

## TD Mathématiques financières

### Série 1 – Options financières

#### Exercice 1

On considère le modèle de marché suivant:

$\Omega$	$S_0$	$S_1$
$\omega^1$	(1, 5)	(1.05, 5)
$\omega^2$	(1, 5)	(1.05, 10)

- Montrer que le marché est viable.
- Calculer la valeur d'acquisition du portefeuille d'un investisseur vendant à découvert  $2/5$  de part de titre risqué, et achetant  $4/1.05$  parts d'actif sans risque. Calculer les valeurs possibles du portefeuille, après évolution du cours des actifs.
- Donner la fonction de paiement  $f$  de l'option de vente au prix d'exercice  $K = 7$ . Montrer que le portefeuille ci-dessus permet de couvrir cette option.
- Calculer l'endettement initial d'un investisseur empruntant  $4/1.05$  parts d'actif sans risque, et achetant  $2/5$  de part de titre risqué. Calculer les valeurs possibles de ce portefeuille, après évolution du cours des actifs. En déduire que l'acheteur de l'option  $f$  pourra, avec ce portefeuille, rembourser sa dette initiale.
- Caractériser les aménagements de portefeuilles initiaux dont la valeur d'acquisition vaut 1. Combien de parts d'actif risqué doit-on vendre à découvert, de sorte à couvrir l'option dans le premier jeu d'aléa  $\omega^1$ ? Vérifier qu'une telle stratégie d'emprunt ne permettra pas de couvrir l'option dans le second jeu d'aléa  $\omega^2$ . En conclure que le prix de l'option  $f$  est nécessairement supérieur à 1.

#### Exercice 2

On considère le modèle de marché à deux états sur une période décrit par le tableau suivant (en prix réactualisés):

$\Omega$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$
$\omega^1$	(1, 5)	(1, 3)
$\omega^2$	(1, 5)	(1, 6)

Une banque émet une option de vente au prix d'exercice (réactualisé)  $\bar{K}$ , de fonction de paiement  $\bar{f} = (\bar{K} - \bar{S}_1^2)_+$ . Déterminer le prix et la stratégie de couverture de cette option en fonction de  $\bar{K}$ .