

TD Mathématiques financières

Série 3 – Le modèle binomial

Exercice 1

On considère le modèle de marché réactualisé décrit par le tableau:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 5)	(1, 3)	(1, 2)
ω^2	(1, 5)	(1, 3)	(1, 7)
ω^3	(1, 5)	(1, 6)	(1, 4)
ω^4	(1, 5)	(1, 6)	(1, 10)

1. Neutraliser ce marché financier. Autrement dit, déterminer l'unique probabilité \mathbb{P}^* sur $\Omega = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ telle que

$$\mathbb{E}^*(\bar{S}_k^2 \mid \bar{S}_{k-1}^2) = \bar{S}_{k-1}^2 \quad k = 1, 2 .$$

2. Déterminer un portefeuille de couverture pour une option de fonction de paiement (réactualisée) $\bar{f} = g(\bar{S}_2^2)$.
3. Vérifier que ce portefeuille de couverture permettra à l'émetteur de l'option d'honorer son contrat dans chaque jeu d'aléas.
4. Déterminer le prix et le portefeuille de couverture d'une option d'achat de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 9$.
5. Déterminer le prix et le portefeuille de couverture d'une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 7$.

Exercice 2

On considère deux modèles de marché, décrits par les tableaux ci-dessous (en prix réactualisés) :

Marché 1:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 8)	(1, 6)	(1, 5)
ω^2	(1, 8)	(1, 6)	(1, 6)
ω^3	(1, 8)	(1, 12)	(1, 10)
ω^4	(1, 8)	(1, 12)	(1, 15)

Marché 2:

Ω	\bar{S}_0	\bar{S}_1	\bar{S}_2
ω^1	(1, 10)	(1, 6)	(1, 5)
ω^2	(1, 10)	(1, 6)	(1, 10)
ω^3	(1, 10)	(1, 12)	(1, 10)
ω^4	(1, 10)	(1, 12)	(1, 15)

1. Lesquels de ces marchés sont viables?

Les questions suivantes s'appliquent au(x) marché(s) viable(s) uniquement.

2. Neutraliser le marché financier, c'est-à-dire déterminer la mesure de risque neutre \mathbb{P}^* .
3. On considère une option de vente de prix d'exercice réactualisé $\bar{K} = 9$. Sa fonction de paiement est donc $g(\bar{S}_2) = (9 - \bar{S}_2)_+$. Déterminer le prix de cette option.
4. Donner explicitement le portefeuille de couverture de l'option ci-dessus. Expliquer en mots la stratégie à suivre dans le cas ω^1 .