

# EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES SINGULIÈREMENT PERTURBÉES

Habilitation à Diriger des Recherches  
Spécialité Mathématiques

Présentée à l'Université de Toulon et du Var par

Nils BERGLUND

Soutenue le 22 janvier 2004

Acceptée sur proposition du jury:

Gérard BEN AROUS	Courant Institute	Rapporteur
Anton BOVIER	Weierstraß-Institut	Rapporteur
Jean-François LE GALL	Ecole Normale Supérieure	
Etienne PARDOUX	Université de Provence	Président
Pierre PICCO	C.N.R.S.	
Claude-Alain PILLET	Université de Toulon et du Var	
Lawrence E. THOMAS	University of Virginia	Rapporteur



## Résumé

Nous considérons des systèmes d'équations différentielles stochastiques faisant intervenir deux échelles de temps bien distinctes. Nous commençons par établir, dans un cadre général, des propriétés de concentration des trajectoires au voisinage des variétés lentes du système déterministe correspondant. Nous étudions ensuite la dynamique au voisinage de points de bifurcation de la variété lente, en particulier dans le cas d'une bifurcation noeud-col et d'une bifurcation fourche. Les phénomènes apparentés de la résonance stochastique et de l'hystérésis dynamique sont également étudiés en détail. Finalement, nous dérivons la loi des temps de passage à travers une orbite périodique instable, pour une famille d'équations qui ne sont pas limitées au cas d'échelles de temps distinctes.

## Abstract

We consider systems of stochastic differential equations involving two well-separated time scales. We start by establishing, in a general setting, concentration properties of sample paths in a neighbourhood of the slow manifolds of the system's deterministic counterpart. We then study the dynamics in the neighbourhood of a bifurcation point of the slow manifold, in particular in the cases of a saddle-node and of a pitchfork bifurcation. The related phenomena of stochastic resonance and dynamical hysteresis are also studied in detail. Finally, we derive the law of first-passage times through an unstable periodic orbit, for a family of equations which are not limited to the case of well-separated time scales.



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier les membres de mon jury: Anton Bovier, Gérard Ben Arous, et Larry Thomas, qui ont bien voulu consacrer une partie de leur temps à la lecture de ce mémoire et à la rédaction d'un rapport; Etienne Pardoux, qui a accepté d'assumer la présidence du jury, ainsi que Jean-François Le Gall, Pierre Picco et Claude-Alain Pillet.

Les travaux résumés ici ont été élaborés durant mes séjours dans diverses institutions, auxquelles j'aimerais exprimer ma reconnaissance pour leur hospitalité: le Weierstraß-Institut de Berlin, le Département de Physique du Georgia Institute of Technology, à Atlanta, le Département de Mathématiques de l'ETH de Zurich, le Centre de Physique Théorique de Marseille-Luminy, ainsi que le Département de Mathématiques de l'Université de Toulon et du Var (qui, aux dernières nouvelles, s'appelle maintenant Université du Sud Toulon-Var).

Merci, finalement, à Barbara pour une collaboration scientifique agréable et fructueuse.

La Garde, le 25 janvier 2004



## Avant-propos

Ce mémoire, rédigé pour la soutenance d'une Habilitation à Diriger les Recherches, est basé principalement sur les publications suivantes (reproduites en annexe dans la version imprimée):

1. Nils Berglund et Barbara Gentz, *Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise*, Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 3, 341–388.
2. Nils Berglund et Barbara Gentz, *A sample-paths approach to noise-induced synchronization: Stochastic resonance in a double-well potential*, Ann. Appl. Probab. **12** (2002), 1419–1470.
3. Nils Berglund et Barbara Gentz, *The effect of additive noise on dynamical hysteresis*, Nonlinearity **15** (2002), no. 3, 605–632.
4. Nils Berglund et Barbara Gentz, *Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations*, J. Differential Equations **191** (2003), 1–54.
5. Nils Berglund et Barbara Gentz, *On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit I: Two-level model* (2003), J. Statist. Phys. **114** (2004), 1577–1618.

Il fait également référence aux articles ci-dessous:

6. Nils Berglund et Hervé Kunz, *Memory effects and scaling laws in slowly driven systems*, J. Phys. A **32** (1999), no. 1, 15–39.
7. Nils Berglund, *Control of dynamic Hopf bifurcations*, Nonlinearity **13** (2000), no. 1, 225–248.
8. Nils Berglund et Barbara Gentz, *Beyond the Fokker–Planck equation: Pathwise control of noisy bistable systems*, J. Phys. A **35** (2002), no. 9, 2057–2091.
9. Nils Berglund et Barbara Gentz, *Metastability in simple climate models: Pathwise analysis of slowly driven Langevin equations*, Stoch. Dyn. **2** (2002), 327–356.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Echelles de temps . . . . .	1
1.2	Plan du travail . . . . .	1
1.3	Perspectives . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Systèmes singulièrement perturbés déterministes</b>	<b>3</b>
2.1	Variétés lentes . . . . .	4
2.2	Bifurcations dynamiques . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Effet du bruit au voisinage de variétés stables</b>	<b>8</b>
3.1	Concentration des trajectoires . . . . .	8
3.2	Réduction de la dynamique . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Effet du bruit sur les bifurcations dynamiques</b>	<b>11</b>
4.1	Réduction de la dynamique . . . . .	12
4.2	Bifurcation noeud-col . . . . .	13
4.3	Bifurcation fourche . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Résonance stochastique</b>	<b>17</b>
5.1	Quelques résultats antérieurs . . . . .	17
5.2	Description des trajectoires . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Hystérésis dynamique</b>	<b>21</b>
6.1	Cas déterministe . . . . .	22
6.2	Cas stochastique . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Passage à travers une orbite périodique instable</b>	<b>24</b>
7.1	Le problème de sortie pour une diffusion . . . . .	24
7.2	Modèle à deux niveaux . . . . .	25



## 1 Introduction

Il arrive fréquemment qu'un système dynamique, décrit par une équation différentielle ordinaire (EDO), fasse intervenir plusieurs échelles de temps caractéristiques. Lorsque deux échelles de temps très différentes sont présentes, le système est appelé *rapide–lent*, et peut être étudié à l'aide de la théorie des perturbations singulières. Les cas les plus simples pouvant se présenter sont les suivants:

- Si le système rapide–lent admet une variété lente asymptotiquement stable, toutes les solutions voisines de cette variété sont rapidement attirées par elle, et le système peut être décrit par un système réduit, ne faisant intervenir que des variables lentes.
- Si la variété lente admet des points de bifurcation, où elle cesse d'être asymptotiquement stable, des phénomènes nouveaux peuvent apparaître: le système peut avoir à choisir parmi plusieurs variétés stables nouvellement formées, ou au contraire, effectuer une transition rapide vers une autre région de l'espace de phase, donnant lieu à des oscillations de relaxation ou à des cycles d'hystérésis.

Si l'on veut comprendre l'effet d'un bruit sur ces systèmes, on est amené à étudier des équations différentielles stochastiques (EDS) singulièrement perturbées.

### 1.1 Echelles de temps

Une EDS singulièrement perturbée fait intervenir au moins trois échelles de temps:

- le temps de relaxation du système rapide;
- le temps caractéristique du système lent;
- le temps de vie métastable du système rapide, c'est-à-dire le temps moyen entre transitions dues au bruit entre les variétés stables du système déterministe (aussi appelé temps de Kramers).

Le choix de la méthode utilisée pour décrire la dynamique de l'EDS devra tenir compte de ces échelles de temps. Ainsi, la plupart des méthodes existantes s'appliquent à des échelles de temps grandes par rapport au temps de vie métastable:

- une analyse de la densité de probabilité du processus à temps fixé est surtout relevante lorsque le système a le temps d'atteindre un état stationnaire, qu'il pourra suivre adiabatiquement (si un tel état existe) [Tal99, JH91];
- le concept d'attracteur aléatoire [Arn98, Sch89] décrit les propriétés plus fines du système dans un état stationnaire;
- les techniques de grandes déviations, telles que celles développées dans [FW98], peuvent être étendues à des systèmes dépendant lentement du temps si le temps caractéristique du système lent est grand par rapport au temps de Kramers [Fre00, Fre01];

Nous nous intéressons ici à des situations où le temps caractéristique du système lent est bien plus court que le temps de vie métastable. Ce travail se veut une contribution à une étude systématique de tels systèmes dans le régime métastable. Nous accordons une attention particulière aux propriétés de concentration des trajectoires, ainsi qu'aux probabilités de transition entre variétés lentes.

### 1.2 Plan du travail

- **Section 2:** Dans un bref survol de résultats connus sur les EDO rapides–lentes déterministes, nous rappelons d'abord le théorème de Tihonov [Tih52] et celui de

Fenichel [Fen79] sur la dynamique au voisinage de variétés lentes; puis nous discutons la notion de bifurcation dynamique, en particulier les cas de la bifurcation noeud–col et de la bifurcation fourche.

- **Section 3:** Nous commençons par établir un résultat général sur la concentration des trajectoires au voisinage d'une variété lente stable d'une EDS rapide–lente. Ensuite, nous examinons la précision d'une approximation de la dynamique par sa projection sur la variété lente. Les résultats présentés ont été publiés dans l'article [BG03a].
- **Section 4:** Nous discutons, d'abord dans un cadre général, la dynamique d'une EDS rapide–lente au voisinage d'un point de bifurcation de la variété lente [BG03a]. Ensuite, nous donnons une description détaillée de l'effet du bruit sur une bifurcation noeud–col dynamique [BG02b], puis d'une bifurcation fourche dynamique [BG02d].
- **Section 5:** Nous décrivons le phénomène de la résonance stochastique, qui peut se produire si le système déterministe admet des points de bifurcations évitées, et si la dynamique lente est périodique. Les techniques de la section précédente sont étendues afin d'estimer les probabilités de transition entre variétés stables, en fonction des petits paramètre en jeu. Les résultats ont été publiés dans l'article [BG02e].
- **Section 6:** Nous discutons le phénomène de l'hystérésis dynamique, fréquent dans les EDO rapides–lentes. Après un bref rappel des résultats déterministes, nous décrivons l'effet du bruit sur les propriétés des cycles d'hystérésis, en particulier leur aire. Les résultats ont été publiés dans l'article [BG02b].
- **Section 7:** Dans cette dernière partie, nous généralisons certains résultats des sections précédentes, sur les transitions aléatoires à travers une orbite périodique instable, à des situations où le système n'est pas nécessairement rapide–lent. Il ressort de cette étude que la loi des transitions a une dépendance non triviale de l'intensité du bruit, et est gouvernée par une fonction universelle [BG04, BG03b].

### 1.3 Perspectives

Les résultats obtenus dans ce travail sont susceptibles d'être étendus dans plusieurs directions.

- **Dimensions supérieures:** Après le premier pas franchi dans [BG03a], une étude plus détaillée de l'effet d'un bruit sur les systèmes rapides–lents multidimensionnels s'impose. Nous pensons en particulier à la dynamique près d'une famille d'orbites périodiques du système lent (étudiée dans [PR60] dans le cas déterministe) et leur lien avec les phases géométriques, et à la bifurcation de Hopf dynamique [Shi73, Neř87, Neř88].
- **Systèmes étendus:** Une généralisation à des systèmes de dimension infinie, en particulier à des réseaux d'oscillateurs couplés, est désirable puisqu'on s'attend à ce que le bruit produise des effets nouveaux tels que des transitions entre régimes synchronisés et désordonnés (voir par exemple [PRK01]).
- **Bruits plus généraux:** Le bruit n'étant qu'un modèle de l'effet d'un réservoir extérieur, trop compliqué pour être décrit de manière déterministe, il serait utile de pouvoir étendre les résultats obtenus à des bruits autres que le bruit blanc (bruit coloré, voire non-markovien).

- **Théorie du contrôle:** Les résultats de [BG03a] ont fait apparaître des liens entre les propriétés de concentration des trajectoires et les ensembles de contrôle (c.f. [CK00]), qu'il serait intéressant d'étudier plus en détail.
- **Applications:** Quelques applications de la théorie à des modèles de physique du solide et de climatologie ont déjà été étudiées [BG02a, BG02c], mais il reste de nombreux autres domaines où les EDS rapides–lentes jouent un rôle, notamment en biologie moléculaire [SHD01].

## 2 Systèmes singulièrement perturbés déterministes

La théorie des perturbations singulières s'applique en particulier à des systèmes d'équations différentielles ordinaires rapides–lentes de la forme

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre (les membres de droite peuvent éventuellement dépendre de  $\varepsilon$ ). Le qualificatif “singulier” se réfère au fait que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, le système (2.1) se réduit au système algébrique–différentiel

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Les solutions de ce système sont concentrées sur les *variétés lentes*  $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$ , mais il n'est pas immédiatement clair s'il existe un lien entre ces solutions et celles de (2.1) pour  $\varepsilon$  petit mais positif. Une autre manière de considérer le système rapide–lent (2.1) est de rééchelonner le temps d'un facteur  $\varepsilon$  pour obtenir

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\ y' &= \varepsilon g(x, y).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Ce système peut être interprété comme une perturbation du *système associé*  $x' = f(x, \lambda)$ , dans laquelle le paramètre  $\lambda$  serait lentement variable. Les variétés lentes correspondent à des points d'équilibre du système associé.

**Exemple 2.1** (Mouvement suramorti dans un potentiel). Le mouvement d'une particule dans un potentiel  $U$  et soumise à un frottement visqueux est décrit par l'équation

$$\ddot{q} = -\gamma \dot{q} - \nabla U(q),\tag{2.4}$$

qui devient, avec  $y = q$ ,  $x = \dot{q}$  et en frottement fort  $\gamma = 1/\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= -x - \varepsilon \nabla U(y), \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}\tag{2.5}$$

La variété lente est donnée par  $x = -\varepsilon \nabla U(y)$ , et la dynamique sur cette variété est gouvernée par l'équation  $\dot{y} = -\varepsilon \nabla U(y)$  (appelée *loi d'Aristote*).

**Exemple 2.2** (Oscillateur de van der Pol). L'équation de l'oscillateur de van der Pol

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (2.6)$$

est équivalente, pour  $\alpha = 1/\varepsilon$ , à

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y + x - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La variété lente est la courbe d'équation  $y = -x + x^3/3$ , sur laquelle la dynamique peut être décrite par l'équation réduite  $\dot{x} = -x/(x^2 - 1)$  (qui devient singulière en  $x = \pm 1$ ).

## 2.1 Variétés lentes

Nous considérons l'équation (2.1) pour des fonctions  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , dans un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

**Définition 2.3.** *Supposons qu'il existe un domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$  et une fonction continue  $x^* : \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $(x^*(y), y) \in \mathcal{D}$  et*

$$f(x^*(y), y) = 0 \quad (2.8)$$

pour tout  $y \in \mathcal{D}_0$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{D} : x = x^*(y)\}$  est une variété lente du système. Dénotons par  $A(y) = \partial_x f(x^*(y), y)$  la matrice jacobienne de  $x \mapsto f(x, y)$ , et par  $a_i(y)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ses valeurs propres. Nous dirons que  $\mathcal{M}$  est

- hyperbolique si  $\operatorname{Re} a_i(y) \neq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) pour tout  $y \in \mathcal{D}_0$ ;
- uniformément hyperbolique s'il existe  $a_0 > 0$  t.q.  $|\operatorname{Re} a_i(y)| \geq a_0 > 0$  uniformément en  $y$ ;
- asymptotiquement stable si  $\operatorname{Re} a_i(y) < 0$  pour tout  $y \in \mathcal{D}_0$ ;
- uniformément asymptotiquement stable si  $\operatorname{Re} a_i(y) \leq -a_0 < 0$  uniformément en  $y$ .

