

Document de synthèse
présenté par

Hermine BIERMÉ

en vue de l'obtention de
l'Habilitation à Diriger des Recherches
de l'Université Paris Descartes
Spécialité : **Mathématiques**

Contributions à l'étude de champs aléatoires en vue d'applications en modélisation stochastique

Soutenue le : **04 novembre 2011**

devant le jury :

Romain Abraham	Professeur, <i>Université d'Orléans</i>
Aline Bonami	Professeur émérite, <i>Université d'Orléans</i>
Loïc Chaumont	Professeur, <i>Université d'Angers</i>
Serge Cohen	Professeur, <i>Université de Toulouse 3</i>
Youri Davydov	Professeur, <i>Université Lille 1</i>
Anne Estrade	Professeur, <i>Université Paris Descartes</i>
Eric Moulines	Professeur, <i>Télécom ParisTech</i>

après avis des rapporteurs :

Serge Cohen	Professeur, <i>Université de Toulouse 3</i>
Jacques Lévy-Véhel	Directeur de recherche, <i>INRIA Saclay</i>
Mario Wschebor	Professeur, <i>Université de Montevideo, Uruguay</i>

Remerciements

Mes premières pensées vont à Mario Wschebor qui m'a fait l'honneur d'accepter de faire un rapport sur mon travail. J'aurais aimé avoir le temps de faire sa connaissance et d'en parler avec lui. Je tiens à remercier vivement Serge Cohen et Jacques Lévy-Véhel pour leurs rapports et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je suis heureuse d'avoir pu soumettre mes travaux à leur expertise et de la présence de Serge Cohen dans mon jury.

Je tiens tout particulièrement à remercier Aline Bonami et Anne Estrade qui m'ont initiée à la recherche. J'ai toujours beaucoup de plaisir à travailler avec chacune d'elle. Leurs conseils avisés, remarques judicieuses et relectures attentives m'ont toujours beaucoup aidée. Je suis également très touchée qu'elles aient accepté de faire partie de mon jury.

Je souhaite remercier chaleureusement Romain Abraham, Loïc Chaumont, Youri Davydov et Eric Moulines d'être membres de mon jury. Je suis très honorée de l'intérêt qu'ils portent à mon travail.

J'ai beaucoup apprécié mes différentes collaborations pour les nombreux échanges passionnants et enrichissants qu'elles ont suscités et sans lesquelles ce manuscrit n'existerait pas. Un grand merci à tous mes collaborateurs non précédemment cités : C. Laurent Benhamou, Yann Demichel, Agnès Desolneux, Ingemar Kaj, Céline Lacaux, José R. León, Mark Meerschaert, Lionel Moisan, Ivan Nourdin, Giovanni Peccati, Frédéric Richard, avec une pensée particulière pour Peter Scheffler et Yimin Xiao grâce auxquels j'ai pu découvrir la recherche américaine lors de mon post-doc.

Je remercie également tous les membres des projets de recherche anr mipomodim et mataim. Cette approche interdisciplinaire est un réel moteur de mes recherches et un atout indéniable pour concrétiser l'application de certains de mes travaux. C'est également grâce à ces projets que j'ai pu faire mes premiers pas dans le co-encadrement. J'ajoute des remerciements à Pierre Calka, Pierre Chainais et Jean-Stéphane Dhersin pour les discussions enrichissantes partagées ainsi que leurs précieux conseils.

Je ne pourrai jamais assez exprimer ma gratitude envers tous les membres du MAP5 et de l'UFR de Mathématiques et d'Informatique qui m'ont permis d'avoir des conditions de travail très agréables. J'ai toujours beaucoup de plaisir à venir travailler à l'Université Paris Descartes. Je remercie en particulier Dominique Seret et Christine Graffigne, les directrices successives de l'UFR, ainsi que Thierry Raedersdorff et Maïk Mercuri, du service informatique et Christophe Castellani, pour la reprographie. Un grand merci également à Annie Raoult, la directrice du laboratoire, ainsi qu'à Marie-Hélène Gbaguidi, la secrétaire, pour son efficacité et sa disponibilité. Je souhaite aussi remercier Thierry Cabanal-Duvillard, Georges Koepfler, Nicole Rigal et les membres du groupe de travail d'innovation pédagogique ainsi que Fabienne Comte et Adeline Samson mes collègues de bureau. Enfin, je tiens à remercier Maïtine Bergounioux, Emmanuel Lesigne et tous les membres du LMPT de l'Université de Tours qui m'accueille en délégation CNRS cette année.

Je n'oublie pas Hervé, Alissa et Mattian pour leur présence qui m'est indispensable.

