseau de Full Kostant-Toda périodique

Soient $P_1, \ldots, P_\ell$ les ℓ polynômes sur $\mathfrak{g}$, Ad-invariants et indépendants de degrés $m_1 + 1, \ldots, m_\ell + 1$, tels que définis dans le. Chaque P_i s'étend sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ en une fonction $\tilde{P}_i$ à valeurs dans $\mathbf{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$, chacune de ces fonctions est une fonction Ad-invariante de $\tilde{\mathfrak{g}}$ à valeurs dans $\mathbf{C}[\lambda]$, donc chaque coefficient en λ est une fonction Ad-invariante sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ à valeur dans $\mathbf{C}$ $\Longrightarrow$ d'après le théorème AKS ils sont en involution pour le $\tilde{R}$-crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$.

$\Longrightarrow$ Tous les coefficients des Hamiltoniens $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_\ell$ sont des constantes de mouvement du réseau de Full Kostant-Toda périodique.

Construction du système intégrable

Proposition :

Pour $i = 1, \ldots, \ell$, la restriction de $\tilde{P}_i$ à $\mathcal{T}_\lambda$, s'écrit, pour tout $L(\lambda) \in \mathcal{T}(\lambda)$ sous la forme :

$$\tilde{P}_i(L(\lambda)) = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \tilde{F}_{k,i}(L(\lambda)) + \lambda\, c\, \delta_{i,\ell}, \qquad c \in \mathbf{C}^*.$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_\lambda := (\tilde{F}_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell, \;\; 0 \leq k \leq m_i).$$

On a $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est invoutive pour $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$. Il faut alors montrer que

- $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante sur $\mathcal{T}_\lambda$.
- $\mathrm{card}\,\tilde{\mathcal{F}}_\lambda = \dim \mathcal{T}_\lambda - \frac{1}{2}\,\mathrm{Rk}(\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}, \mathcal{T}_\lambda)$

Proposition

$\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ est indépendante sur $\mathcal{T}_\lambda$

Preuve :

- On montre que :

$$\sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \left\langle \mathrm{d}_{L_1(\lambda)} \tilde{F}_{k,i}, a(\lambda) \right\rangle = \sum_{k=0}^{m_i} \lambda^{-k} \left\langle \frac{\partial \tilde{H}_{k,i}}{\partial X}(h+e,e), A \right\rangle + \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} \left\langle \mathrm{d}^{k+1}_{h+(1+\lambda^{-1})e} \tilde{P}_i, ((e_{-\beta})^k, B) \right\rangle .$$

- La famille $(\frac{\partial \tilde{H}_{0,i}}{\partial X}(h',e), \ldots, \frac{\partial \tilde{H}_{m_i,i}}{\partial X}(h',e), \quad 1 \leq i \leq \ell)$ vérifie les hypothèses du théorème de Raïs.

$\Longrightarrow$ L'indépendance de $\tilde{\mathcal{F}}_\lambda$ sur $\mathcal{T}_\lambda$.

Théorème de Raïs

Soient $P_1, \ldots, P_\ell$ des polynômes sur $\mathfrak{g}$, Ad-invariants, indépendants de degré respectivement $m_1, \ldots, m_\ell$. Soient e et h deux éléments de $\mathfrak{g}$, tels que e est régulier et $[h, e] = 2e$.
On note $V_{k,i}$, pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et $0 \leq k \leq m_i$, l'élément de $\mathfrak{g}$ défini, pour tout $z \in \mathfrak{g}$, par :

$$\langle V_{k,i} \,|\, z \rangle = \left\langle \mathrm{d}_h^{k+1} P_i, (e^k, z) \right\rangle .$$

- La famille $\mathcal{F}_0 := (V_{k,i}, 1 \leq i \leq \ell \text{ et } 0 \leq k \leq m_i)$ est linéairement indépendante.
- Le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}_0$ est la sous-algèbre de Lie formée par la somme des sous-espaces propres de ad_h associés aux valeurs propres positives ou nulles.

Rang du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson sur $\mathcal{T}^2$

Proposition

Le rang du $\mathcal{R}$-crochet de Poisson est égal à $\dim \mathfrak{g} - \ell$.

En effet,

- Sur $\mathcal{T}_\lambda$ les fonctions $\tilde{F}_{m_1,1}, \ldots, \tilde{F}_{m_\ell,\ell}$ sont ℓ Casimirs indépendants. Ce qui implique que $\mathrm{Rk}(\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}, \mathcal{T}_\lambda)$ est inférieur ou égal à $\dim \mathfrak{g} - \ell$.
- On montre que le rang du crochet de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}$ est égal à $\dim \mathfrak{g} - \ell$ au point $L_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell}(1 + \lambda^{-1} b_i) e_i + \leq_{-\beta}$ (dans la preuve de ce point on étudie séparément le cas $\mathcal{A}_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell, C_\ell$ et on montre à l'aide de Maple les cas exceptionnelles).