On remarquera que l'hyperbolicité implique, via le théorème des fonctions implicites, que  $x^*(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Dans l'exemple 2.1,  $A(y) = -\mathbb{1}$ , et la variété lente est uniformément asymptotiquement stable. Par contre, dans l'exemple 2.2,  $A(y) = 1 - x^*(y)^2$  et la variété lente se décompose en trois parties, dont deux stables (pour  $x > 1$  et  $x < -1$ ).

Nous mentionnerons deux résultats décrivant la dynamique au voisinage d'une variété lente. Le premier, plus ancien, décrit la convergence exponentiellement rapide de solutions vers un  $\varepsilon$ -voisinage d'une variété lente uniformément asymptotiquement stable.

**Théorème 2.4** (Tihonov [Tih52], Gradšteĭn [Gra53]). *Si  $\mathcal{M}$  est une variété lente uniformément asymptotiquement stable de (2.1), et si  $\partial_{xx} f$  est uniformément bornée dans un voisinage de  $\mathcal{M}$ , alors il existe des constantes  $c_0, c_1, K > 0$  telles que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et toute condition initiale  $(x_0, y_0)$  satisfaisant  $\|x_0 - x^*(y_0)\| \leq c_0$ , on ait*

$$\|x_t - x^*(y_t)\| \leq \|x_0 - x^*(y_0)\| e^{-Kt/\varepsilon} + c_1 \varepsilon. \quad (2.9)$$

Le second résultat (que nous n'énonçons que dans sa version la plus simple), montre que certaines solutions vivent en fait sur une variété invariante, proche de la variété lente.

**Théorème 2.5** (Fenichel [Fen79]). *Si  $\mathcal{M}$  est une variété lente uniformément hyperbolique et  $\varepsilon$  est suffisamment petit, il existe une variété localement invariante  $\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, y) : x = \bar{x}(y, \varepsilon)\}$  telle que  $\bar{x}(y, \varepsilon) = x^*(y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . (Localement invariant signifie que si  $x_0 = \bar{x}(y_0, \varepsilon)$ , alors  $x_t = \bar{x}(y_t, \varepsilon)$  tant que  $y_t \in \mathcal{D}_0$ ).*

La dynamique sur la variété invariante, que nous appellerons également *variété adiabatique*, est décrite par l'équation réduite

$$\dot{y} = g(\bar{x}(y, \varepsilon), y), \quad (2.10)$$

qui peut être traitée par des méthodes de théorie des perturbations régulières.

## 2.2 Bifurcations dynamiques

L'hyperbolicité d'une variété lente est violée là où elle approche un *point de bifurcation*, c'est-à-dire un point  $(\hat{x}, \hat{y})$  tel que  $f(\hat{x}, \hat{y}) = 0$  et  $\partial_x f(\hat{x}, \hat{y})$  admette  $q \geq 1$  valeurs propres sur l'axe imaginaire.

Supposons que  $(0, 0)$  est un point de bifurcation, avec  $1 \leq q < n$ , les  $n - q$  autres valeurs propres ayant une partie réelle négative. On peut alors trouver des coordonnées  $(x_-, x_0, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^m$  dans lesquelles le système s'écrit, sur l'échelle de temps  $\varepsilon$ , comme

$$\begin{aligned} x'_- &= f_-(x_-, x_0, y) \\ x'_0 &= f_0(x_-, x_0, y) \\ y' &= \varepsilon g(x_-, x_0, y) \\ \varepsilon' &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec une linéarisation autour de 0 diagonale par blocs. En d'autres termes, les valeurs propres de la matrice  $\partial_{x_-} f_-(0, 0, 0)$  ont partie réelle négative, celles de  $\partial_{x_0} f_0(0, 0, 0)$  ont partie réelle nulle, alors que  $\partial_{x_0} f_-(0, 0, 0) = 0$  et  $\partial_{x_-} f_0(0, 0, 0) = 0$ . L'origine est donc un point d'équilibre de (2.11), dont la linéarisation admet  $q + m + 1$  valeurs propres sur l'axe imaginaire. Le théorème de la variété centrale (voir par exemple [Car81]) montre alors l'existence, au voisinage du point de bifurcation, d'une variété invariante localement attractive d'équation  $x_- = \bar{x}_-(x_0, y, \varepsilon)$ . La dynamique sur cette variété est décrite par l'équation réduite

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_0 &= f_0(\bar{x}_-(x_0, y, \varepsilon), x_0, y) =: F(x_0, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= g(\bar{x}_-(x_0, y, \varepsilon), x_0, y) =: G(x_0, y, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dans la suite, nous laisserons tomber l'indice de  $x_0$  et la dépendance de  $F$  et  $G$  en  $\varepsilon$ . Le comportement des orbites près du point de bifurcation dépend du type de bifurcation. Nous discutons ici deux cas apparaissant lorsque  $q = 1$ , et sur lesquels nous reviendrons en détail dans le cas stochastique.

### Bifurcation noeud-col

Cette bifurcation correspond à un pli dans la variété lente. Considérons pour simplifier le cas  $m = 1$ . Outre les conditions de bifurcation  $F(0, 0) = \partial_x F(0, 0) = 0$ , nous supposons que

$$\partial_{xx} F(0, 0) < 0, \quad \partial_y F(0, 0) < 0, \quad G(0, 0) > 0. \quad (2.13)$$

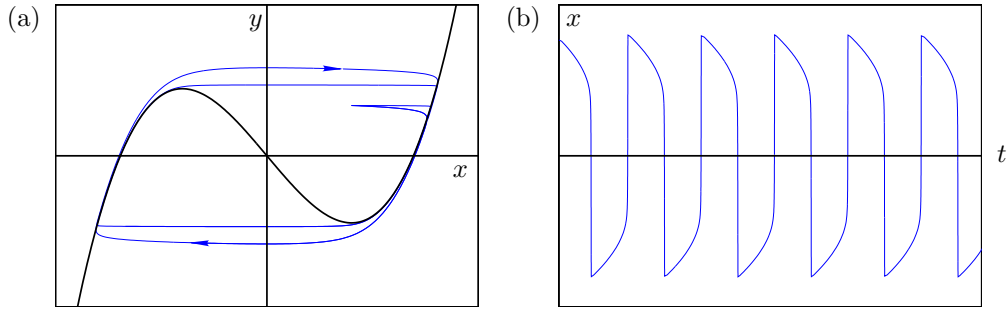


FIGURE 1. (a) Deux solutions des équations de Van der Pol (2.6) (courbes fines) pour la même condition initiale  $(1, 0.5)$ , pour  $\alpha = 5$  et  $\alpha = 20$ . La courbe en gras est la variété lente  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ . (b) Le graphe de  $x(t)$  ( $\alpha = 20$ ) montre des oscillations de relaxation, c'est-à-dire une alternance de phases rapides et lentes.

C'est le cas, à un renversement des axes près, aux points  $\pm(1, -2/3)$  dans l'exemple 2.2. La situation est alors qualitativement la même que pour le système

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -y - x^2, \\ \dot{y} &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

De fait, pour  $y < 0$ , il existe une variété lente stable d'équation  $x = x^*(y)$ , se comportant comme  $|y|^{1/2}$  lorsque  $y \rightarrow 0^-$ , et une variété lente instable, se comportant comme  $-|y|^{1/2}$  lorsque  $y \rightarrow 0^-$ . Les trajectoires partant près de la branche stable pour  $y < 0$  sont attirées par un  $\varepsilon$ -voisinage de celle-ci, mais lorsque  $y$  s'approche de 0, l'attraction est de plus en plus faible, alors que  $\partial_y x^*(y)$  diverge. Lorsque  $y$  devient positif, plus rien n'empêche les trajectoires de s'échapper du voisinage de l'origine dans la direction des  $x$  négatifs, ce qui arrive après un léger retard (Figure 2a).

Ce phénomène de saut peut conduire, comme dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol, à des *oscillations de relaxation* (Figure 1, voir [PR60] et [Hab79], ainsi que [MR80]). La dépendance en  $\varepsilon$  des solutions a été examinée en particulier dans [JGRM90] et [BK99]. Nous résumons les propriétés essentielles de la manière suivante.

**Notation 2.6.** Nous indiquons par  $x(t, \varepsilon) \asymp y(t, \varepsilon)$  l'existence de deux constantes positives  $c_+, c_-$ , indépendantes de  $t$  et  $\varepsilon$ , telles que  $c_- y(t, \varepsilon) < x(t, \varepsilon) < c_+ y(t, \varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $t$  dans un intervalle donné par le contexte.

**Proposition 2.7.** Il existe des constantes  $L, c_1, c_2 > 0$ , telles que toute solution de condition initiale  $(x_0, y_0)$  avec  $y_0 \asymp -1$  et  $x_0 - x^*(y_0) \asymp \varepsilon$  satisfasse, dans un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} x_t - x^*(y_t) &\asymp \frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \leq -\varepsilon^{2/3}, \\ x_t &\asymp \varepsilon^{1/3} && \text{pour } -\varepsilon^{2/3} \leq y_t \leq c_1 \varepsilon^{2/3} \\ x_t &\leq -L && \text{pour } y_t > c_2 \varepsilon^{2/3}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

### Bifurcation fourche

Une autre situation intéressante se présente lorsque  $F$  est impaire en  $x$ . Une bifurcation fourche surcritique, symétrique, a lieu si le champ de vecteurs au voisinage de l'origine est



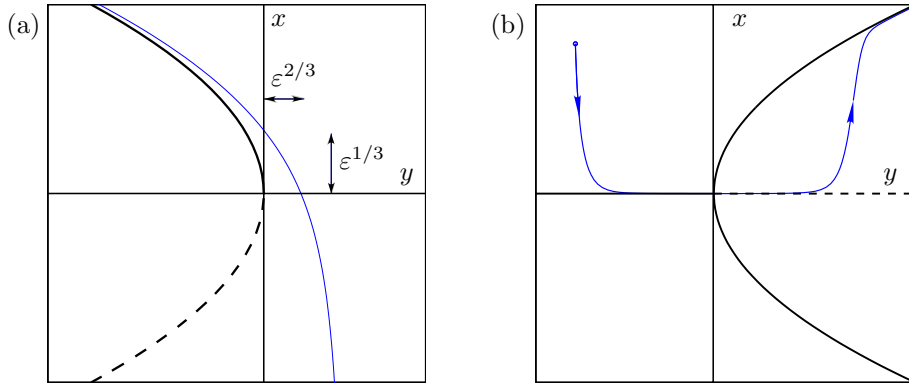


FIGURE 2. (a) Comportement d'une solution (trait fin) de (2.14) près du point de bifurcation noeud-col. La courbe en trait plein est la variété lente stable, celle en traitillés la variété instable. La trajectoire fait un saut après un retard d'ordre  $\varepsilon^{2/3}$ . (b) Comportement d'une solution (trait fin) de (2.16) près du point de bifurcation fourche. La solution ne saute sur la variété instable qu'après un temps de retard macroscopique.

qualitativement équivalent à

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= yx - x^3, \\ \dot{y} &= 1.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Plus généralement, si nous supposons que  $F \in \mathcal{C}^3$ ,  $F(x, y) = -F(-x, y)$  et

$$\partial_{xxx}F(0, 0) < 0, \quad \partial_{xy}F(0, 0) > 0, \quad G(0, 0) > 0,\tag{2.17}$$

alors il existe un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $(0, 0)$  dans lequel

- $G(x, y) > 0$ ;
- $a(y) = \partial_x F(0, y)$  a le même signe que  $y$ ;
- il existe une fonction  $x^*(y)$ ,  $y > 0$ , se comportant comme  $\sqrt{y}$  lorsque  $y \rightarrow 0+$ , et telle que  $F(x, y) = 0$  si et seulement si soit  $x = 0$ , soit  $y > 0$  et  $x = \pm x^*(y)$ .

Le système admet donc trois variétés lentes stables  $\{x = 0, y < 0\}$ ,  $\{x = \pm x^*(y), y > 0\}$ , et une variété instable  $\{x = 0, y > 0\}$  (Figure 2b).

Une trajectoire de condition initiale  $(x_0, y_0)$  avec  $x_0 > 0$  et  $y_0 < 0$  va d'abord être attirée par la variété stable  $\{x = 0, y < 0\}$ . Lorsque celle-ci devient instable en  $y = 0$ , la trajectoire est si proche de  $x = 0$  qu'elle ne s'écarte de l'origine qu'après un *temps de retard* d'ordre 1. Celui-ci est défini, pour  $y_0 < 0$  suffisamment proche de 0, par

$$\Pi(y_0) = \inf \left\{ y_1 > 0 : \int_{y_0}^{y_1} \frac{a(y)}{g(0, y)} dy > 0 \right\}.\tag{2.18}$$

Par exemple, dans le cas (2.16), l'intégrale vaut  $y_1^2 - y_0^2$ , et donc  $\Pi(y_0) = -y_0$ . Dans le cas général, on a

**Proposition 2.8.** *Il existe des constantes  $c_0, c_1 > 0$  et des nombres*

$$\begin{aligned}Y_1 &= y_0 + \mathcal{O}(\varepsilon |\log \varepsilon|) \\ Y_2 &= \Pi(Y_1) = \Pi(y_0) - \mathcal{O}(\varepsilon |\log \varepsilon|) \\ Y_3 &= \Pi(y_0) + \mathcal{O}(\varepsilon |\log \varepsilon|)\end{aligned}\tag{2.19}$$

tels que, si  $0 < x_0 \leq c_0$  et  $(x_t, y_t) \in \mathcal{N}$ ,

$$\begin{cases} 0 < x_t \leq c_1 \varepsilon & \text{pour } Y_1 \leq y_t \leq Y_2 \\ |x_t - x^*(y_t)| \leq c_1 \varepsilon & \text{pour } y_t \geq Y_3. \end{cases} \quad (2.20)$$

Des résultats similaires, mais plus robustes, existent pour la bifurcation de Hopf [Shi73, Neï87, Neï88]. Il existe encore bien d'autres résultats sur les bifurcations dynamiques, par exemple sur les bifurcations transcritique [LS75] et fourche asymétrique [LS77], et d'autres bifurcations de codimension plus élevée [Ber00], que nous ne considérons pas ici.

### 3 Effet du bruit au voisinage de variétés stables

Nous considérons, dans cette section et les suivantes, des perturbations stochastiques de l'EDO rapide–lente (2.1), de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F(x_t, y_t) dW_t, \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t, y_t) dW_t. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les réels  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont de petits paramètres pouvant dépendre de  $\varepsilon$ , pourvu que le rapport  $\rho = \sigma'/\sigma$  soit borné supérieurement lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ils mesurent le rapport entre taux de diffusion et de dérive, respectivement, pour la variable rapide  $x$  et lente  $y$ .

En outre, nous supposons dans toute la suite que:

- les coefficients de dérive  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$  et  $g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^m)$ , et les coefficients de diffusion  $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^{n \times k})$  et  $G \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^{m \times k})$  sont uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, dans un ouvert  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ;
- $\{W_t\}_{t \geq 0}$  est un processus de Wiener  $k$ -dimensionnel standard dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et les intégrales stochastiques sont définies dans le sens d'Itô;
- les coefficients de dérive satisfont les conditions usuelles de croissance garantissant l'existence d'une unique solution forte  $(x_t, y_t)_{t \geq t_0}$  de (3.1), admettant une version continue.