Table des matières

Introduction	3
1 Champs browniens fractionnaires anisotropes et transformées de Radon	7
1.1 Champs gaussiens à densité spectrale	8
1.1.1 Représentation harmonisable	8
1.1.2 Régularité höldérienne	9
1.2 Analyse directionnelle et Transformées de Radon	10
1.2.1 Processus lignes	10
1.2.2 Transformées de Radon de champs aléatoires	10
1.2.3 Injectivité des transformées de Radon	11
1.3 Estimations	12
1.3.1 Variations quadratiques généralisées	12
1.3.2 Intégrales multiples de Wiener-Itô	14
1.4 Simulations et applications	17
1.4.1 Simulations et implémentations numériques	17
1.4.2 Applications en imagerie médicale	19
Mammographies	19
Clichés radiographiques d'os du calcaneum	20
2 Champs stables à autosimilarité matricielle	23
2.1 Champs stables	24
2.1.1 Champs symétrique α -stables	24
2.1.2 Représentation harmonisable stable	24
2.2 Champs à autosimilarité matricielle	25
2.2.1 Représentation harmonisable	25
2.2.2 Coordonnées polaires adaptées à une matrice	26
2.2.3 Représentation moyenne mobile	27
2.3 Régularité höldérienne des champs α -stables harmonisables	27
2.3.1 Séries de LePage	27
2.3.2 Champs conditionnellement gaussiens	28
2.3.3 Généralisations	29
2.4 Ensembles de niveaux et excursions	30
2.5 Simulations, estimations et applications	31
3 Modèles de type shot noise	35
3.1 Modèles de microboules et généralisations	36
3.1.1 Modèles de microboules	36
3.1.2 Généralisations	38
3.1.3 Autosimilarité et représentation ponctuelle	40
3.2 Seuillages et recouvrements aléatoires	41
3.3 Nombre de franchissements des processus shot noise	42

3.3.1	Transformée de Fourier du nombre moyen de franchissements	43
3.3.2	Continuité du nombre moyen de franchissements	45
3.3.3	Convergence du nombre moyen de franchissements	45
3.3.4	Application au noyau gaussien	46
4	Perspectives de recherches	49
4.1	Sur le chapitre 1	49
4.1.1	Optimalité des vitesses de convergence dans les théorèmes de Breuer-Major . .	49
4.1.2	Champs browniens fractionnaires et tests d'anisotropie	49
4.1.3	Simulations	50
4.1.4	Apport des transformées de Radon : modélisation et analyse de texture	50
4.2	Sur le chapitre 2	51
4.2.1	L'autosimilarité matricielle pour révéler l'anisotropie	51
4.2.2	Les problèmes de simulations et d'estimations dans le cas gaussien	52
4.2.3	Le passage du gaussien au stable	52
4.3	Sur le chapitre 3	53
4.3.1	Topographie des champs shot noise	53
4.3.2	Étude du champ de Poisson fractionnaire	54
4.3.3	Interprétation géométrique, champs de Chentsov et anisotropie	54
	Bibliographie	57
	Liste des publications référencées	65

Introduction

Ce document présente une synthèse de mes travaux de recherches effectués depuis mon doctorat. Mon travail de thèse (2002-2005), au sein du MAPMO de l'Université d'Orléans, avait déjà pour origine le problème du diagnostic précoce de l'ostéoporose, maladie osseuse, à partir des radiographies d'os. Je me suis alors intéressée à la modélisation stochastique des os 3D et de leurs radiographies 2D par des champs aléatoires sur \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 dépendant de paramètres qui puissent s'estimer à partir des radiographies et discriminer les populations ostéoporotiques. J'ai poursuivi depuis ce type d'étude en élargissant au fur et à mesure les modèles aléatoires considérés et les domaines d'applications.

Ainsi, je m'intéresse à l'étude mathématique de champs aléatoires présentant un certain nombre de caractéristiques statistiques comme l'anisotropie, l'autosimilarité à certaines échelles ou la stationnarité. Il est alors crucial pour de telles études de valider les modèles proposés en les confrontant aux données réelles. Ceci peut se faire de manière qualitative aux moyens de simulations numériques ou de manière quantitative à l'aide d'estimateurs des paramètres des différents modèles. La mise au point d'algorithmes pour la simulation d'images numériques 2D ou 3D, suivant un modèle mathématique probabiliste donné, doit non seulement prendre en compte le problème de la discrétisation mais aussi celui du stockage des données. De même, la construction d'estimateurs théoriques doit prendre en compte les contraintes numériques imposées par les expériences. Ces questions sont également au coeur de mes travaux de recherches.

Il y a plus de quarante ans, Mandelbrot et Van Ness [MVN68] ont proposé le modèle du mouvement brownien fractionnaire afin d'étudier des signaux 1D irréguliers. Depuis, il est utilisé comme outil modèle dans de nombreux domaines tels l'hydrologie, la biologie, la mécanique des fluides ou encore la finance et sert de base à l'analyse fractale des signaux. Un seul paramètre, l'indice de Hurst, rend compte à la fois de son irrégularité, de son autosimilarité et de la dimension fractale de son graphe. Dès lors, de nombreux champs aléatoires, généralisant ce modèle 1D ont été définis par différents auteurs, mathématiciens et scientifiques, pour la modélisation de milieux irréguliers et dans des situations où on veut rendre compte d'un nombre croissant de paramètres. Une grande partie de mes travaux et projets se situe dans ce cadre, et porte sur des généralisations de cet outil modèle, principalement motivées par des applications spécifiques.

