

## Série d'exercices 2

### Barycentres

- 1) Soit  $G$  le barycentre de  $(A, a), (B, b), (C, c)$ . Montrer que  $a\vec{AA}' + b\vec{BB}' + c\vec{CC}' = 0$  ssi  $G$  est barycentre de  $(A', a), (B', b), (C', c)$ .
- 2) Soit  $ABC$  un triangle, et  $\alpha\beta\gamma$  le triangle obtenu en menant par chacun des sommets  $A, B, C$  la parallèle à  $BC, AC, AB$  ( $\alpha$  opposé à  $A$ , etc ...)
  - a) Montrer que si  $G$  est l'isobarycentre de  $ABC$ , il en est de même de  $\alpha\beta\gamma$ .
  - b) Montrer que  $\vec{A}\alpha + \vec{B}\beta + \vec{C}\gamma = 0$  (appliquer le 1er exercice).
- 3) Soit  $ABC$  un triangle, on suppose que  $A'$  divise le segment  $BC$  dans le rapport 2 à 3 (i.e.  $\frac{BA'}{A'C} = \frac{2}{3}$ ) et que  $B'$  divise le segment  $AC$  dans le rapport  $\frac{3}{5}$ . Soit  $G = (AA') \cap (BB')$ .  
Déterminer  $a$  et  $c$  pour que  $G$  soit le barycentre de  $(A, a), (B, 1), (C, c)$ .
- 4) Soit  $ABC$  un triangle et  $t, u, v \in \mathbf{R}$  les coordonnées barycentriques d'un point  $P$  dans le plan du triangle,  $t + u + v = 1$ . Montrer que les 3 points  $P_1, P_2, P_3$  sont alignés ssi leurs coordonnées barycentriques vérifient :

$$\det((t_1, t_2, t_3), (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)) = 0$$

- 5) Soit  $ABC$  un triangle, et  $M$  un point quelconque du plan de coordonnées barycentriques  $x, y, z$  dans le repère affine  $(A, B, C)$ . On désigne par  $P, Q, R$  les symétriques de  $M$  par rapport aux milieux de  $BC, CA, AB$  respectivement.
  - a) Donner les coordonnées barycentriques de  $P, Q, R$ .
  - b) Montrer que  $AP, BQ, CR$  sont concourantes en un point  $M'$  aligné avec  $M$  et l'isobarycentre de  $ABC$ .
- 6) Soit  $ABC$  un triangle. On appelle  $C'$  le barycentre de  $(A, a)$  et  $(B, b)$ ,  $A'$  le barycentre de  $(B, b')$  et  $(C, c')$ ,  $B'$  le barycentre de  $(A, a'')$  et  $(C, c'')$ .  
Montrer que  $AA', BB'$  et  $CC'$  sont concourantes si et seulement si  $ab'c'' = a''bc'$ .
- 7) Que peut-on dire de l'intersection:
  - a) des plans médians d'un tétraèdre?
  - b) des droites joignant les milieux de 2 arêtes non coplanaires d'un tétraèdre?
  - c) des droites joignant un sommet au barycentre des 3 autres sommets d'un tétraèdre?

8\*) **Ensembles convexes.** Soit  $E$  un espace affine. On rappelle que  $\Gamma \subset E$  est un ensemble convexe ssi  $\forall M, N \in E, \forall t \in [0, 1], tM + (1 - t)N \in E$ . Montrer que  $\Gamma$  est convexe ssi pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , tous points massiques  $(A_j, \lambda_j)$  de  $E, j = 1 \cdots n, \lambda_j \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ , on a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j A_j \in \Gamma$$

(faire une récurrence sur  $n$ .)

9) **Théorème de Ménélaüs.**

Soit  $ABC$  un triangle, et  $\delta$  une droite qui coupe  $AB$  en  $C_1$ ,  $AC$  en  $B_1$  et  $BC$  en  $A_1$ . Montrer, en utilisant l'exercice 4), que l'on a:

$$\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} \cdot \frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}} \cdot \frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}} = 1$$

Énoncer et démontrer la réciproque de ce théorème.

10\*) **Théorème de Ceva.** Soit  $ABC$  un triangle. Par  $A, B$  et  $C$  on mène 3 droites qui coupent les côtés opposés resp. en  $A_1, B_1, C_1$ . On suppose que  $AA_1, BB_1, CC_1$  sont sécantes en un point  $M$ .

a) Montrer qu'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}, \alpha + \beta + \gamma = 1$  tels que  $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = 0$ .

b) Montrer que  $(A_1, \beta + \gamma)$  est le barycentre de  $(B, \beta)$  et  $(C, \gamma)$ .

En déduire que  $\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} = -\frac{\gamma}{\beta}$ .

c) Exprimer de même  $\frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}}$  et  $\frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}}$  en fonction de  $\alpha, \beta, \gamma$ , et vérifier que

$$\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 C}} \cdot \frac{\overline{B_1 C}}{\overline{B_1 A}} \cdot \frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 B}} = -1$$

d) Énoncer et démontrer la réciproque de ce théorème.