Pour  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ , nous dénotons par  $\mathbb{P}^{t_0, (x_0, y_0)}$  la loi du processus de Markov homogène  $(x_t, y_t)_{t \geq t_0}$ , de condition initiale  $(x_{t_0}, y_{t_0}) = (x_0, y_0)$ , et par  $\mathbb{E}^{t_0, (x_0, y_0)}$  les espérances relativement à  $\mathbb{P}^{t_0, (x_0, y_0)}$ .

Dans cette section, nous supposons de plus que

**Hypothèse 3.1.** Pour  $\sigma = \sigma' = 0$ , le système (3.1) admet une variété lente uniformément asymptotiquement stable  $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{D} : x = x^*(y), y \in \mathcal{D}_0\}$ .

#### 3.1 Concentration des trajectoires

Soit  $\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathcal{D} : x = \bar{x}(y, \varepsilon), y \in \mathcal{D}_0\}$  la variété invariante dont l'existence est assurée par le théorème de Fenichel. Notre but est de montrer que les trajectoires partant près de  $\mathcal{M}_\varepsilon$  restent concentrées dans son voisinage sur des échelles de temps exponentiellement longues (pour autant que la dynamique de  $y$  le permette).

L'idée de départ est de montrer que la déviation  $\xi_t = x_t - \bar{x}(y_t, \varepsilon)$  est bien approximée par le processus  $\xi_t^0$ , solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} d\xi_t^0 &= \frac{1}{\varepsilon} A(y_t^{\text{det}}, \varepsilon) \xi_t^0 dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_0(y_t^{\text{det}}, \varepsilon) dW_t, \\ dy_t^{\text{det}} &= g(\bar{x}(y_t^{\text{det}}, \varepsilon), y_t^{\text{det}}) dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ici  $A(y, \varepsilon)$  est la matrice obtenue en linéarisant l'équation pour  $\xi$  en  $\xi = 0$ , en particulier elle satisfait  $A(y, 0) = \partial_x f(x^*(y), y)$ . De même,  $F_0(y, \varepsilon)$  est le coefficient de diffusion en  $\xi = 0$ , et satisfait  $F_0(y, 0) = F(x^*(y), y)$ .

La solution de (3.2) est un processus Gaussien, centré, donc entièrement caractérisé par sa covariance  $\text{Cov}(\xi_t^0)$ . Il s'avère que  $X_t = \sigma^{-2} \text{Cov}(\xi_t^0)$  satisfait le système rapide–lent

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{X} &= A(y, \varepsilon)X + XA(y, \varepsilon)^T + F_0(y, \varepsilon)F_0(y, \varepsilon)^T, \\ \dot{y} &= g(\bar{x}(y, \varepsilon), y). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le théorème de Fenichel peut être appliqué, et nous fournit l'existence d'une variété invariante attractive d'équation  $X = \bar{X}(y, \varepsilon)$ , ( $y \in \mathcal{D}_0$ ), où  $X^*(y) = \bar{X}(y, 0)$  est la solution de

$$A^*(y)X^*(y) + X^*(y)A^*(y)^T + F_0(y, 0)F_0(y, 0)^T = 0. \quad (3.4)$$

Une telle matrice existe en vertu de l'hyperbolicité [Bel60], et des résultats bien connus en théorie du contrôle assurent qu'elle est non-singulière si le couple  $(A^*, F_0)$  est *contrôlable*, i.e. la matrice

$$\begin{bmatrix} F_0(y, 0) & A^*(y)F_0(y, 0) & \dots & A^*(y)^{n-1}F_0(y, 0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times nk} \quad (3.5)$$

est de rang  $n$ . Il est donc permis de supposer

**Hypothèse 3.2.** Les normes (au sens des opérateurs)  $\|\bar{X}(y, \varepsilon)\|$  et  $\|\bar{X}(y, \varepsilon)^{-1}\|$  sont uniformément bornées pour  $y \in \mathcal{D}_0$ .

Comme  $\bar{X}(y, \varepsilon)$  décrit la covariance asymptotique de  $\xi_t^0$ , il paraît raisonnable que les solutions du système original (3.1) soient concentrées dans un ensemble de la forme

$$\mathcal{B}(h) = \{(x, y) : y \in \mathcal{D}_0, \langle (x - \bar{x}(y, \varepsilon)), \bar{X}(y, \varepsilon)^{-1}(x - \bar{x}(y, \varepsilon)) \rangle < h^2\}. \quad (3.6)$$

Cet ensemble est une réunion d'ellipsoïdes (pleins) centrés sur la variété adiabatique  $\mathcal{M}_\varepsilon$ .

Nous fixons une condition initiale (déterministe)  $(x_0, y_0) \in \mathcal{M}_\varepsilon$ , et introduisons les temps de première sortie

$$\tau_{\mathcal{B}(h)} = \inf\{t \geq 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{B}(h)\}, \quad (3.7)$$

$$\tau_{\mathcal{D}_0} = \inf\{t \geq 0 : y_t \notin \mathcal{D}_0\}. \quad (3.8)$$

(Remarquons que ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration canonique engendrée par le processus de Wiener, et que la propriété de Markov forte s'applique pour de tels temps).

Notre résultat principal dit que  $\mathbb{P}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < t\}$  se comporte comme  $(t^2/\varepsilon) e^{-h^2/2\sigma^2}$  lorsque  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $h$  tendent vers zéro. Plus précisément,

**Théorème 3.3** ([BG03a, Théorème 2.4]). *Il existe  $\varepsilon_0, \Delta_0, h_0 > 0$  tels que pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $\Delta \leq \Delta_0$ ,  $h \leq h_0$ , et tout  $0 < \gamma < 1/2$ , on ait*

$$\mathbb{P}^{0, (x_0, y_0)}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < t \wedge \tau_{\mathcal{D}_0}\} \leq C_{n, m, \gamma, \Delta}^+(t, \varepsilon) \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right) e^{-\kappa^+ h^2/\sigma^2}, \quad (3.9)$$

$$\mathbb{P}^{0, (x_0, y_0)}\{\tau_{\mathcal{B}(h)} < t\} \geq C_{n, m, \Delta}^-(t, \varepsilon, h, \sigma) e^{-\kappa^- h^2/\sigma^2}. \quad (3.10)$$

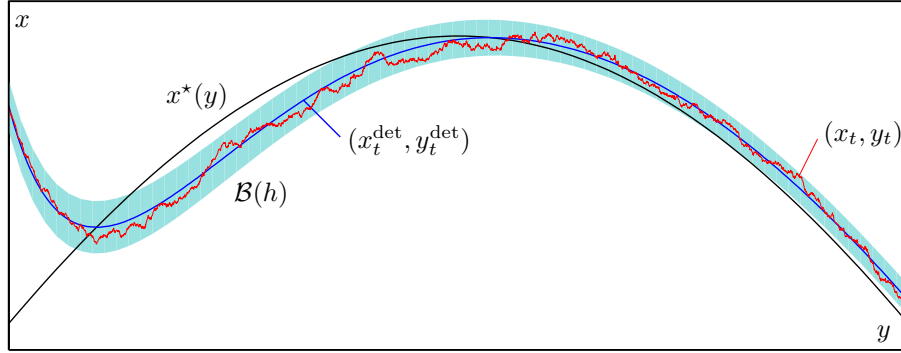


FIGURE 3. Mouvement près d'une variété lente stable  $x = x^*(y)$  dans un cas unidimensionnel ( $n = m = 1$ ). Dans cet exemple, la condition initiale ne se trouve pas sur la variété adiabatique, mais la solution déterministe  $(x_t^{\text{det}}, y_t^{\text{det}})$  s'en approche exponentiellement vite. Dans ce cas, on peut montrer que la trajectoire stochastique  $(x_t, y_t)$  reste, avec forte probabilité, dans un tube  $\mathcal{B}(h)$  centré autour de  $(x_t^{\text{det}}, y_t^{\text{det}})$ .

Les exposants  $\kappa^\pm$  sont donnés par

$$\kappa^+ = \gamma \left[ 1 - \mathcal{O}(h) - \mathcal{O}(\Delta) - \mathcal{O}(m\varepsilon\rho^2) - \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\text{const}/\varepsilon}}{1-2\gamma}\right) \right], \quad (3.11)$$

$$\kappa^- = \frac{1}{2} \left[ 1 + \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(e^{-\text{const}(t \wedge t_0)/\varepsilon}) \right], \quad (3.12)$$

où  $t_0$  est d'ordre 1. Quant aux préfacteurs, ils sont de la forme

$$C_{n,m,\gamma,\Delta}^+(t, \varepsilon) = \text{const} \frac{(1+t)^2}{\Delta\varepsilon} \left[ (1-2\gamma)^{-n} + e^{n/4} + e^{m/4} \right], \quad (3.13)$$

$$C_{n,m,\Delta}^-(t, \varepsilon, h, \sigma) = \text{const} \left[ 1 - \left( e^{n/4} + \frac{e^{m/4}}{\Delta\varepsilon} \right) e^{-\kappa^- h^2 / 2\sigma^2} \right]. \quad (3.14)$$

Il est à noter que les termes d'erreur dans les exposants sont *uniformes* en  $t$  (pour  $t > t_0$  dans le cas de  $\kappa_-$ ). En choisissant par exemple  $\gamma = 1/2 - \mathcal{O}(\varepsilon)$ ,  $\Delta = \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\sigma \ll h \ll 1$ , on obtient  $\kappa^\pm$  proches de  $1/2$ . Les préfacteurs  $C^\pm$  sont loin d'être optimaux, mais il est naturel que  $C^+$  croisse au cours du temps, reflétant le fait qu'il devient plus probable avec le temps d'avoir observé une excursion occasionnelle.

Les principales étapes de la démonstration sont les suivantes:

- pour l'approximation linéaire, des estimations légèrement meilleures que (3.9), (3.10) s'obtiennent à partir de l'inégalité de Doob et quelques intégrales Gaussiennes;
- le résultat est étendu à l'équation originale sur des échelles de temps d'ordre 1, en traitant les termes non-linéaires comme de petites perturbations;
- l'extension à des échelles de temps plus longues s'obtient en redémarrant le processus à tous les temps  $kT$ ,  $k \geq 1$ , à l'aide de la propriété de Markov et d'une intégration par parties par rapport à  $\langle \xi_{kT}, \bar{X}(y_{kT}, \varepsilon)^{-1} \xi_{kT} \rangle$ .

Le théorème 3.2 de [BG03a] fournit des informations supplémentaires sur la dynamique, montrant que sur des échelles de temps d'ordre 1 au moins, les trajectoires restent concentrées autour de leur pendant déterministe. Ainsi  $\tau_{\mathcal{D}_0}$  sera typiquement très grand si  $\mathcal{D}_0$  est un ensemble invariant par la dynamique déterministe.

Pour une condition initiale voisine de la variété invariante, on obtient une convergence exponentiellement rapide vers  $\mathcal{B}(h)$ . De façon équivalente, on montre que la trajectoire a de fortes chances de rester dans un tube centré sur la solution déterministe (Figure 3).

### 3.2 Réduction de la dynamique

Le théorème 3.3 ayant montré que les trajectoires sont concentrées au voisinage de la variété adiabatique  $\mathcal{M}_\varepsilon$ , il est tentant d'approximer la dynamique du système original (3.1) par sa "projection" sur  $\mathcal{M}_\varepsilon$ :

$$dy_t^0 = g(\bar{x}(y_t^0, \varepsilon), y_t^0) dt + \sigma' G(\bar{x}(y_t^0, \varepsilon), y_t^0) dW_t. \quad (3.15)$$

On est en droit de se demander si les trajectoires de (3.15) sont proches de celles du système original. Pour quantifier cet écart, introduisons la matrice

$$B(y, \varepsilon) = \partial_x g(\bar{x}(y, \varepsilon), y) \partial_y \bar{x}(y, \varepsilon) + \partial_y g(\bar{x}(y, \varepsilon), y), \quad (3.16)$$

qui correspond à la linéarisation en 0 de l'équation gouvernant la dynamique de  $\eta_t = y_t - y_t^{\text{det}}$ . Dénotons par  $V(t, s)$  la solution fondamentale de  $\dot{\eta} = B(y_t^{\text{det}}, \varepsilon)\eta$  et introduisons

$$\chi(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \int_0^s \left( \sup_{u \leq v \leq s} \|V(s, v)\|^2 \right) du. \quad (3.17)$$

Cette fonction est une mesure de l'instabilité linéaire des orbites de l'équation réduite déterministe. On peut alors estimer (c.f. [BG03a, Remarque 2.7])

$$\mathbb{P}^{0, (0,0)} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_{\mathcal{B}(h)}} \|y_s - y_s^0\| \geq h \right\} \leq c \left( 1 + \frac{t}{\varepsilon} \right) e^{m/4} \exp \left\{ - \frac{\kappa_1 h^2}{[(\sigma')^2 h^2 + \sigma^2 \varepsilon] (1 + \chi(t))} \right\}, \quad (3.18)$$

ce qui montre que la déviation typique entre  $y_s$  et  $y_s^0$  est d'ordre  $\sigma \sqrt{\varepsilon} (1 + \chi(t))^{1/2}$ . D'autre part,

$$\mathbb{P}^{0, (0,0)} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_{\mathcal{D}_0}} \|y_s^0 - y_s^{\text{det}}\| \geq h_1 \right\} \leq c (1 + t) e^{m/4} \exp \left\{ - \frac{\kappa_2 h_1^2}{(\sigma')^2 (1 + \chi(t))} \right\}, \quad (3.19)$$

et donc la déviation typique entre  $y_s^0$  et  $y_s^{\text{det}}$  est d'ordre  $\sigma' (1 + \chi(t))^{1/2}$ . Ainsi pour  $\sigma'/\sigma > \sqrt{\varepsilon}$ , l'équation réduite (3.15) donne une meilleure approximation de la dynamique originale que l'équation déterministe 2.10.

## 4 Effet du bruit sur les bifurcations dynamiques

Nous considérons toujours le système rapide–lent stochastique (3.1), mais cette fois nous supposons que la dynamique lente amène les trajectoires au voisinage d'un point de bifurcation.

Concrètement, supposons que  $f(0, 0) = 0$  et que  $\partial_x f(0, 0)$  admet  $q$  valeurs propres sur l'axe imaginaire, les autres  $n - q$  valeurs propres ayant partie réelle négative. Nous pouvons alors introduire des coordonnées  $(x^-, z) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  dans lesquelles le système s'écrit

$$\begin{aligned} dx_t^- &= \frac{1}{\varepsilon} f^-(x_t^-, z_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^-(x_t^-, z_t, y_t) dW_t, \\ dz_t &= \frac{1}{\varepsilon} f^0(x_t^-, z_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^0(x_t^-, z_t, y_t) dW_t, \\ dy_t &= g(x_t^-, z_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t^-, z_t, y_t) dW_t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où les valeurs propres de la matrice  $\partial_{x^-} f^-(0, 0, 0)$  ont partie réelle négative, celles de  $\partial_z f^0(0, 0, 0)$  ont partie réelle nulle, alors que  $\partial_z f^-(0, 0, 0) = 0$  et  $\partial_{x^-} f^0(0, 0, 0) = 0$ . Nous avons vu que ce système admettait, dans un voisinage de l'origine, une variété invariante d'équation  $x^- = \bar{x}^-(z, y, \varepsilon)$ ,  $(z, y) \in \mathcal{N}$ .

Nous allons commencer par dériver des résultats similaires (bien qu'un peu plus faibles) à ceux de la section précédente sur la concentration des trajectoires au voisinage de la variété invariante, ainsi que sur l'approximation par un système réduit. Ensuite nous discuterons la dynamique réduite dans deux cas particuliers avec  $q = 1$ : la bifurcation noeud-col et la bifurcation fourche.