En 2005, au cours de mon post-doc à l'Université du Nevada (Reno, USA), sous la direction de Hans-Peter Scheffler, j'ai travaillé sur une généralisation anisotrope de la propriété d'autosimilarité appelée autosimilarité matricielle, en vue d'applications en géosciences. Nous avons également considéré des champs aléatoires α -stables qui permettent de généraliser les champs aléatoires gaussiens pour la modélisation de phénomènes présentant une grande variabilité.

J'ai ensuite intégré l'équipe de probabilités du MAP5 de l'Université Paris Descartes en 2006, d'abord en tant qu'ATER puis en tant que maître de conférences. Mes travaux ont alors été effectués en grande partie au sein du projet ANR MIPOMODIM (2005-2009).

Le projet MIPOMODIM consistait à définir et étudier des champs aléatoires pour modéliser des milieux poreux 3D (principalement des tissus osseux) ainsi que leurs images 2D, en collaboration avec des physiciens du LPMC de l'école Polytechnique ainsi que des médecins de l'équipe INSERM U 658

du Centre Hospitalier Régional d'Orléans. J'ai alors poursuivi mon travail avec Anne Estrade (MAP5, Université Paris Descartes) sur l'étude de champs aléatoires de type "shot noise" obtenus sous forme d'intégrales stochastiques par rapport à une mesure de Poisson qui permettent une description microscopique simple des milieux 3D. Parallèlement, je me suis intéressée à l'étude des ensembles de niveaux de certains de ces champs en 2D, en collaboration avec Agnès Desolneux (MAP5, Université Paris Descartes) qui étudiait avec Bernard Sapoval (LPMC, École Polytechnique) les fronts de percolation dans des modèles de diffusion de "grosses particules". J'ai également débuté une collaboration avec Frédéric Richard (MAP5, Université Paris Descartes) dans le but de valider les modèles de champs browniens fractionnaires anisotropes pour des images médicales de type mammographies ou radiographies d'os, ceci en collaboration avec Claude-Laurent Benhamou (INSERM U 658, CHR Orléans) lorsqu'il s'agissait de radiographies osseuses.

Depuis 2009 et la fin du projet MIPOMODIM, je travaille au sein du projet ANR MATAIM (2009-2013), plus orienté sur la modélisation et l'analyse de textures anisotropes 2D. Le principal domaine d'applications de ce projet reste l'imagerie médicale, non seulement en collaboration avec l'équipe INSERM U 658 mais également avec l'unité INSERM ERI-20 de l'Institut Gustave Roussy de Villejuif, spécialisé en épidémiologie du cancer du sein.

Toutes ces activités sont décrites dans ce document sous la forme de trois chapitres, chacun portant sur des modèles aléatoires spécifiques.

Le chapitre 1 présente les modèles de champs browniens fractionnaires anisotropes, introduits dans [BE03], qui furent les premiers modèles que j'ai étudiés lors de ma thèse mais pour lesquels beaucoup de questions restent d'actualité. Le champ brownien fractionnaire anisotrope défini sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, est une généralisation anisotrope du mouvement brownien fractionnaire obtenu par une déformation anisotrope de sa densité spectrale. Elle se caractérise par deux fonctions définies sur S^{d-1} : une fonction c liée à la fonction de toposité du variogramme et une fonction h qui joue le rôle de paramètre de Hurst directionnel, liée à la régularité höldérienne du champ aléatoire.

Les travaux que je présente sont principalement orientés autour de l'identification de la fonction d'anisotropie h . Ce problème nécessite l'introduction théorique des transformées de Radon de champs aléatoires. Ceci permet de ramener l'étude à une analyse directionnelle d'un signal 1D pour lequel de nombreux outils sont à disposition. Des résultats statistiques de type théorème central limite s'obtiennent alors en se plaçant dans le cadre général des séries temporelles gaussiennes. En collaboration avec Aline Bonami (MAPMO, Université d'Orléans) et José R. León (UCV, Venezuela), nous avons obtenu des résultats très généraux pour ce type d'étude en utilisant le cadre des intégrales multiples de Wiener-Itô. J'ai travaillé avec Frédéric Richard sur la mise en place numérique de ces estimateurs ainsi que sur la pertinence de ce modèle pour certaines images médicales.

