

## TD Master 1 – Chaînes de Markov

### Série 1

#### Exercice 1

Résoudre le problème de la souris dans le labyrinthe (Exemple 1.1.1. du cours). En particulier,

1. Déterminer la matrice fondamentale de la chaîne.
2. Calculer la probabilité que la souris atteigne la nourriture.
3. Calculer le temps moyen du parcours de la souris.

#### Exercice 2

Montrer que la distribution binomiale est une distribution stationnaire pour le modèle d'Ehrenfest.

#### Exercice 3

Toute matrice stochastique de taille  $2 \times 2$  peut s'écrire

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

avec  $p, q \in [0, 1]$ .

1. Discuter, en fonction de  $p$  et  $q$ , quand  $P$  est absorbante, irréductible, régulière.
  2. Montrer que la matrice
- $$\Pi = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$
- est un projecteur ( $\Pi^2 = \Pi$ ) qui commute avec  $P$ . Calculer son noyau et son image.
3. Soit  $Q = P - \Pi$ . Montrer que  $Q\Pi = \Pi Q = 0$ . Calculer  $Q^2$ , puis  $Q^n$  pour tout  $n$ .
  4. Déduire des résultats précédents  $P^n$  pour tout  $n$ . Discuter la limite de  $P^n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  en fonction de  $p$  et  $q$ .