#### 4.1 Réduction de la dynamique

Notre but est de montrer que la déviation  $\xi_t^- = x_t^- - \bar{x}^-(z_t, y_t, \varepsilon)$  reste concentrée dans un voisinage de 0. En parfaite analogie avec le cas stable, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{B}^-(h) = \{(x^-, z, y) : (z, y) \in \mathcal{N}, \langle x^- - \bar{x}^-(z, y, \varepsilon), \bar{X}^-(z, y, \varepsilon)^{-1}(x^- - \bar{x}^-(z, y, \varepsilon)) \rangle < h^2\}, \quad (4.2)$$

où  $\bar{X}^-(z, y, \varepsilon)$  est définie à partir de la linéarisation  $A^-(z, y, \varepsilon)$  en  $\xi^- = 0$  de l'équation satisfaite par  $\xi_t^-$ , de la même manière que  $\bar{X}(y, \varepsilon)$  dans (3.3) et (3.4). Considérons alors, pour une condition initiale fixée  $(x_0^-, z_0, y_0)$  sur la variété invariante, les temps d'arrêt

$$\tau_{\mathcal{B}^-(h)} = \inf\{t \geq 0 : (x_t, y_t) \notin \mathcal{B}^-(h)\}, \quad (4.3)$$

$$\tau_{\mathcal{N}} = \inf\{t \geq 0 : (z_t, y_t) \notin \mathcal{N}\}. \quad (4.4)$$

Sous l'hypothèse que  $\|\bar{X}^-(z, y, \varepsilon)\|$  et  $\|\bar{X}^-(z, y, \varepsilon)^{-1}\|$  soient uniformément bornées dans  $\mathcal{N}$ , nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 4.1** ([BG03a, Théorème 2.8]). *Il existe des constantes  $h_0 > 0$ ,  $\Delta_0 > 0$  et  $\nu \in (0, 1]$  telles que pour tout  $h \leq h_0$ , tout  $\Delta \leq \Delta_0$  et tout  $0 < \gamma < 1/2$ ,*

$$\mathbb{P}^{0, (x_0^-, z_0, y_0)}\{\tau_{\mathcal{B}^-(h)} < t \wedge \tau_{\mathcal{N}}\} \leq C_{n, m, q, \gamma, \Delta}(t, \varepsilon) \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right) e^{-\kappa h^2 / \sigma^2}, \quad (4.5)$$

à condition que  $\varepsilon |\log(h(1 - 2\gamma))| \leq 1$ . Ici

$$\kappa = \gamma [1 - \mathcal{O}(\Delta) - \mathcal{O}(h^\nu (1 - 2\gamma)^{1-\nu} |\log(h(1 - 2\gamma))|)], \quad (4.6)$$

$$C_{n, m, q, \gamma, \Delta}(t, \varepsilon) = \text{const} \left(1 + \frac{t}{\Delta \varepsilon}\right) \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right) \left[(1 - 2\gamma)^{-(n-q)} + e^{(n-q)/4} + e^{m/4} + e^{q/4}\right]. \quad (4.7)$$

Ces propriétés de concentration suggèrent d'approximer la dynamique de (4.1) par l'équation réduite

$$\begin{aligned} dz_t^0 &= \frac{1}{\varepsilon} f^0(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^0(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dW_t, \\ dy_t^0 &= g(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dt + \sigma' G(\bar{x}^-(z_t^0, y_t^0, \varepsilon), z_t^0, y_t^0) dW_t, \end{aligned} \quad (4.8)$$

qui a l'avantage de ne faire intervenir que les modes bifurcants parmi les variables rapides. On peut alors montrer (c.f. [BG03a, Théorème 2.9]) que la déviation entre solutions de

l'équation réduite et celles du système original satisfait

$$\mathbb{P}^{0, (x_0^-, z_0^0, y_0^0)} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau_N} \|(z_s, y_s) - (z_s^0, y_s^0)\| \geq h \right\} \leq \text{const} \left( 1 + \frac{t}{\varepsilon} \right) e^{(m+q)/4} \exp \left\{ -\kappa_0 \frac{h^2}{\sigma^2} \frac{1}{\chi_C^{(2)}(t) + h\chi_C^{(1)}(t) + h^2\chi_C^{(2)}(t)} \right\}, \quad (4.9)$$

pour tout  $h \leq h_0[\chi^{(1)}(t) \vee \chi_C^{(1)}(t)]^{-1}$ , où  $\kappa_0$  est une constante positive. Les fonctions  $\chi^{(i)}(t)$  et  $\chi_C^{(i)}(t)$  mesurent à nouveau l'instabilité des orbites du système réduit. La déviation typique croît comme  $\sigma\chi_C^{(2)}(t)^{1/2} + \sigma^2\chi_C^{(1)}(t)$ . Malheureusement, les  $\chi$  croissent en général trop rapidement pour que l'estimation (4.9) suffise à justifier l'étude du seul système réduit. C'est néanmoins ce que nous allons faire dans la suite.

## 4.2 Bifurcation noeud-col

Nous considérons ici un système réduit dans le cas d'une bifurcation noeud-col à l'origine (en particulier  $q = 1$ ). Pour simplifier, nous discutons le cas où  $m = 1$ , et où la dynamique lente est triviale:

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t, \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nous pouvons donc admettre que  $y_t = t$  (avec  $t_0$  pas nécessairement nul), et considérer le processus inhomogène  $\{x_t\}_{t \geq t_0}$ . Une bifurcation noeud-col (indirecte) a lieu en  $(0, 0)$  si

$$f(0, 0) = 0, \quad \partial_x f(0, 0) = 0, \quad \partial_y f(0, 0) < 0, \quad \partial_{xx} f(0, 0) < 0. \quad (4.11)$$

Dans ce cas, la variété lente est formée d'une branche stable  $\{x = x^*(y), y \leq 0\}$ , avec  $x^*(y) \asymp |y|^{1/2}$ , et une branche instable  $\{x = x_-(y), y \leq 0\}$ , avec  $x_-(y) \asymp -|y|^{1/2}$ .

Les résultats présentés ici sont un cas particulier de ceux de [BG02b]. Nous fixons une condition initiale déterministe  $(x_0, y_0) = (x_0, t_0)$  avec  $t_0 < 0$  et  $x_0$  dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $x^*(y_0)$ . Le comportement de la solution déterministe  $x_t^{\text{det}}$ , obtenue avec la même condition initiale et  $\sigma = 0$ , est décrite dans la proposition 2.7 (c.f. Figure 2a). En particulier,  $x_t^{\text{det}}$  effectue une transition rapide vers les  $x$  négatifs après un retard d'ordre  $\varepsilon^{2/3}$ .

Tant que  $y_t = t$  ne s'approche pas de 0, le théorème 3.3 s'applique et montre que les trajectoires sont concentrées dans un ensemble  $\mathcal{B}(h)$ , centré en  $x_t^{\text{det}}$ . Dans ce cas particulier, il prend la forme d'une bande

$$\mathcal{B}(h) = \left\{ (x, t) : \frac{(x - x_t^{\text{det}})^2}{\zeta(t)} < h^2 \right\}, \quad (4.12)$$

où  $\zeta(t)$  est l'analogue de la matrice  $X(t)$  du cas général. Un peu d'analyse montre qu'ici,

$$\zeta(t) \asymp \frac{1}{|\partial_x f(x_t^{\text{det}}, t)|} \asymp \frac{1}{|t|^{1/2} \vee \varepsilon^{1/3}} \quad (4.13)$$

pour  $t \leq c_1 \varepsilon^{2/3}$ . Une preuve analogue à celle du théorème 3.3, mais plus simple, nous donne alors

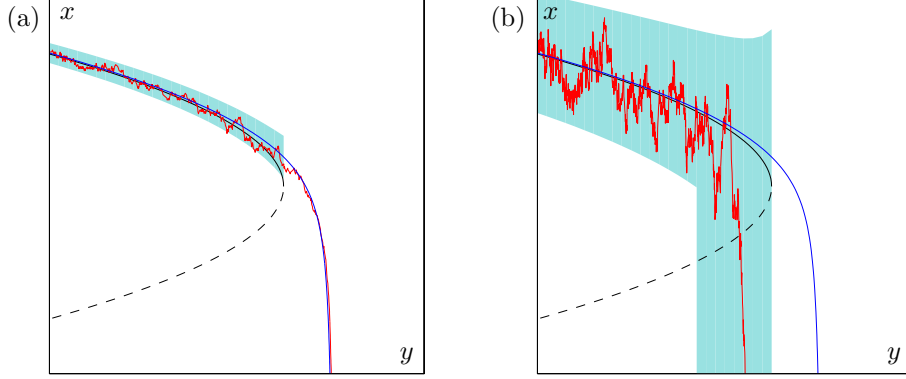


FIGURE 4. Trajectoires déterministes et stochastiques près d'un point de bifurcation noeud-col, (a) pour  $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$ , (b) pour  $\sigma > \sqrt{\varepsilon}$ . L'ensemble  $\mathcal{B}(h)$  (ici  $h = 3$ ) est indiqué en ombré. Selon l'intensité du bruit, le saut a typiquement lieu avant ou après le point de bifurcation.

**Théorème 4.2** ([BG02b, Proposition 4.2]). *Soit  $\hat{\zeta}(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} \zeta(s)$ . Il existe une constante  $h_0$  telle que pour  $h \leq h_0 \hat{\zeta}(t)^{-3/2}$  et  $t \leq t_1 = c_1 \varepsilon^{2/3}$ ,*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq \text{const} \left( \frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-\kappa h^2 / 2\sigma^2}, \quad (4.14)$$

avec  $\kappa = 1 - \mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(h \hat{\zeta}(t)^{3/2})$ .

Ainsi, tant que  $\hat{\zeta}(t)^{3/2} \ll 1/\sigma$ , les trajectoires sont concentrées dans un voisinage d'ordre  $\sigma \sqrt{\zeta(t)}$  de la solution déterministe  $x_t^{\text{det}}$ . Comme  $\hat{\zeta}(t_1) \simeq \varepsilon^{-1/3}$ , il y a deux cas à considérer:

1. Si  $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$ , alors (4.14) est applicable jusqu'au temps  $t_1$  et montre qu'en  $t_1$  les trajectoires sont concentrées dans un voisinage d'ordre  $\sigma \varepsilon^{-1/6} < \varepsilon^{1/3}$  de  $x_{t_1}^{\text{det}}$  (Figure 4a).
2. Si  $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$ , alors (4.14) n'est utile que pour  $\hat{\zeta}(t) < \sigma^{-2/3}$ , i.e. les trajectoires sont concentrées autour de  $x_t^{\text{det}}$  tant que  $t < -\sigma^{4/3}$  (Figure 4b).

Une manière de décrire la dynamique aux temps ultérieurs est de considérer le temps de premier passage en  $x = -L$  ( $L > 0$  étant une constante fixée telle que  $(-L, t) \in \mathcal{N}$  pour les temps considérés):

$$\tau^0 = \inf \{ t \geq t_0 : x_t \leq -L \}. \quad (4.15)$$

En effet, une fois le niveau  $-L$  atteint, le processus a toutes les chances de quitter immédiatement le voisinage  $\mathcal{N}$  dans la direction des  $x$  négatifs. L'estimation (4.14) implique

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 < t \} \leq \text{const} \left( \frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-\kappa / \hat{\zeta}(t)^3 \sigma^2} \quad (4.16)$$

pour  $t \leq t_1$  dans le premier cas, et  $t \leq -\sigma^{4/3}$  dans le second cas. Le résultat suivant montre que les trajectoires ont de fortes chances de s'échapper par la suite:

**Théorème 4.3** ([BG02b, Propositions 5.1 et 6.1]). *Il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que si  $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$ , alors*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 \geq t \} \leq 3 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{\sigma^2} \left( \frac{\kappa(t - t_1)}{\varepsilon^{2/3} |\log \varepsilon|} - 1 \right) \right\} \quad (4.17)$$



pour  $t_1 \leq t \leq t_1 + \mathcal{O}(1)$ . D'autre part, si  $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$ , alors

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 \geq t \} \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ -\frac{\kappa \sigma^{2/3} (t + \sigma^{4/3})}{\varepsilon |\log \sigma|} \right\} + e^{-\kappa/\sigma^2} \quad (4.18)$$

pour  $-\sigma^{4/3} + \mathcal{O}(\varepsilon) \leq t \leq t_1$ .

Ainsi,

1. si  $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$ , la grande majorité des trajectoires aura quitté le voisinage du point de bifurcation dès que  $t - t_1 \gg \varepsilon^{2/3} |\log \varepsilon|$ , c'est-à-dire peu après que la solution déterministe saute (Figure 4a);
2. si  $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$ , alors la plupart des trajectoires se seront échappées vers le bas dès que  $t + \sigma^{4/3} \gg \varepsilon |\log \sigma| / \sigma^{2/3}$ , c'est-à-dire *avant* que la bifurcation ait eu lieu (Figure 4b).

Le second cas est un phénomène nouveau, entièrement dû à la présence du bruit. Il est intéressant de noter que plusieurs quantités, comme le temps typique du saut et l'exposant dans (4.18), ont des dépendances en lois de puissance non triviales de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ . Cet exposant s'obtient en comptabilisant le nombre d'excursions que le processus a le temps d'entreprendre afin de franchir la variété instable (c.f. [BG02e, Section 4.2] et [BG02a, Section 3.2]).

### 4.3 Bifurcation fourche

Considérons maintenant la dynamique du système

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t, \\ dy_t &= 1, \end{aligned} \quad (4.19)$$

pour  $q = m = 1$ , dans le cas d'une bifurcation fourche surcritique symétrique. C'est-à-dire que nous supposons  $f(x, y) = -f(-x, y)$  pour tous les  $(x, y)$  dans un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $(0, 0)$ , et

$$\partial_x f(0, 0) = 0, \quad \partial_{xy} f(0, 0) > 0, \quad \partial_{xxx} f(0, 0) < 0. \quad (4.20)$$

Dans ce cas la variété lente se compose d'une branche en  $x = 0$ , stable pour  $y < 0$ , et de deux branches stables  $x = \pm x^*(y)$  pour  $y > 0$ , où  $x^*(y) \asymp \sqrt{y}$ . Nous fixons une solution déterministe  $(x_t^{\det}, y_t^{\det})$ , avec  $x_{t_0}^{\det} > 0$  et  $y_{t_0}^{\det} < 0$ , et identifions à nouveau  $y_t$  avec  $t$ . Introduisons

$$a(t) = \partial_x f(0, t), \quad \alpha(t, s) = \int_s^t a(u) du. \quad (4.21)$$

Nous pouvons supposer que  $a(t)$  a le même signe que  $t$ . La proposition 2.8 affirme que  $x_t^{\det}$  reste proche de 0 pour tous les temps  $t$  tels que  $t_0 + \mathcal{O}(\varepsilon |\log \varepsilon|) \leq t \leq \Pi(t_0) - \mathcal{O}(\varepsilon |\log \varepsilon|)$ , où  $\Pi(t_0)$  est défini comme le premier temps positif auquel  $\alpha(t, t_0) = 0$  (c.f. Figure 2b).