Cependant, cette étude pose encore de nombreuses questions liées en particulier au problème de la discrétisation des modèles continus ainsi qu'à leurs simulations, et font l'objet d'un travail en collaboration avec Lionel Moisan (MAP5, Université Paris Descartes). Des résultats préliminaires sur les mammographies semblent montrer la pertinence d'un tel modèle. En revanche, en collaboration avec Claude-Laurent Benhamou, nous obtenons des résultats qui suggèrent l'utilisation d'un autre type de modèle pour les radiographies d'os.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des champs stables à autosimilarité matricielle que nous avons introduits en collaboration avec Mark Meerschaert (University of Michigan, USA) et Hans-Peter Scheffler (University of Siegen, Germany). Afin d'obtenir une famille de lois plus générale que les lois gaussiennes il suffit de considérer des intégrales stochastiques par rapport à une mesure stable : symétrique α -stable si $\alpha \in (0, 2)$ et gaussienne si $\alpha = 2$ [ST94]. Ceci permet notamment la modélisation de phénomènes non gaussiens à variances infinies, comme souvent observés en géosciences. D'autre part, nous avons généralisé la notion "isotrope" d'autosimilarité en autosimilarité matricielle qui permet de prendre en compte une certaine anisotropie au moyen d'une seule matrice carrée de

taille d . La construction ainsi que l'étude de ces modèles nécessite l'utilisation de coordonnées polaires adaptées à la matrice, dont on peut donner un certain nombre de propriétés théoriques. Nous avons alors considéré des représentations moyennes mobiles et harmonisables de ces champs.

En collaboration avec Céline Lacaux (IECN, École des Mines de Nancy), nous montrons que les représentations harmonisables α -stables possèdent les mêmes propriétés trajectorielles que les gaussiennes, à la grande différence des représentations moyennes mobiles qui, elles, sont presque sûrement non bornées dès que $d \geq 2$. Nous avons également défini avec Hans-Peter Scheffler une généralisation des modèles multifractionnaires, en introduisant des modèles à autosimilarités matricielles multiples. Enfin, dans le cadre des champs gaussiens, nous nous sommes intéressées avec Yimin Xiao (University of Michigan, USA) aux propriétés fines des trajectoires gaussiennes et notamment aux dimensions de Hausdorff d'ensembles de niveaux.

La fin de ce chapitre est consacrée aux questions numériques associées à ces modèles. En collaboration avec Peter Scheffler, j'ai considéré le problème de la simulation en 1D des processus linéaires fractionnaires stables. En 2D nous avons montré, avec Frédéric Richard et Claude-Laurent Benhamou, la pertinence d'un modèle gaussien à autosimilarité matricielle pour les radiographies d'os, en adaptant les outils statistiques développés dans le premier chapitre.

Le chapitre 3 regroupe les travaux que j'ai effectués autour des modèles de type shot noise. J'ai commencé à m'intéresser à ce type de modèle en collaboration avec Anne Estrade. Nous nous sommes intéressées à une généralisation en dimension d du modèle de micropulses [CGM95] qui permet une description microscopique simple du mouvement brownien fractionnaire. Nous avons introduit un modèle de microboules qui résulte de la superposition de boules aléatoires dont les centres et les rayons sont lancés suivant un processus ponctuel de Poisson. Un tel modèle s'écrit alors comme un champ shot noise et peut se représenter sous la forme d'une intégrale stochastique par rapport à une mesure de Poisson.

En collaboration avec Ingemar Kaj (Uppsala University, Sweden) nous avons considéré des généralisations de ce modèle en adoptant le point de vue des processus indexés par des mesures, développé dans [KLNS07], généralisant le concept de distributions tempérées aléatoires. Nous avons étudié le comportement asymptotique de ces processus en fonction du comportement en loi de puissance des rayons des boules. En explicitant le lien entre les distributions tempérées aléatoires et les champs aléatoires, nous donnons un procédé de construction de champs autosimilaires, qu'ils soient gaussiens ou sous forme d'intégrales stochastiques par rapport à une mesure de Poisson, pour n'importe quel ordre d'autosimilarité.

Ces travaux nous ont conduites, Anne Estrade et moi-même, à l'étude du recouvrement de l'espace \mathbb{R}^d par des boules aléatoires. Contrairement au cas de la dimension $d = 1$ [She72], il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante de recouvrement. Cependant, en utilisant le point de vue de la percolation continue on peut donner une intensité critique de recouvrement qui s'écrit explicitement en fonction de la mesure des rayons et intervient également dans le calcul de la dimension de Hausdorff de la partie non recouverte.

Plus généralement, avec Agnès Desolneux (MAP5, Université Paris Descartes), nous nous intéressons à la topographie de champs aléatoires shot noise 2D pour des modèles de diffusion de "grosses particules". Nous avons débuté notre travail en dimension 1 avec l'étude du nombre moyen de franchissements (crossings) de processus shot noise \mathcal{C}^1 par morceaux. Nous donnons une formule explicite de la transformée de Fourier du nombre moyen de franchissements. Nous obtenons également la convergence de ce nombre vers la formule de Rice gaussienne pour des grandes valeurs de l'intensité du processus de Poisson.

