

TD M32 Analyse

Série 1 – Représentation graphique

Exercice 1

Etudier les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous (domaine de définition, tableau des variations, asymptotes). Représenter la fonction graphiquement.

1. $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x + 1);$
2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2};$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1};$
4. $f(x) = x^2 + a/x, (a > 0);$
5. $f(x) = x^x, (x > 0);$
6. $f(x) = (x + 2)e^{1/x}.$

Exercice 2

Pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous,

- étudier les fonctions $x \mapsto f(x, a)$ et $y \mapsto f(a, y)$ pour différentes valeurs du paramètre a (tableau des variations, graphe);
- déterminer et représenter graphiquement les courbes de niveau $\mathcal{C}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = a\}.$

1. $f(x, y) = x + y;$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2;$
3. $f(x, y) = x^2 - y^2;$
4. $f(x, y) = (x - y)^2;$
5. $f(x, y) = x^3 - y^2;$
6. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2);$
7. $f(x, y) = x(y - x^2).$

Exercice 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x \operatorname{ch} y, x \operatorname{sh} y)$. Représenter graphiquement les images des lignes $x = \text{constante}$ et $y = \text{constante}$.

Exercice 4*

Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on introduit les nombres réels

$$\begin{aligned}d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\d_2(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\d_\infty(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.\end{aligned}$$

- Représenter graphiquement les ensembles $\{x : d_p(x, 0) = 1\}$ pour $p = 1, 2$ et ∞ .
- Montrer que $d_1(x, y)$ définit une distance sur \mathbb{R}^2 . Même question pour $d_2(x, y)$ et $d_\infty(x, y)$.