Comme dans le cas de la bifurcation noeud-col, le mouvement jusqu'au point de bifurcation (et un peu au-delà) peut être décrit en étendant le domaine de validité du théorème 3.3. Définissons, comme auparavant,

$$\mathcal{B}(h) = \left\{ (x, t) : \frac{(x - x_t^{\det})^2}{\zeta(t)} < h^2 \right\}. \quad (4.22)$$

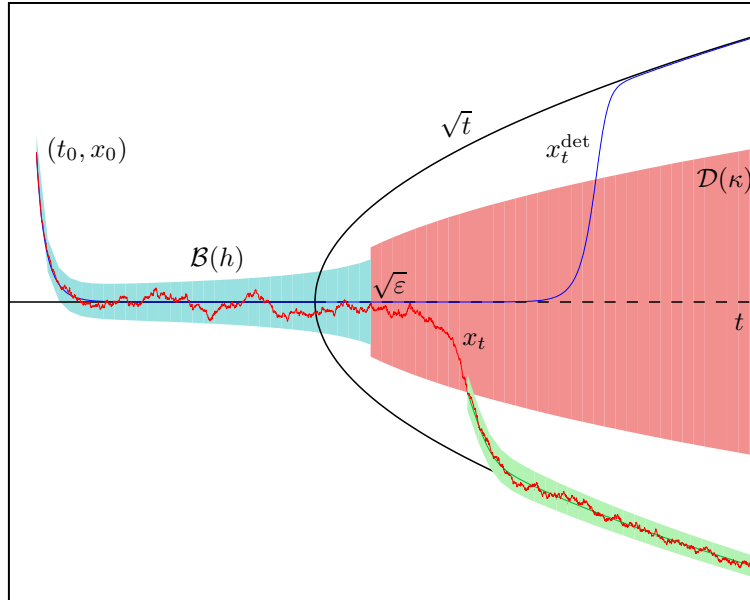


FIGURE 5. Bifurcation fourche stochastique. La solution déterministe  $x_t^{\text{det}}$  ne quitte la branche instable qu'après un temps de retard. La solution stochastique reste, avec grande probabilité, dans une bande  $\mathcal{B}(h)$  jusqu'à un temps  $\sqrt{\varepsilon}$  après le point de bifurcation. Elle quitte l'ensemble  $\mathcal{D}(\kappa)$  à un instant aléatoire  $\tau_{\mathcal{D}}$ , puis reste à nouveau confinée dans un voisinage de la solution déterministe partant en même temps du bord de  $\mathcal{D}(\kappa)$ .

Dans le cas présent,  $\zeta(t)$  est monotone croissante, et son comportement est donné par

$$\zeta(t) \asymp \frac{1}{|t| \vee \sqrt{\varepsilon}} \quad (4.23)$$

pour  $t \leq \sqrt{\varepsilon}$ . Le théorème 4.2 admet un analogue:

**Théorème 4.4** ([BG02d, Théorème 2.10]). *Il existe une constante  $h_0$  telle que pour  $h \leq h_0\sqrt{\varepsilon}$  et  $t \leq \sqrt{\varepsilon}$ ,*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq C(t, \varepsilon) e^{-\kappa h^2 / 2\sigma^2}, \quad (4.24)$$

avec  $\kappa = 1 - \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) - \mathcal{O}(h^2/\varepsilon)$ , et un préfacteur  $C(t, \varepsilon) = (|\alpha(t, t_0)| + \mathcal{O}(\varepsilon))/\varepsilon^2$ .

Ainsi pour  $\sigma < \sqrt{\varepsilon}$ , les trajectoires sont concentrées dans un voisinage de largeur d'ordre  $\sigma/(|t|^{1/2} \vee \varepsilon^{1/4})$  de la solution déterministe (en fait, si  $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$ , cela reste vrai pour  $t \ll -\sigma$ ).

Lorsque  $t > \sqrt{\varepsilon}$ , la trajectoire se trouve dans une région instable qu'on s'imagine la voir quitter rapidement. La situation est compliquée par le fait que près de  $x = 0$ , le terme de dérive  $f$  est négligeable, et c'est le bruit seul qui doit faire le travail de pousser  $x_t$  vers un côté de l'axe ou l'autre. L'étude de ce cas nécessite un contrôle précis de la probabilité que  $x_t$  quitte un voisinage de 0 où le bruit domine la dynamique, et de la loi des retours de  $x_t$  en 0.

Pour formuler le résultat, nous introduisons l'ensemble

$$\mathcal{D}(\kappa) = \left\{ (x, t) : t \geq \sqrt{\varepsilon}, \frac{1}{x} f(x, t) \geq \kappa a(t) \right\}, \quad (4.25)$$

où  $\kappa$  est un paramètre dans  $(0, 1)$ . Les bords de  $\mathcal{D}$  se comportent en  $\pm\sqrt{t}$  (Figure 5). Le résultat est

**Théorème 4.5** ([BG02d, Théorème 2.11]). *Si  $\kappa \in (0, 2/3)$  et  $\sigma |\log \sigma|^{2/3} = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ , alors pour toute condition initiale  $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}(\kappa)$ , on a*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{D}(\kappa)} \geq t \} \leq \text{const } t \frac{|\log \sigma|}{\sigma} \left( 1 + \frac{\alpha(t, t_0)}{\varepsilon} \right) \frac{e^{-\kappa \alpha(t, t_0)/\varepsilon}}{\sqrt{1 - e^{-2\kappa \alpha(t, t_0)/\varepsilon}}}. \quad (4.26)$$

Ce résultat montre que le processus  $x_t$  a une forte probabilité de quitter  $\mathcal{D}(\kappa)$  dès que  $\alpha(t, t_0) > \varepsilon |\log \sigma| / \kappa$ , c'est-à-dire pour  $t \simeq \sqrt{\varepsilon |\log \sigma|}$ . Finalement, un résultat similaire au théorème 4.4 [BG02d, Théorème 2.12] montre que pour  $t > \tau_{\mathcal{D}}$ , les solutions sont à nouveau confinées dans un tube approchant  $\pm x^*(t)$  (Figure 5).

En résumé, il y a trois régimes selon l'intensité du bruit:

1. Si  $\sigma \leq e^{-K/\varepsilon}$ , le temps de retard est macroscopique comme dans le cas déterministe.
2. Si  $e^{-1/\varepsilon^p} \leq \sigma \leq \sqrt{\varepsilon}$ ,  $p < 1$ , la transition a lieu après un temps de retard microscopique d'ordre  $\sqrt{\varepsilon |\log \sigma|} \leq \varepsilon^{(1-p)/2}$ .
3. Si  $\sigma \geq \sqrt{\varepsilon}$ , les trajectoires sont délocalisées à partir d'un temps d'ordre  $\sigma$  avant la bifurcation.

## 5 Résonance stochastique

Nous avons vu dans la section précédente que le bruit pouvait occasionner des transitions entre variétés lentes, avec probabilité non-négligeable, *avant* qu'un point de bifurcation ne soit atteint. En fait, il n'est même pas nécessaire qu'il y ait un point de bifurcation, l'existence d'une bifurcation évitée, dans laquelle plusieurs parties de la variété lente s'approchent sans se toucher, peut être suffisante à rendre des transitions probables. Lorsqu'il est accompagné d'une dynamique lente périodique, ce mécanisme peut donner lieu au phénomène de *résonance stochastique*.

### 5.1 Quelques résultats antérieurs

Le phénomène de résonance stochastique a été initialement introduit dans [BSV81] (voir aussi [BPSV83]) dans le but de proposer une explication de l'apparence régulière d'époques glaciaires (c.f. [BG02c] pour une description de leur modèle). Depuis, la résonance stochastique a été observée dans de nombreux systèmes physiques et biologiques, voir par exemple [MW95, WM95, GHJM98].

Pour être concrets, considérons l'équation

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} [x_t - x_t^3 - A \cos(y_t)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t, \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Elle décrit le mouvement suramorti d'une particule dans un potentiel  $V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + A \cos(y)x$ , où le dernier terme agit comme une force déterministe périodique. Si  $A < A_c := 2/(3\sqrt{3})$ , alors la variété lente, d'équation  $x - x^3 = A \cos y$ , comporte deux branches stables, que nous noterons  $x_-^*(y) < x_+^*(y)$ , séparées par une branche instable  $x_0^*(y)$ . Soit  $H = V(0, \pi/2) - V(1, \pi/2) = 1/4$  la hauteur de la barrière de potentiel pour  $\cos y = 0$ . Les cas suivants peuvent se présenter:

1. si  $\sigma = 0$  et  $0 < A < A_c$ , les trajectoires restent toujours voisines de l'une des variétés stables (c'est-à-dire l'un des puits de potentiel), sans jamais visiter l'autre variété stable;

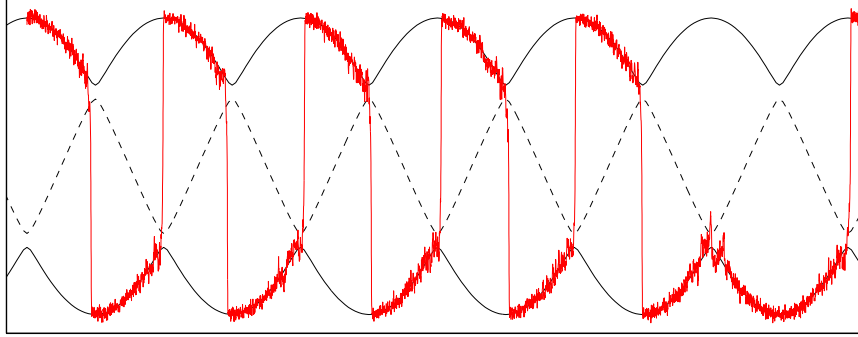


FIGURE 6. Une trajectoire (trait fin) de l'équation (5.1) présentant le phénomène de résonance stochastique. La trajectoire saute presque périodiquement d'une variété stable à l'autre (courbes en gras) en passant par dessus la barrière de potentiel (en traitillé).

2. si  $\sigma > 0$  et  $A = 0$ , on a affaire au problème bien connu du passage stochastique par-dessus une barrière de potentiel: les transitions ont lieu à des temps aléatoires, dont la loi converge, pour  $\sigma \rightarrow 0$ , vers la loi exponentielle [Day83], d'espérance d'ordre  $\varepsilon e^{2H/\sigma^2}$  (ceci reste vrai pour des potentiels multidimensionnels);
3. si  $\sigma > 0$  et  $0 < A < A_c$ , la loi des transitions aléatoires sera influencée par le terme périodique  $-A \cos(y)x$ , qui rend ces transitions plus probables à certains instants qu'à d'autres; c'est cette trace du caractère périodique du forçage dans le comportement de  $x_t$  que l'on dénomme résonance stochastique (Figure 6).

Les premières approches mathématiques à ce problème se sont concentrées sur des versions simplifiées de l'équation (5.1). En particulier, le cas où le potentiel  $V(x, y)$  est une fonction constante par morceaux de  $y$  a été considéré dans [BSV81], et plus récemment dans [IP02]. Le cas d'une variable  $x$  discrète, i.e. d'une chaîne de Markov, a été étudié dans [ET82, MW89], puis dans [HI02]. Enfin, les physiciens ont passablement étudié les propriétés spectrales du générateur de (5.1) et la densité de probabilité [Fox89, JH89]. Ces différentes approches montrent en particulier que le phénomène de résonance est le plus prononcé pour une période  $1/\varepsilon$  proche du temps de Kramers  $e^{2H/\sigma^2}$ .

Une description du comportement des trajectoires a été donnée pour la première fois par Freidlin dans [Fre00], en utilisant la théorie des grandes déviations. Ses résultats montrent que les trajectoires convergent en probabilité, au sens de la norme  $L^p$ , vers une fonction périodique  $P(t)$ :

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \varepsilon = e^{-2H_1/\sigma^2}}} \mathbb{P} \left\{ \int_0^T |x_t - P(t)|^p dt > \delta \right\} = 0 \quad (5.2)$$

pour  $H_1 > H$ , tous  $\delta, T > 0$  fixés et  $p \geq 1$ . La fonction  $P(t)$  suit le fond d'un puits de potentiel, en changeant de puits deux fois par période. Ce résultat s'applique à une classe de systèmes très générale, en revanche il ne donne pas d'informations sur la vitesse de convergence, ni sur sa dépendance de  $\delta$  et  $p$ .

## 5.2 Description des trajectoires

Nous considérons ici le cas où  $a_0 = A_c - A$  est un petit paramètre, ce qui a pour effet de rendre probables les transitions sur des échelles de temps sous-exponentielles. Pour

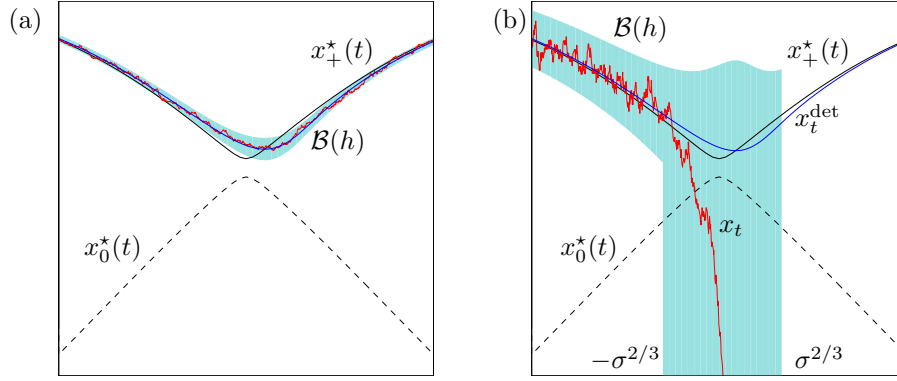


FIGURE 7. Trajectoires près d’une bifurcation noeud–col évitée. (a) Pour  $\sigma < a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ , les trajectoires restent confinées, avec grande probabilité, dans un voisinage  $\mathcal{B}(h)$  de la solution déterministe  $x_t^{\text{det}}$ . (b) Pour  $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ , les trajectoires ont toutes les chances de franchir la barrière de potentiel en  $x_0^*(t)$  durant l’intervalle  $[-\sigma^{2/3}, \sigma^{2/3}]$ .

pour simplifier la présentation, nous nous concentrons sur l’équation (5.1), bien que les résultats de [BG02e] s’appliquent à des équations plus générales.

Si  $a_0$  est petit mais positif, on est dans une situation de bifurcation noeud–col évitée (Figure 7). Lorsque  $\cos y = -1$ , la variété stable  $x_+^*(y)$  et la variété instable  $x_0^*(y)$  s’approchent à une distance d’ordre  $\sqrt{a_0}$ , et la barrière de potentiel a une hauteur d’ordre  $a_0^{3/2}$ . Nous choisissons l’origine du temps de manière que  $\cos y_t = -1$  en  $t = 0$ .

Dans le cas déterministe  $\sigma = 0$ , une généralisation de la proposition 2.7 donne (c.f. [BG02e, Théorème 2.5])

$$\begin{aligned} x_t^{\text{det}} - x_+^*(y_t) &\asymp \frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \leq -c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}), \\ x_t^{\text{det}} - x_c &\asymp \sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon} && \text{pour } |y_t| \leq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \\ x_t^{\text{det}} - x_+^*(y_t) &\asymp -\frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \geq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

pour une constante  $c_0 > 0$ , où  $x_c = 1/\sqrt{3}$  est le “centre” de la bifurcation évitée. Nous pouvons donc essayer d’imiter le théorème 4.2 en définissant à nouveau

$$\mathcal{B}(h) = \left\{ (x, t) : \frac{(x - x_t^{\text{det}})^2}{\zeta(t)} < h^2 \right\}, \quad (5.4)$$

avec ici,

$$\zeta(t) \asymp \frac{1}{|\partial_x f(x_t^{\text{det}}, t)|} \asymp \frac{1}{|t| \vee \sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}}. \quad (5.5)$$

On obtient alors, comme au théorème 4.2,

**Théorème 5.1** ([BG02e, Théorème 2.6]). *Il existe une constante  $h_0$  telle que pour  $h \leq h_0[|t|^{3/2} \vee a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}]$  et  $t \leq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon})$ ,*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq \text{const} \left( \frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-\kappa h^2 / 2\sigma^2}, \quad (5.6)$$

avec  $\kappa = 1 - \mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(h/[|t|^{3/2} \vee a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}])$ .