Le dernier chapitre rassemble les différentes perspectives de recherche issues de ces travaux. La présentation suit celle des chapitres précédents.

Chapitre 1

Champs browniens fractionnaires anisotropes et transformées de Radon

Mes travaux de thèse avaient pour origine le problème du diagnostic précoce de l'ostéoporose à partir des radiographies d'os et s'inscrivaient dans la continuité de la collaboration entre l'équipe INSERM U 658 (Centre Hospitalier Régional d'Orléans, France), le laboratoire PRISME EA 4229 (Université d'Orléans) et le laboratoire MAPMO (Université d'Orléans). Rappelons que l'ostéoporose est une maladie des os de plus en plus courante, essentiellement en raison du vieillissement de la population. Elle se caractérise par deux manifestations principales : la perte de masse osseuse d'une part, une altération de la micro-architecture osseuse d'autre part. Actuellement, une seule technique de diagnostic en prévention est systématiquement utilisée. Il s'agit de la densitométrie osseuse qui ne mesure que la perte de masse osseuse. Pour évaluer l'altération de la micro-architecture osseuse, deux types de techniques sont principalement explorés. La première, l'imagerie 3D, est encore à la fois soit trop coûteuse, soit trop irradiante pour le patient. La seconde, l'imagerie 2D à partir des radiographies, présente l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre. Le laboratoire PRISME (anciennement LESI), en collaboration avec l'équipe INSERM U 658, a développé une méthode d'analyse fractale des radiographies en modélisant des lignes extraites par des mouvements browniens fractionnaires. Leurs résultats, associés à un examen de densitométrie, sont encourageants pour une aide au diagnostic [BPL⁺01] mais ne sont pas suffisamment discriminants seuls. En particulier, les médecins ont constaté que les radiographies des ostéoporotiques étaient plus anisotropes que celles des témoins.

Ces dernières années, l'analyse fractale a été largement employée en imagerie médicale pour notamment caractériser ou classifier les textures [BL09]. Le problème de ces études est la diversité des approches employées (analyse fractale de la dimension, méthodes du variogramme ou d'ondelettes, méthodes du spectre de puissance,...) qui mélangent le point de vue spatial et fréquentiel et les rend difficiles à comparer. D'autre part l'aspect anisotrope des images n'est encore que partiellement étudié alors qu'il peut avoir un intérêt pour l'aide au diagnostic. J'ai préféré dans mon travail me consacrer à une approche probabiliste qui concerne la modélisation stochastiques des images elles-même par des champs aléatoires, généralisant de façon anisotrope le mouvement brownien fractionnaire 1D. Le premier modèle que j'ai considéré est un modèle gaussien fractionnaire anisotrope introduit par A. Bonami et A. Estrade [BE03], dépendant d'un paramètre qui rend compte de l'anisotropie. J'ai continué à travailler sur ce type de modèle d'abord au sein du projet ANR MIPOMODIM, puis maintenant au sein du projet ANR MATAIM, en vue d'applications à l'imagerie médicale.

1.1 Champs gaussiens à densité spectrale

1.1.1 Représentation harmonisable

De nombreuses généralisations du champ brownien fractionnaire, ont été obtenues à partir de sa représentation harmonisable. En effet, on peut le définir comme une intégrale stochastique à partir d'une mesure de Wiener complexe

$$B_H = \left\{ \Re \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it \cdot \xi} - 1) |\xi|^{-H - \frac{d}{2}} W(d\xi); t \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (1.1)$$

où \Re désigne la partie réelle. Par isométrie, $\text{Var}(B_H(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{it \cdot \xi} - 1|^2 |\xi|^{-2H-d} d\xi$ et la fonction $|\xi|^{-2H-d}$ est appelée densité spectrale de B_H .

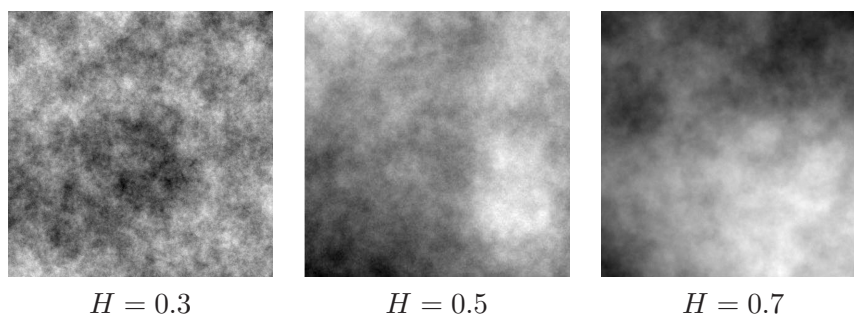


FIGURE 1.1 – Réalisations de champs browniens fractionnaires en dimension $d = 2$ pour différentes valeurs de H obtenues par la méthode de simulation exacte de [Ste02].