Le nombre exact de fonctions

- $\operatorname{card} \tilde{\mathcal{F}}_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell$
- or $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - \ell)$
- donc $\operatorname{card} \mathcal{F} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \ell) = \dim \mathcal{T}_\lambda - \frac{1}{2} \operatorname{Rk}(\{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}, \mathcal{T}_\lambda)$.

Théorème

Le triplet $(\mathcal{T}_\lambda, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}, \tilde{\mathcal{F}}_\lambda)$ est intégrable au sens de Liouville.

Entre le réseau de Toda périodique et le réseau de Full Kostant-Toda périodique

On construit, pour tout k entre 1 et m_ℓ le système d'équations différentielles défini par l'équation de Lax

$$\dot{L}^{(k)}(\lambda) = [L^{(k)}(\lambda), L^{(k)}(\lambda)_-], \forall 1 < k < m_\ell,$$

où $L^{(k)}(\lambda)$ est un élément de l'espace de phases

$$\mathcal{T}_\lambda^{(k)} := \lambda e_{-\beta} + \mathfrak{h} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathfrak{g}_{-j} + \lambda^{-1} \mathfrak{g}_{m_\ell + 1 - j}$$

et $L^{(k)}(\lambda)\_$ est la partie strictement inférieure de $L^{(k)}(\lambda)$.

example

Lorsque $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ et $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre de Lie formée par les matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, un élément $L^{(k)}(\lambda)$ de $\mathcal{T}_\lambda^{(k)}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda^{-1}a_{1,n-k+1} & \dots & \dots & \lambda^{-1}a_{1,n} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & \lambda^{-1}a_{k,n} \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\
a_{k+1,1} & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & 1
\end{pmatrix}.$$

Bonne candidates pour l'intégrabilité

$$\tilde{F}_{\lambda}^{(k)} = (\tilde{F}_{j,i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant, \quad 1 \leqslant j \leqslant E(k\frac{m_i+1}{m_\ell+1}).$$

On a vérifié par Maple que dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$ avec $n = 2, \ldots, 7$, et pour l'algèbre de Lie de type B_n pour $n = 2, \ldots, 6$ pour tout les valeurs possibles de k.
Pour tout ces cas, nous vérifions à l'aide de Maple que :

$$\mathrm{Rk}(\mathcal{T}_{\lambda}^{(k)}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}) = \dim \mathcal{T}_{\lambda}^{(k)} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Rk}(\mathcal{T}_{\lambda}^{(k)}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}}).$$

Conjecture

Le triplet $(\mathcal{T}_\lambda^{(k)}, \tilde{\mathcal{F}}_\lambda^{(k)}, \{\cdot\,,\cdot\}_{\tilde{R}})$ est un système intégrable.

Les difficultés :

- L'indépendance : On ne peut pas appliquer le théorème de Rais. En effet avec Maple on a démontré l'indépendance au point $L_0(\lambda) = \lambda e_{-\beta} + e + \sum_{i=1}^{\ell} b_i h_i + \sum_{i=1}^{d_k} a_i e_{-\gamma_i} + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{d_{m_\ell+1-k}} c_i e_{\eta_i}$, où $\gamma_1, \ldots, \gamma_{d_k}$ sont les d_k racines de $\mathfrak{g}$ de longueur k et $\eta_1, \ldots, \eta_{d_{m_\ell+1-k}}$ sont les $d_{m_\ell+1-k}$ racines de $\mathfrak{g}$ de longueur $m_\ell + 1 - k$.
- Le rang du crochet de Poisson sur $\mathcal{T}_\lambda^{(k)}$) ; par exemple pour les Casimirs on sait qu'ils sont parmis $\tilde{F}_{E(k\frac{m_i+1}{m_\ell+1}),i}$.

Par exemple, pour $k = 1$, uniquement un Casimir (pour $i = \ell$), par contre pour le réseau de Full Kostant-Toda périodique, toutes ces fonctions $F_{m_i,i}$ pour $i = 1, \ldots, \ell$ sont Casimirs. Mais on n'a pas une formule générale : dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{C})$, $n = 7$ et $k = 2$, respectivement $k = 3$, (cas où la Liouville intégrabilité peut se prouver par Maple), les Casimirs fonctions sont $F_{3,1}, F_{6,2}$, respectivement $F_{2,1}, F_{4,2}, F_{6,3}$.