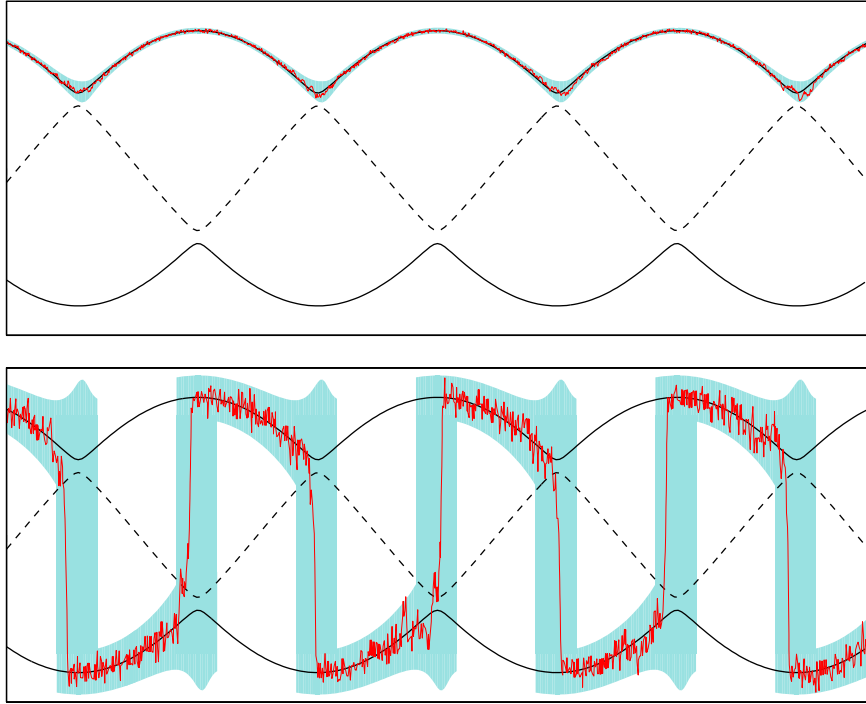


FIGURE 8. Mêmes régimes que sur la figure 7, représentés sur plusieurs périodes. Nos résultats montrent qu'avec grande probabilité, les trajectoires restent confinées dans les domaines ombrés, qui suivent toujours la même variété stable en bruit faible, et sautent d'une variété à l'autre en bruit fort.

Comme précédemment, nous avons donc deux cas à considérer:

1. si  $\sigma < a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ , alors les trajectoires restent concentrées dans un voisinage d'ordre  $\sigma \sqrt{\zeta(t)}$  de la solution déterministe, et des transitions vers l'autre variété stable sont peu probables (Figure 7a et Figure 8a);
2. si  $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ , alors le résultat ne s'applique que pour  $t \leq -\sigma^{2/3}$  (Figure 7b).

Il suit du théorème 5.1 que le temps de premier passage  $\tau^0$ , disons, en  $x = 0$ , satisfait

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 < t \} \leq \text{const} \left( \frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-\kappa [(-t^3) \vee a_0^{3/2} \vee \varepsilon^{3/2}] / \sigma^2} \quad (5.7)$$

pour tous les  $t$  dans un voisinage de 0 dans le premier cas, et pour  $t \leq -\sigma^{2/3}$  dans le second cas. Le comportement pour  $t \geq -\sigma^{2/3}$  dans le second cas est alors décrit par l'analogie suivant du théorème 4.3.

**Théorème 5.2** ([BG02e, Théorème 2.7]). *Si  $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ , alors il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que*

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 \geq t \} \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ -\frac{\kappa \sigma^{2/3} (t + \sigma^{2/3})}{\varepsilon |\log \sigma|} \right\} + e^{-\kappa / \sigma^2} \quad (5.8)$$

pour  $-\sigma^{2/3} + \mathcal{O}(\varepsilon) \leq t \leq \sigma^{2/3}$ .

Par conséquent, le système a une probabilité d'ordre  $1 - e^{-\kappa \sigma^{4/3} / \varepsilon |\log \sigma|}$  d'effectuer une transition dans l'intervalle de temps  $-\sigma^{2/3} \leq t \leq \sigma^{2/3}$ . Une fois le niveau 0 atteint, le

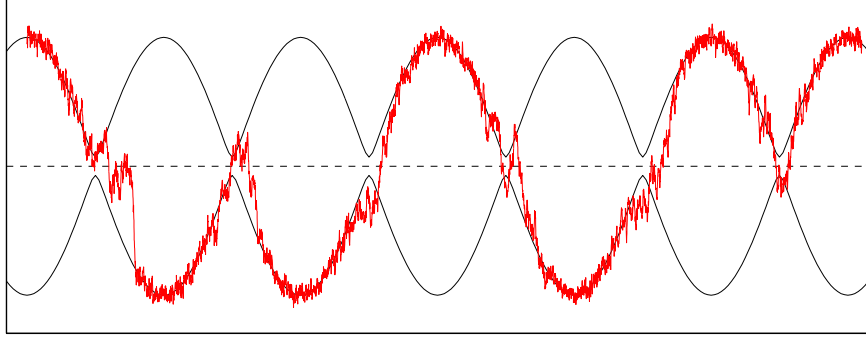


FIGURE 9. Trajectoire typique de l'équation symétrique (5.9). En bruit fort, la trajectoire change de puits à chaque bifurcation fourche évitée avec probabilité proche de  $1/2$ .

processus a une forte probabilité d'atteindre rapidement la variété lente en  $x_-(t)$ , qu'il suit pendant une demi-période jusqu'à la transition suivante (Figure 8b).

Il est à relever que le seuil  $a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$  de l'intensité du bruit rendant des transitions probables ne tend pas vers 0 avec le paramètre  $a_0$  contrôlant la hauteur minimale de la barrière de potentiel. Ceci est un effet purement dynamique, dû au fait que même si la barrière de potentiel disparaît, elle le fait durant un intervalle de temps trop court pour augmenter la probabilité de transition.

Remarquons finalement que des résultats analogues peuvent être obtenus dans le cas d'un potentiel symétrique, dont la barrière est modulée périodiquement, comme dans le cas

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} [(a_0 + 1 - \cos y_t)x_t - x_t^3] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t, \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Le petit paramètre  $a_0$  correspond à nouveau à la hauteur minimale de la barrière de potentiel. Les instants  $t$  tels que  $\cos y_t = 1$  correspondent à une bifurcation fourche évitée. Les résultats sont similaires aux précédents, avec d'autres exposants. Ainsi,

1. si  $\sigma < \sigma_c = a_0 \vee \varepsilon^{2/3}$ , les trajectoires restent concentrées dans un voisinage d'ordre  $\sigma/(|t| \vee \sqrt{\sigma_c})$  de la solution déterministe, et des transitions vers l'autre variété stable sont exponentiellement peu probables;
2. si  $\sigma \geq \sigma_c$ , les trajectoires peuvent passer d'un puits de potentiel à l'autre durant l'intervalle de temps  $[-\sqrt{\sigma}, \sqrt{\sigma}]$ ; après cet intervalle de transition, elles suivront à nouveau l'une des branches stables, et auront changé de branche avec probabilité exponentiellement proche de  $1/2$  (Figure 9).

## 6 Hystérésis dynamique

L'hystérésis est un phénomène de mémoire pouvant apparaître lorsqu'on tente d'approximer la dynamique d'un système rapide-lent par sa restriction à la variété lente. Dans la limite adiabatique, l'hystérésis apparaît comme un phénomène purement statique, souvent modélisé par un opérateur intégral [May91, MNZ93]. Pourtant, la manière dont les cycles d'hystérésis changent avec le paramètre adiabatique, et en particulier leur aire (qui mesure la dissipation d'énergie dans de nombreuses applications), peut être non triviale. Différentes études, d'abord surtout numériques [RKP90, JGRM90], ont en effet révélé

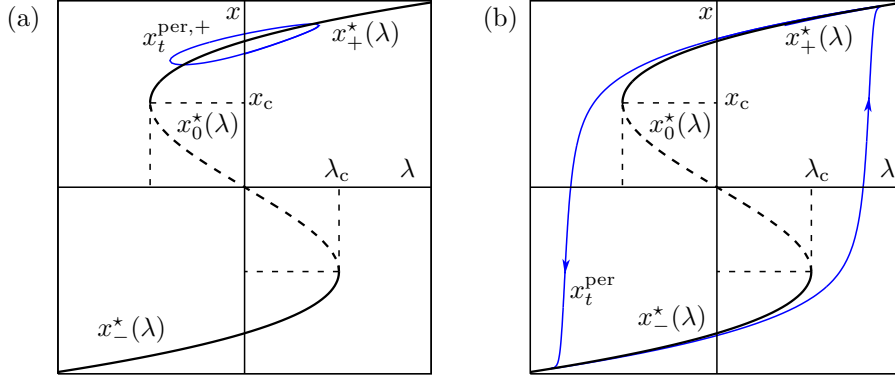


FIGURE 10. Régimes d'hystérésis dans le cas déterministe. (a) Si  $A \leq \lambda_c + \gamma_0 \varepsilon$ , les trajectoires sont attirées par un cycle d'aire  $\mathcal{A}(\varepsilon) \simeq A\varepsilon$ . (b) Si  $A \geq \lambda_c + \gamma_1 \varepsilon$ , les solutions sont attirées par un cycle dont l'aire satisfait  $\mathcal{A}(\varepsilon) - \mathcal{A}_0 \simeq \varepsilon^{2/3}(A - \lambda_c)^{1/3}$ .

que cette aire avait une dépendance en loi de puissance du paramètre adiabatique. Il est alors important de comprendre l'effet d'un bruit sur ces lois d'échelle, d'autant plus que le bruit est présent dans de nombreuses applications où l'hystérésis joue un rôle: ferroaimants [Mar77], lasers [JGRM90, ME84], courants marins [Ces94, Mon02, THST03].

## 6.1 Cas déterministe

Afin de simplifier la présentation, nous limiterons la discussion à l'exemple

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - x^3 + \lambda(t) \\ \lambda(t) &= A \cos t. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Le terme  $\lambda(t)$  peut être considéré soit comme une force extérieure périodique, soit comme une solution périodique d'une EDO lente. Nous dirons que les solutions de (6.1) *ont un comportement d'hystérésis* si, dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $x_t$  ne dépend pas que de la valeur instantanée  $\lambda(t)$ , mais également de l'histoire  $\{\lambda(s)\}_{s \leq t}$ .

Le système (6.1) admet une variété lente d'équation  $x^3 - x = \lambda(t)$ , composée de deux branches stables  $x_\pm^*(\lambda)$  et d'une branche instable  $x_0^*(\lambda)$ , se rencontrant en deux points de bifurcation noeud-col  $\pm(x_c, -\lambda_c)$  où  $x_c = 1/\sqrt{3}$  et  $\lambda_c = 2/(3\sqrt{3})$  (Figure 10).

On peut alors montrer (c.f. [BK99] et [BG02b, Théorème 2.2]) qu'il existe des constantes  $\gamma_1 > \gamma_0 > 0$  telles que

1. Si  $A \leq \lambda_c + \gamma_0 \varepsilon$ , presque toute solution de (6.1) est attirée par une solution périodique  $x_t^{\text{per}, \pm}(\varepsilon)$ , satisfaisant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_t^{\text{per}, \pm}(\varepsilon) = x_\pm^*(\lambda(t)), \quad (6.2)$$

où le signe  $\pm$  dépend de la condition initiale. Selon notre définition, il n'y a donc pas d'hystérésis. Les solutions périodiques  $x_t^{\text{per}, \pm}(\varepsilon)$ , projetées dans le plan  $(\lambda, x)$ , sont des cycles renfermant une surface d'ordre  $A\varepsilon$  (Figure 10a).

2. Si  $A \geq \lambda_c + \gamma_1 \varepsilon$ , toute solution de (6.1) est attirée par une solution périodique  $x_t^{\text{per}}(\varepsilon)$ , satisfaisant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_t^{\text{per}}(\varepsilon) = \begin{cases} x_+^*(\lambda(t)) & \text{si } \lambda(t) > \lambda_c \text{ ou si } \lambda(t) > -\lambda_c \text{ et } \lambda'(t) < 0, \\ x_-^*(\lambda(t)) & \text{autrement.} \end{cases} \quad (6.3)$$



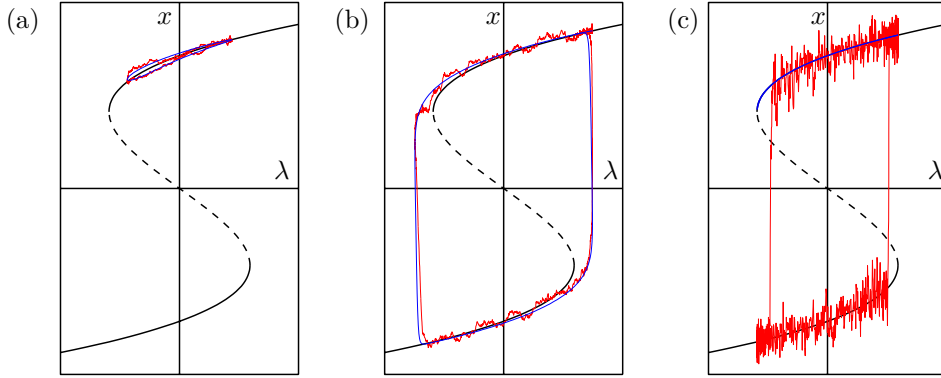


FIGURE 11. Régimes d'hystérésis dans le cas stochastique. (a) Régime d'amplitude faible, (b) régime d'amplitude forte, (c) régime de bruit fort.

Dans ce cas, il y a donc un comportement d'hystérésis. La projection sur le plan  $(\lambda, x)$  de  $x_t^{\text{per}}(\varepsilon)$  renferme une surface  $\mathcal{A}(\varepsilon)$  satisfaisant  $\mathcal{A}(\varepsilon) - \mathcal{A}_0 \asymp \varepsilon^{2/3}(A - \lambda_c)^{1/3}$ , où  $\mathcal{A}_0 = 3/2$  est l'aire d'hystérésis statique (Figure 10b).

## 6.2 Cas stochastique

Considérons maintenant l'EDS

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}[x_t - x_t^3 + \lambda(t)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t, \quad (6.4)$$

avec de nouveau  $\lambda(t) = A \cos t$ . Nous posons  $A = \lambda_c + a_0$ , où le paramètre  $a_0$  peut être positif ou négatif. Nous nous intéressons en particulier à l'aire aléatoire

$$\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, \sigma)(\omega) = - \int_{-\pi}^{\pi} x_t(\omega) \lambda'(t) dt. \quad (6.5)$$

Les résultats de la section précédente montrent que si  $A < \lambda_c$ , le comportement des trajectoires est qualitativement différent selon la valeur relative de  $\sigma$  et  $a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ . Les résultats sur la bifurcation noeud-col montrent par ailleurs qu'une transition similaire a lieu pour  $A > \lambda_c$ .