Plus généralement, on peut définir un champ aléatoire gaussien centré X en remplaçant $|\xi|^{-2H-d}$ dans (1.1) par une fonction positive et paire $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^2) d\xi)$:

$$X = \left\{ \Re \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it \cdot \xi} - 1) f_t(\xi)^{1/2} W(d\xi); t \in \mathbb{R}^d \right\}. \quad (1.2)$$

La loi de ce champ est alors déterminée par sa fonction de covariance donnée par

$$(s, t) \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it \cdot \xi} - 1) \overline{(e^{is \cdot \xi} - 1)} f_t(\xi)^{1/2} f_s(\xi)^{1/2} d\xi.$$

Plusieurs auteurs [BJR97, PLV96] ont étudié des modèles pour lesquels le paramètre H est remplacé par une fonction qui dépend du point t et $f_t(\xi) = c(t) |\xi|^{-2H(t)-d}$, adaptés à des milieux non homogènes. Pour la modélisation de milieux homogènes, il faut choisir pour f une fonction qui ne dépend pas du point t , et que l'on appelle densité spectrale. Dans ce cas, le champ est à accroissements stationnaires : la loi de $X(\cdot + \tau) - X(\tau)$ est la même que celle de $X(\cdot) - X(0)$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$, et est caractérisée par le variogramme de X

$$v_X(t) = \text{Var}(X(t) - X(0)) = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{it \cdot \xi} - 1|^2 f(\xi) d\xi. \quad (1.3)$$

On dit alors que X est un champ aléatoire gaussien à densité spectrale f . C'est en particulier le cas du champ brownien fractionnaire B_H . Le choix de la densité spectrale $f(\xi) = |\xi|^{-2H-d}$ implique en particulier l'autosimilarité globale d'ordre H de B_H . Rappelons qu'un champ X est dit autosimilaire d'ordre H s'il satisfait

$$\left\{ X(ct); t \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{\text{loi}}{=} c^H \left\{ X(t); t \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (1.4)$$

pour tout $c > 0$. On peut s'intéresser à une propriété d'autosimilarité asymptotique locale [BJR97] (lass) qui correspond à une autosimilarité à petites échelles. Le champ X est lass d'ordre $H > 0$ au point $t \in \mathbb{R}^d$ si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{X(t + \varepsilon u) - X(t)}{\varepsilon^H}; u \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{fdd}{=} \left\{ Z_t(u); u \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (1.5)$$

où Z_t est un champ non dégénéré appelé champ tangent de X au point t . Cette propriété est satisfaite en tout point t par un champ à densité spectrale f dès que celle-ci vérifie

$$f(\xi) = \frac{c(\xi/|\xi|)}{|\xi|^{2H+d}} + o_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^{2H+d}} \right),$$

avec $c \in L^1(S^{d-1})$ positive, non nulle, et $H \in (0, 1)$. Pour la modélisation de milieux homogènes anisotropes, A. Bonami et A. Estrade se sont intéressées à des champs, appelés champs browniens fractionnaires anisotropes, dont la densité spectrale est donnée par une fonction de type

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2h(\xi)+d}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (1.6)$$

où les fonctions c et h ne dépendent que de la direction $\xi/|\xi|$ avec $c \geq 0$ et $h \in (0, 1)$. Une des difficultés est alors de retrouver la fonction d'anisotropie h , au vu d'une ou plusieurs réalisations. On perd la propriété d'autosimilarité globale et la propriété lass (1.5) sera vérifiée en tout point t par $H = \operatorname{ess\,inf}_{S^{d-1}} h$ si cette valeur est atteinte sur un ensemble de mesure non nulle où c est strictement positive. On retrouve également cette valeur par une étude directe la régularité höldérienne des trajectoires du champ.

1.1.2 Régularité höldérienne

Rappelons qu'un champ aléatoire X est dit satisfaire une condition de Hölder d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ uniforme sur tout compact si, pour tout compact K de \mathbb{R}^d , il existe une variable aléatoire A_K positive et finie presque sûrement telle que, presque sûrement,

$$\forall t, s \in K, \quad |X(t) - X(s)| \leq A_K |t - s|^\alpha.$$

Lorsque X est gaussien et satisfait $\|X(t) - X(s)\|_2 \leq C_K |t - s|^H$ avec $\|Y\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$, il existe une modification \tilde{X} de X qui satisfait une condition de Hölder d'ordre $H - \varepsilon$ uniforme sur K , pour tout $\varepsilon > 0$. On obtient une estimation plus précise de cet exposant en regardant ce qu'il se passe pour des valeurs plus grandes que H . On dit que X admet $H \in (0, 1)$ pour exposant de Hölder quadratique critique si pour tout $0 < \alpha < H < \beta < 1$ il existe $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$ avec $|t - s|$ suffisamment petit on ait