Nous épargnons ici au lecteur les détails, assez techniques, des résultats de [BG02b], et nous contenterons de les résumer de la manière suivante. On peut distinguer trois régimes principaux:

1. **Régime d'amplitude faible:**  $a_0 \leq \gamma_0 \varepsilon$  et  $\sigma \leq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$  [BG02b, Théorème 2.3].  
Les trajectoires restent concentrées près de l'une des branches stables avec probabilité exponentiellement proche de 1 (Figure 11a). Le comportement de l'aire diffère selon les deux sous-cas suivants:
  - (a) si  $a_0 \geq -\varepsilon$  ou  $\sigma \leq \sqrt{\varepsilon}/|\log|a_0||$ , la loi de  $\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, \sigma)$  est proche d'une loi normale, de variance d'ordre  $\sigma^2 \varepsilon$ , et d'espérance d'ordre  $A \varepsilon$ ;
  - (b) si  $a_0 < -\varepsilon$  et  $\sigma > \sqrt{\varepsilon}/|\log|a_0||$ , la loi de l'aire n'est pas nécessairement proche d'une Gaussienne; elle a une espérance et un écart-type d'ordre  $\sigma^2 |\log|a_0||$  au plus, et les queues de la distribution décroissent exponentiellement avec paramètre  $\sigma^2 |\log|a_0||$ .
2. **Régime d'amplitude forte:**  $a_0 \geq \gamma_1 \varepsilon$  et  $\sigma \leq (\varepsilon \sqrt{a_0})^{1/2}$  [BG02b, Théorème 2.4].  
La distribution de  $\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, \sigma)$  est localisée autour de la valeur déterministe, qui est d'ordre  $\mathcal{A}_0 + (\varepsilon \sqrt{a_0})^{2/3}$  (Figure 11b). De plus,

- (a) si  $\sigma \leq (\varepsilon\sqrt{a_0})^{5/6}$ , nous obtenons que la loi de  $\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, \sigma)$  est proche d'une loi normale de variance d'ordre  $\sigma^2(\varepsilon\sqrt{a_0})^{1/3}$ , et d'espérance d'ordre  $\mathcal{A}_0 + (\varepsilon\sqrt{a_0})^{2/3}$ ;
  - (b) si  $(\varepsilon\sqrt{a_0})^{5/6} < \sigma \leq (\varepsilon\sqrt{a_0})^{1/2}$ , nous savons seulement montrer que la distribution de  $\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, \sigma)$  est concentrée dans un intervalle de taille  $(\varepsilon\sqrt{a_0})^{2/3}$  autour de  $\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, 0)$ .
3. **Régime de bruit fort:**  $a_0 \leq \varepsilon$  et  $\sigma > (|a_0| \vee \varepsilon)^{3/4}$ , ou  $a_0 \geq \varepsilon$  et  $\sigma > (\varepsilon\sqrt{a_0})^{1/2}$  [BG02b, Théorème 2.5].

La distribution de l'aire est concentrée autour d'une valeur de référence déterministe  $\hat{\mathcal{A}}$ , satisfaisant  $\hat{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_0 \asymp -\sigma^{4/3}$  (Figure 11c). En outre,

- (a) si  $a_0 \leq \varepsilon$  ou  $\sigma > a_0^{3/4}$ , les queues  $\mathbb{P}\{|\mathcal{A}(\varepsilon, a_0, \sigma) - \hat{\mathcal{A}}| > H\}$  décroissent comme  $e^{-\text{const} H^{3/2}/\sigma^2}$  vers la droite, et comme  $e^{-\text{const} H/(\sigma^2 \vee \varepsilon)|\log \sigma|}$  vers la gauche;
- (b) si  $a_0 > \varepsilon$  et  $\sigma \leq a_0^{3/4}$ , le comportement est similaire, mais avec un exposant légèrement différent pour la décroissance vers la gauche.

Le point remarquable est que dans le régime de bruit fort, la surface typique des cycles d'hystérésis ne dépend que du bruit, indépendamment de l'amplitude et de la fréquence de la force extérieure, et est plus petite que l'aire d'hystérésis statique  $\mathcal{A}_0$ . Ceci est évidemment dû au fait que près d'un point de bifurcation, le bruit peut occasionner des transitions avec probabilité non négligeable, sans ou avant que les variétés lentes ne se touchent.

## 7 Passage à travers une orbite périodique instable

Les sections précédentes ont fait apparaître l'importance de la transition diffusive, sous l'effet du bruit, à travers une variété adiabatique instable. Dans cette dernière section, nous examinons ce phénomène de manière plus détaillée, dans le cas particulier où les variables rapide et lente sont toutes deux unidimensionnelles, et où la variété instable est une orbite périodique, comme c'est le cas, par exemple, dans l'équation 5.1. Par contre, nous ne nous restreignons pas au seul régime adiabatique: notre but est plutôt de comprendre la dépendance de la densité des temps de passage de la période de l'orbite instable, pour toutes les valeurs possibles de cette période.

### 7.1 Le problème de sortie pour une diffusion

Le problème qui nous occupe ici est un cas particulier du problème de sortie d'une diffusion d'un domaine  $\mathcal{D}$ . Considérons une EDS de la forme

$$dx_t = f(x_t) dt + \sigma g(x_t) dW_t. \quad (7.1)$$

Supposons  $\mathcal{D}$  positivement invariant par le flot déterministe. Pour une condition initiale fixée  $x_0 \in \mathcal{D}$ , le problème consiste à déterminer la distribution du temps de première sortie

$$\tau = \inf\{t > 0: x_t \notin \mathcal{D}\}, \quad (7.2)$$

ainsi que celle du lieu de première sortie  $x_\tau \in \partial\mathcal{D}$ . La théorie des grandes déviations permet d'obtenir des informations sur l'asymptotique exponentielle, sous des hypothèses assez faibles sur  $f$  et  $g$  [FW98]. Des résultats typiques sont l'existence d'un nombre  $\bar{V}$  tel que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^2 \log \mathbb{E}\{\tau\} = \bar{V} \quad (7.3)$$

et

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{P}\{e^{(\bar{V}-\delta)/\sigma^2} \leq \tau \leq e^{(\bar{V}+\delta)/\sigma^2}\} = 1 \quad (7.4)$$

pour toute constante  $\delta > 0$ . Le nombre  $\bar{V}$  est la solution d'un principe variationnel, c'est la valeur minimale du quasipotentiel sur le bord  $\partial\mathcal{D}$ . Si ce minimum est atteint en un point unique  $x^* \in \partial\mathcal{D}$ , la distribution de  $x_\tau$  est concentrée autour de  $x^*$ , c'est-à-dire  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{P}\{\|x_\tau - x^*\| > \delta\} = 0$ .

Le résultat (7.4) peut donner à penser que la distribution de  $\tau$  est concentrée au voisinage de  $e^{\bar{V}/\sigma^2}$ , mais en fait, rien n'est moins certain, puisque  $\delta$  ne doit pas dépendre de  $\sigma$ , ce qui autorise en fait une distribution très étalée de  $\tau/\mathbb{E}\{\tau\}$ .

Sous des hypothèses supplémentaires, des résultats plus précis sont connus. Supposons par exemple que  $f(x) = -\nabla U(x)$  dérive d'un potentiel  $U(x)$ , et que  $g(x) = \mathbb{1}$ . Prenons pour  $\mathcal{D}$  un domaine (connexe) contenant un minimum non-dégénéré de  $U$  comme unique point critique, situé en  $x_0 \in \mathcal{D}^\circ$ . Soit  $U_0 = U(x_0)$  et  $U_1 > U_0$  la valeur minimale du potentiel sur le bord  $\partial\mathcal{D}$ . Alors le minimum du quasipotentiel est donné par  $\bar{V} = 2(U_1 - U_0)$ . Day [Day83] a montré que la loi de  $\tau$  tend vers une exponentielle:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{P}\{\tau > s\mathbb{E}\{\tau\}\} = e^{-s}. \quad (7.5)$$

Par ailleurs, l'espérance de  $\tau$  s'écrit

$$\mathbb{E}\{\tau\} = c(\sigma) e^{\bar{V}/\sigma^2}. \quad (7.6)$$

Divers développements asymptotiques pour le préfacteur ont été construits (c.f. par exemple [Aze85, FJ92]).

Le cas où le domaine  $\mathcal{D}$  contient un point selle  $x^*$  du potentiel comme second point critique est déjà beaucoup plus difficile à étudier. L'expression (7.6) reste vraie, toujours avec  $\bar{V} = 2(U_1 - U_0)$  où  $U_1 = U(x^*)$ , mais avec un préfacteur  $c(\sigma)$  différent. Sa valeur était connue depuis longtemps dans le cas unidimensionnel [Eyr35, Kra40] (elle dépend de la courbure de  $U$  en  $x_0$  et  $x^*$ ). Pour des dimensions supérieures, bien que la valeur de  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} c(\sigma)$  était conjecturée depuis longtemps, et des arguments perturbatifs ont été avancés (c.f. par exemple [MS97]), une preuve rigoureuse n'en a été donnée que récemment [BEGK02, BGK02].

La situation où  $\partial\mathcal{D}$  est une orbite périodique instable, qui nous intéresse ici, est moins bien comprise. Dans ce cas, le quasipotentiel est constant sur  $\partial\mathcal{D}$ , et par conséquent la loi de  $x_\tau$  est uniforme dans l'asymptotique exponentielle. Day a découvert un phénomène surprenant [Day92, Day96]: lorsque  $\sigma$  tend vers 0, la densité de  $x_\tau$  tourne autour du bord de  $\mathcal{D}$ , proportionnellement à  $|\log \sigma|$ . Maier et Stein [MS96] ont obtenu une dépendance périodique de  $|\log \sigma|$  pour le taux de sortie  $d_t \mathbb{P}\{x_t \in \mathcal{D}\}$ , à l'aide d'approximations WKB. Leur approche est basée sur l'intuition que dans la limite  $\sigma \rightarrow 0$ , les trajectoires, conditionnées sur le fait de quitter  $\mathcal{D}$ , se concentrent près de certaines courbes déterministes, qui spiralent géométriquement vers  $\partial\mathcal{D}$ . Une transition devient possible une fois un  $\sigma$ -voisinage de  $\partial\mathcal{D}$  atteint, ce qui arrive en un temps dépendant périodiquement de  $|\log \sigma|$ .

## 7.2 Modèle à deux niveaux

Notre objectif est de mieux comprendre et d'affiner le résultat de Day, dans le cadre d'un modèle simplifié [BG04]. Une extension au cas général est en cours de réalisation [BG03b]. Nous supposons que  $\mathcal{D}^\circ$  contient une orbite périodique stable, comme c'est le cas pour la

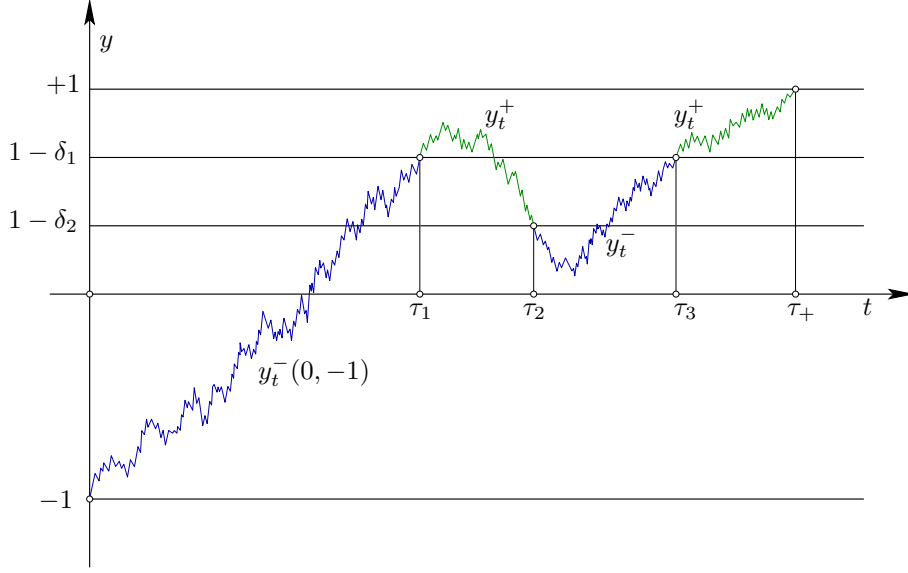


FIGURE 12. Définition du processus stochastique  $y_t$ . Le processus alterne entre les processus Gaussiens  $y_t^\pm$  chaque fois qu'un niveau  $1 - \delta_1$  ou  $1 - \delta_2$  est atteint.

résonance stochastique, mais aussi pour certains modèles de synchronisation. Le point de départ est fourni par deux EDS linéaires

$$\begin{aligned} dy_t^- &= -a(t)(y_t^- + 1) dt + \sigma g(t) dW_t, \\ dy_t^+ &= a(t)(y_t^+ - 1) dt + \sigma g(t) dW_t, \end{aligned} \quad (7.7)$$

où  $a(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques, bornées inférieurement par une constante  $a_0 > 0$ . Le temps modulo  $T$  est identifié avec une variable angulaire. Pour  $\sigma = 0$ , la première équation admet une orbite périodique stable en  $y^- = -1$ , et la seconde une orbite instable en  $y^+ = +1$ .

Dénotons par  $y_t^\pm(t_0, y_0)$  les processus de condition initiale  $y_{t_0}^\pm = y_0$ . Fixons des constantes  $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ . Nous construisons un processus stochastique  $\{y_t\}_{t \geq 0}$  de la manière suivante:  $y_t = y_t^-(0, -1)$  jusqu'au temps  $\tau_1$  de premier passage en  $y = 1 - \delta_1$ . Puis,  $y_t = y_t^+(1 - \delta_1, \tau_1)$  jusqu'à ce qu'on atteigne le niveau  $1 - \delta_2$  (Figure 12), et ainsi de suite:

$$y_t = \begin{cases} y_t^-(0, -1) & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau_1 = \inf\{t > 0: y_t^-(0, -1) > 1 - \delta_1\}, \\ y_t^+(\tau_1, 1 - \delta_1) & \text{pour } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 = \inf\{t > \tau_1: y_t^+(\tau_1, 1 - \delta_1) < 1 - \delta_2\}, \\ y_t^-(\tau_2, 1 - \delta_2) & \text{pour } \tau_2 \leq t \leq \tau_3 = \inf\{t > \tau_2: y_t^-(\tau_2, 1 - \delta_2) > 1 - \delta_1\}, \\ \dots & \end{cases} \quad (7.8)$$

Notre but est de calculer la densité  $p_+(t)$  du temps de premier passage  $\tau_+$  en  $+1$  (qui détermine immédiatement le lieu de premier passage).

Sous certaines hypothèses détaillées dans [BG04], on obtient alors que  $p_+(t)$  s'écrit sous la forme

$$p_+(t) = c(t, \sigma) e^{-R^2/2\sigma^2}, \quad (7.9)$$

où  $R$  est une constante indépendante de  $t$  et  $\sigma$  (c'est la valeur du quasipotential sur le bord). Le préfacteur  $c(t, \sigma)$  dépend de la valeur de  $\alpha(t) = \int_0^t a(s) ds$ , et de l'exposant de Lyapunov  $\lambda = \alpha(T)/T$  (Figure 13):

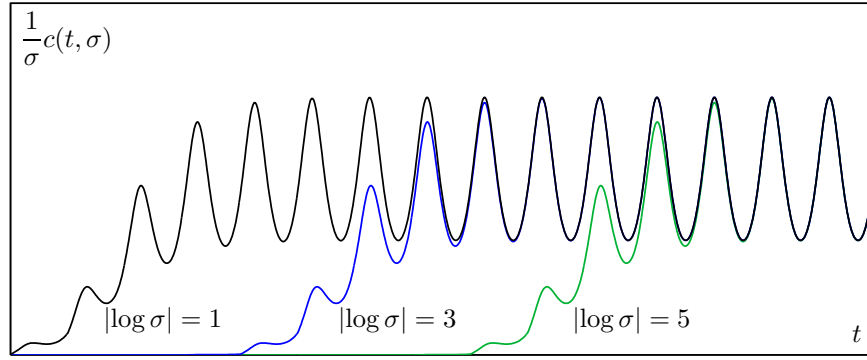


FIGURE 13. Comportement du préfacteur de la densité de premier passage en  $+1$ , pour différentes valeurs de  $\sigma$ . Après une phase transitoire de durée  $2|\log \sigma|/\lambda$ , celui-ci est proche d'une fonction périodique durant un long régime métastable.

1. Si  $0 \leq \alpha(t) < 2|\log \sigma|$ , on est dans un régime transitoire dans lequel

$$c(t, \sigma) \leq \text{const} \frac{1}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{L e^{-\alpha(t)}}{\sigma^2}\right\}, \quad (7.10)$$

pour une constante  $L > 0$ .

2. Pour  $2|\log \sigma| \leq \alpha(t) \leq e^{\text{const}/\sigma^2}$ ,

$$c(t, \sigma) = \sigma C_0 \theta'(t) P\left(\frac{|\log \sigma| - \theta(t)}{\lambda T}\right) [1 + r(\sigma)], \quad (7.11)$$

où

- $C_0$  est une constante (connue explicitement);
- $r(\sigma)$  est un reste d'ordre  $\sigma + e^{-\alpha(t)}/\sigma^2$ ;
- $\theta(t)$  est une fonction connue, monotone croissante, telle que  $\theta(t + T) = \theta(t) + \lambda T$ , qui décrit l'angle de rotation de  $p_+(t)$  autour de  $\partial\mathcal{D}$  en fonction de  $|\log \sigma|$ ;
- $P(x) = P_{\lambda T}(x)$  est une fonction universelle, ne dépendant que de  $\lambda T = \alpha(T)$ , donnée par

$$P_{\lambda T}(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A(\lambda T(\ell - x)), \quad \text{avec} \quad A(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} \exp\left\{-\frac{1}{2} e^{-2x}\right\}. \quad (7.12)$$

Nous trouvons donc que le phénomène décrit par Day s'applique ici au temps de sortie également, du moins sur des échelles de temps métastables. En fait, nous conjecturons que pour des temps arbitraires, (7.9) se généralise en

$$p_+(t) = c(t, \sigma) e^{-R^2/2\sigma^2} \exp\left\{-\theta(t) e^{-R^2/2\sigma^2}\right\}, \quad (7.13)$$

en analogie avec (7.5).

La forme particulière de la fonction  $P(x)$  provient du fait suivant. Pour une valeur fixée de  $\theta(t)$ , disons  $\theta(t) = 0$ , et  $[t/T] = n$ , le  $\ell$ -ième terme de la somme (7.12) s'explique comme

$$\frac{1}{2\sigma^2} e^{-2\ell\lambda T} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} e^{-2\ell\lambda T}\right\}. \quad (7.14)$$

Ce terme provient des trajectoires effectuant  $n - \ell$  tours avant d'atteindre  $1 - \delta_1$ , puis  $\ell$  tours avant d'atteindre  $+1$ .

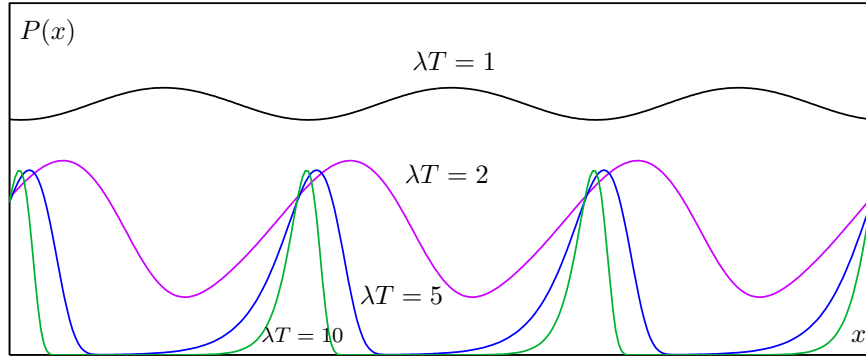


FIGURE 14. Le profil universel  $P(x)$ , représenté sur trois périodes, pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda T$ .

La fonction  $P(x)$  approche la valeur constante  $1/2\lambda T$  lorsque  $T \rightarrow 0$ , et devient fortement piquée en  $k - \log 2/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , dans la limite adiabatique  $T \rightarrow \infty$  (Figure 14), en conséquence du fait qu'alors un seul terme contribue à la somme.

Nous pouvons maintenant faire le lien avec la résonance stochastique étudiée dans la section 5. Commençons par effectuer la transformation du temps  $s = \theta(t)/T$  dans (7.13), ce qui donne une nouvelle densité

$$\tilde{p}_+(s) \simeq \sigma C_0 P_{\lambda T} \left( \frac{|\log \sigma|/T - s}{\lambda} \right) T e^{-R^2/2\sigma^2} e^{-sT} e^{-R^2/2\sigma^2}. \quad (7.15)$$

La figure 13 montre une situation où  $T \ll e^{R^2/2\sigma^2}$ , et donc les oscillations de  $p_+$  ont une amplitude presque constante. La résonance stochastique, par contre, est la plus prononcée pour  $T \simeq e^{R^2/2\sigma^2}$ , et dans ce cas (7.15) décrit une exponentielle décroissante, modulée par le profil  $P_{\lambda T}$  qui est fortement piqué dans ce régime. Par conséquent, la grande majorité des trajectoires atteindront l'orbite instable dans un intervalle de temps court relativement à  $T$ , durant la première période.

## Références

- [Arn98] Ludwig Arnold, *Random dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Aze85] Robert Azencott, *Petites perturbations aléatoires des systèmes dynamiques: développements asymptotiques*, Bull. Sci. Math. (2) **109** (1985), 253–308.
- [BEGK02] Anton Bovier, Michael Eckhoff, Véronique Gayrard, and Markus Klein, *Metastability in reversible diffusion processes I. Sharp asymptotics for capacities and exit times*, Preprint WIAS-767, 2002.
- [Bel60] Richard Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [Ber00] Nils Berglund, *Control of dynamic Hopf bifurcations*, Nonlinearity **13** (2000), no. 1, 225–248.
- [BG02a] Nils Berglund and Barbara Gentz, *Beyond the Fokker-Planck equation: Pathwise control of noisy bistable systems*, J. Phys. A **35** (2002), no. 9, 2057–2091, DOI 10.1088/0305-4470/35/9/301.
- [BG02b] ———, *The effect of additive noise on dynamical hysteresis*, Nonlinearity **15** (2002), no. 3, 605–632, DOI 10.1088/0951-7715/15/3/305.
- [BG02c] ———, *Metastability in simple climate models: Pathwise analysis of slowly driven Langevin equations*, Stoch. Dyn. **2** (2002), 327–356, DOI 10.1142/S0219493702000455.
- [BG02d] ———, *Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise*, Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 3, 341–388, DOI 10.1007/s004400100174.
- [BG02e] ———, *A sample-paths approach to noise-induced synchronization: Stochastic resonance in a double-well potential*, Ann. Appl. Probab. **12** (2002), 1419–1470.
- [BG03a] ———, *Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations*, J. Differential Equations **191** (2003), 1–54, DOI 10.1016/S0022-0396(03)00020-2.
- [BG03b] ———, *On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit II: The general case*, in preparation, 2003.
- [BG04] ———, *On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit I: Two-level model*, J. Statist. Phys. **114** (2004), 1577–1618.
- [BGK02] Anton Bovier, Véronique Gayrard, and Markus Klein, *Metastability in reversible diffusion processes II. Precise asymptotics for small eigenvalues*, Preprint WIAS-768, 2002.
- [BK99] Nils Berglund and Hervé Kunz, *Memory effects and scaling laws in slowly driven systems*, J. Phys. A **32** (1999), no. 1, 15–39, DOI 10.1088/0305-4470/32/1/005.
- [BPSV83] Roberto Benzi, Giorgio Parisi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani, *A theory of stochastic resonance in climatic change*, SIAM J. Appl. Math. **43** (1983), no. 3, 565–578.
- [BSV81] Roberto Benzi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani, *The mechanism of stochastic resonance*, J. Phys. A **14** (1981), no. 11, L453–L457.
- [Car81] Jack Carr, *Applications of centre manifold theory*, Applied Mathematical Sciences, vol. 35, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [Ces94] Paola Cessi, *A simple box model of stochastically forced thermohaline flow*, J. Phys. Oceanogr. **24** (1994), 1911–1920.
- [CK00] Fritz Colonius and Wolfgang Kliemann, *The dynamics of control*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2000, with an appendix by Lars Grüne.

- [Day83] Martin V. Day, *On the exponential exit law in the small parameter exit problem*, Stochastics **8** (1983), 297–323.
- [Day92] ———, *Conditional exits for small noise diffusions with characteristic boundary*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 3, 1385–1419.
- [Day96] ———, *Exit cycling for the van der Pol oscillator and quasipotential calculations*, J. Dynam. Differential Equations **8** (1996), no. 4, 573–601.
- [ET82] J.-P. Eckmann and L. E. Thomas, *Remarks on stochastic resonance*, J. Phys. A **15** (1982), L261–L266.
- [Eyr35] H. Eyring, *The activated complex in chemical reactions*, Journal of Chemical Physics **3** (1935), 107–115.
- [Fen79] Neil Fenichel, *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, J. Differential Equations **31** (1979), no. 1, 53–98.
- [FJ92] W. H. Fleming and M. R. James, *Asymptotic series and exit time probabilities*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 3, 1369–1384.
- [Fox89] Ronald F. Fox, *Stochastic resonance in a double well*, Phys. Rev. A **39** (1989), 4148–4153.
- [Fre00] Mark I. Freidlin, *Quasi-deterministic approximation, metastability and stochastic resonance*, Physica D **137** (2000), 333–352.
- [Fre01] ———, *On stable oscillations and equilibriums induced by small noise*, J. Statist. Phys. **103** (2001), 283–300.
- [FW98] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, second ed., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [GHJM98] Luca Gammaitoni, Peter Hänggi, Peter Jung, and Fabio Marchesoni, *Stochastic resonance*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998), 223–287.
- [Gra53] I. S. Gradšteĭn, *Application of A. M. Lyapunov's theory of stability to the theory of differential equations with small coefficients in the derivatives*, Mat. Sbornik N. S. **32(74)** (1953), 263–286.
- [Hab79] Richard Haberman, *Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems*, SIAM J. Appl. Math. **37** (1979), no. 1, 69–106.
- [HI02] Samuel Herrmann and Peter Imkeller, *Barrier crossings characterize stochastic resonance*, Stoch. Dyn. **2** (2002), no. 3, 413–436, Special issue on stochastic climate models.
- [IP02] P. Imkeller and I. Pavlyukevich, *Model reduction and stochastic resonance*, Stoch. Dyn. **2** (2002), no. 4, 463–506.
- [JGRM90] Peter Jung, George Gray, Rajarshi Roy, and Paul Mandel, *Scaling law for dynamical hysteresis*, Phys. Rev. Letters **65** (1990), 1873–1876.
- [JH89] Peter Jung and Peter Hänggi, *Stochastic nonlinear dynamics modulated by external periodic forces*, Europhys. Letters **8** (1989), 505–510.
- [JH91] ———, *Amplification of small signals via stochastic resonance*, Phys. Rev. A **44** (1991), 8032–8042.
- [Kra40] H. A. Kramers, *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions*, Physica **7** (1940), 284–304.
- [LS75] N. R. Lebovitz and R. J. Schaar, *Exchange of stabilities in autonomous systems*, Studies in Appl. Math. **54** (1975), no. 3, 229–260.



- [LS77] ———, *Exchange of stabilities in autonomous systems. II. Vertical bifurcation*, Studies in Appl. Math. **56** (1976/77), no. 1, 1–50.
- [Mar77] Philippe A. Martin, *On the stochastic dynamics of Ising models*, J. Statist. Phys. **16** (1977), no. 2, 149–168.
- [May91] I. D. Mayergoyz, *Mathematical models of hysteresis*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [ME84] Paul Mandel and Thomas Erneux, *Laser Lorenz equations with a time-dependent parameter*, Phys. Rev. Letters **53** (1984), 1818–1820.
- [MNZ93] Jack W. Macki, Paolo Nistri, and Pietro Zecca, *Mathematical models for hysteresis*, SIAM Rev. **35** (1993), no. 1, 94–123.
- [Mon02] Adam Hugh Monahan, *Stabilisation of climate regimes by noise in a simple model of the thermohaline circulation*, Journal of Physical Oceanography **32** (2002), 2072–2085.
- [MR80] E. F. Mishchenko and N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Plenum Press, New York, 1980.
- [MS96] Robert S. Maier and D. L. Stein, *Oscillatory behavior of the rate of escape through an unstable limit cycle*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), no. 24, 4860–4863.
- [MS97] Robert S. Maier and Daniel L. Stein, *Limiting exit location distributions in the stochastic exit problem*, SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), 752–790.
- [MW89] Bruce McNamara and Kurt Wiesenfeld, *Theory of stochastic resonance*, Phys. Rev. A **39** (1989), 4854–4869.
- [MW95] Frank Moss and Kurt Wiesenfeld, *The benefits of background noise*, Scientific American **273** (1995), 50–53.
- [Nei87] A. I. Neishtadt, *Persistence of stability loss for dynamical bifurcations I*, Differential Equations **23** (1987), 1385–1391.
- [Nei88] ———, *Persistence of stability loss for dynamical bifurcations II*, Differential Equations **24** (1988), 171–176.
- [PR60] L. S. Pontryagin and L. V. Rodygin, *Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives*, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 237–240.
- [PRK01] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths, *Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series, vol. 12, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [RKP90] Madan Rao, H. K. Krishnamurthy, and Rahul Pandit, *Magnetic hysteresis in two model spin systems*, Phys. Rev. B **42** (1990), 856–884.
- [Sch89] Björn Schmalfuß, *Invariant attracting sets of nonlinear stochastic differential equations, Markov processes and control theory (Gaußig, 1988)* (Berlin) (Heinz Langer and Volker Nollau, eds.), Math. Res., vol. 54, Akademie-Verlag, 1989, pp. 217–228.
- [SHD01] Ch. Schütte, W. Huisinga, and P. Deuffhard, *Transfer operator approach to conformational dynamics in biomolecular systems*, Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems, Springer, Berlin, 2001, pp. 191–223.
- [Shi73] M. A. Shishkova, *Examination of one system of differential equations with a small parameter in highest derivatives*, Soviet Math. Dokl. **14** (1973), 384–387.
- [Tal99] Peter Talkner, *Stochastic resonance in the semiadiabatic limit*, New Journal of Physics **1** (1999), 4.1–4.25.

- [THST03] Axel Timmermann, Gildor Hezi, Michael Schulz, and Eli Tziperman, *Coherent resonant millennial-scale climate oscillations triggered by massive meltwater pulses*, Journal of Climate **16** (2003), 2569–2585.
- [Tih52] A. N. Tihonov, *Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives*, Mat. Sbornik N. S. **31** (1952), 575–586.
- [WM95] Kurt Wiesenfeld and Frank Moss, *Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and SQUIDS*, Nature **373** (1995), 33–36.

Nils Berglund  
FRUMAM, CPT-CNRS LUMINY  
Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France  
*and*  
PHYMAT, UNIVERSITÉ DE TOULON  
*E-mail address:* `berglund@cpt.univ-mrs.fr`