$$c_1 |t - s|^\beta \leq \|X(t) - X(s)\|_2 \leq c_2 |t - s|^\alpha.$$

Lorsque X est gaussien cela implique l'existence d'une modification continue \tilde{X} de X telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ l'exposant de Hölder ponctuel de \tilde{X} au point t , défini par

$$H_{\text{ponc}}(t) = \sup \left\{ \alpha > 0; \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tilde{X}(t+u) - \tilde{X}(t)}{|u|^\alpha} = 0 \right\}, \quad (1.7)$$

vérifie $H_{\text{ponc}}(t) = H$ p.s. On peut également démontrer que (voir par exemple [Adl81]),

$$\dim_{\mathcal{B}} \tilde{X} = \dim_{\mathcal{H}} \tilde{X} = d + 1 - H \text{ p.s.}$$

avec $\dim_{\mathcal{H}} \tilde{X}$ et $\dim_{\mathcal{B}} \tilde{X}$ les dimensions de Hausdorff et de boîtes du graphe de \tilde{X} sur un compact K de \mathbb{R}^d [Fal90]. Du point de vue de la modélisation, l'exposant de Hölder critique est lié à la

rugosité ou irrégularité du modèle étudié. Plus cet exposant est petit, plus le modèle est rugueux ou irrégulier, comme on peut le voir sur la figure 1.1. Pour des champs gaussiens centrés à accroissements stationnaires c'est alors le comportement local du variogramme (1.3) au voisinage de 0 qui décrit la régularité höldérienne. Celui-ci est donné par le comportement asymptotique aux hautes fréquences de la densité spectrale [BE03].

Proposition 1.1. *Soit X un champ gaussien de densité spectrale f et de variogramme v_X .*

(a) *Soit $0 < \alpha \leq \beta < 1$. Si il existe $A, B_1, B_2 > 0$ et un sous-ensemble E de la sphère unité S^{d-1} de \mathbb{R}^d de mesure positive tel que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\begin{aligned} (i) \quad & |\xi| \geq A \Rightarrow |f(\xi)| \leq B_1 |\xi|^{-2\alpha-d}; \\ (ii) \quad & |\xi| \geq A \text{ et } \frac{\xi}{|\xi|} \in E \Rightarrow |f(\xi)| \geq B_2 |\xi|^{-2\beta-d}; \end{aligned}$$

alors il existe $\delta > 0$ et $c_1, c_2 > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$(iii) \quad |t| \leq \delta \Rightarrow c_1 |t|^{2\beta} \leq v_X(t) \leq c_2 |t|^{2\alpha}$$

(b) *Si la condition (iii) est vérifiée pour tout α, β avec $0 < \alpha < H < \beta < 1$ alors X admet $H \in (0, 1)$ pour exposant de Hölder quadratique critique.*

Lorsque c est constante, l'exposant de Hölder quadratique critique du champ brownien fractionnaire anisotrope est bien donné par $H = \operatorname{ess\,inf}_{S^{d-1}} h$ puisque la densité spectrale (1.6) vérifie les points (i) et (ii) pour tout $\alpha < H < \beta$. Il est alors naturel de se demander si une analyse directionnelle peut permettre de détecter l'anisotropie.

1.2 Analyse directionnelle et Transformées de Radon

1.2.1 Processus lignes

On considère la restriction d'un champ X le long d'une droite $\{t_0 + t\theta; t \in \mathbb{R}\}$ pour un vecteur $t_0 \in \mathbb{R}^d$ et une direction $\theta \in S^{d-1}$ fixés, notée $L_{t_0, \theta} X = \{X(t_0 + t\theta); t \in \mathbb{R}\}$, et appelée processus ligne [P4]. Lorsque le champ est supposé à accroissements stationnaires, la régularité du processus ligne ne dépend pas de t_0 . Si on suppose de plus qu'il existe une fonction $\beta : S^{d-1} \rightarrow (0, 1)$ telle que $L_{t_0, \theta} X$ admette $\beta(\theta)$ pour exposant de Hölder quadratique critique on peut montrer que β prend au plus d valeurs et que cette fonction est constante, sauf sur l'intersection de la sphère avec un sous-espace de dimension au plus $d - 1$ [BE03]. En particulier, si $d = 2$, il existe au plus une direction pour laquelle la régularité peut varier. Si on suppose que X admet f pour densité spectrale, le processus $L_{t_0, \theta} X$ admet également une densité spectrale qui est donnée par la transformée de Radon de f

$$\mathcal{L}_\theta f(\zeta) = \int_{(\theta)^\perp} f(\zeta\theta + \eta) d\eta, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Lorsque f satisfait (i) et (ii) de la proposition 1.1 pour tout $\alpha < H < \beta$ on obtient que le processus $L_{t_0, \theta} X$ admet H pour exposant de Hölder quadratique critique quelle que soit la direction θ . Une étude directionnelle du champ brownien fractionnaire anisotrope permet donc d'estimer $H = \operatorname{ess\,inf}_{S^{d-1}} h$ [Beg07] mais ne permet pas de rendre compte de l'anisotropie de h . Pour la déterminer, on peut considérer une transformée de Radon à fenêtre du champ.

1.2.2 Transformées de Radon de champs aléatoires

Dans [BE03], les auteurs donnent une méthode théorique afin de retrouver la fonction d'anisotropie dans le cas d'un champ gaussien à accroissements stationnaires. Elles choisissent une fenêtre adaptée et effectuent une transformée de Radon à fenêtre du modèle d -dimensionnel. Alors, pour chaque

direction, elles obtiennent un processus gaussien centré encore à accroissements stationnaires et dont la densité spectrale est obtenue par transformée de Radon à fenêtre de l'originale dans la même direction. Ce résultat m'a conduit à étudier, dans un premier temps, le comportement asymptotique des transformées de Radon à fenêtre. Pour un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^d , noté V , on donne un sens au champ

$$P_{V,\phi}(X) = \left\{ \int_{V^\perp} X(s+t)\phi(s)ds; t \in V \right\}, \quad (1.9)$$

appelé transformée de Radon à fenêtre de X sur V , en choisissant ϕ une fenêtre déterministe sur V^\perp adaptée. La stationnarité est préservée par cette transformation et, lorsque X admet f pour densité spectrale, le champ $P_{V,\phi}(X)$ admet la densité spectrale donnée par

$$\mathcal{P}_{V,|\widehat{\phi}|^2}f(\zeta) = \int_{V^\perp} f(\zeta + \eta) |\widehat{\phi}(\eta)|^2 d\eta, \quad \zeta \in V.$$

Nous montrons alors dans [5] que le comportement asymptotique de la densité spectrale est conservé par cette transformation. En effet, en choisissant une fenêtre et $\delta > 0$ adaptés, lorsque f vérifie

$$f(\xi) = \frac{c(\xi)}{|\xi|^{2h(\xi)+d}} + o\left(\frac{1}{|\xi|^{2h(\xi)+d+\delta}}\right) \text{ quand } |\xi| \rightarrow +\infty,$$

avec h et c ne dépendant que de la direction $\xi/|\xi|$, positives et lipschitziennes sur la sphère, on a

$$\mathcal{P}_{V,|\widehat{\phi}|^2}f(\zeta) = \frac{c(\zeta)}{|\zeta|^{2h(\zeta)+d}} \int_{V^\perp} |\widehat{\phi}(\eta)|^2 d\eta + o\left(\frac{1}{|\zeta|^{2h(\zeta)+d+\delta}}\right) \text{ quand } \zeta \in V \text{ et } |\zeta| \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, lorsque V est engendré par une direction θ , la densité spectrale du processus $P_{\langle\theta\rangle,\phi}(X)$ est asymptotiquement de la forme $|\zeta|^{-2(h(\theta)+\frac{d-1}{2})+1}$, ce qui permet de déduire des propriétés lass, en considérant des accroissements supérieurs lorsque $h(\theta) + \frac{d-1}{2} > 1$. En particulier, dès que $d \geq 3$, $h(\theta) + \frac{d-1}{2} > 1$ et cela se traduit par le fait que le variogramme de $P_{\langle\theta\rangle,\phi}(X)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et ainsi le processus $P_{\langle\theta\rangle,\phi}(X)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en moyenne quadratique. On peut alors généraliser la notion d'exposant de Hölder quadratique critique à des valeurs $H > 1$ non entières pour des processus 1D. Plus précisément, si $n \in \mathbb{N}$ on dit que le processus gaussien $Y = \{Y(t); t \in \mathbb{R}\}$ admet $H \in (n, n+1)$ pour exposant de Hölder quadratique critique si Y est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} en moyenne quadratique et le processus $Y^{(n)}$ admet $H - n \in (0, 1)$ pour exposant de Hölder quadratique critique. On peut alors montrer que si la densité spectrale d'un processus Y satisfait (i) et (ii) de la proposition 1.1 pour tout $\alpha < H < \beta$ alors $H \in (n, n+1)$ est bien l'exposant de Hölder quadratique critique de Y . Ainsi, lorsque X est un champ brownien fractionnaire anisotrope, $P_{\langle\theta\rangle,\phi}(X)$ admet $h(\theta) + \frac{d-1}{2}$ comme exposant de Hölder quadratique critique. Ceci permet théoriquement de déterminer la fonction d'anisotropie h .

Remarquons que les transformées de Radon apparaissent non seulement comme un outil d'analyse de champs anisotropes mais aussi comme un moyen de modélisation du procédé de radiographie. En effet, une transformée X-ray à fenêtre du champ s'obtient simplement en choisissant $V = \langle\theta\rangle^\perp$, comme nous l'avons étudié dans [2] (voir la partie 3.1.1).

1.2.3 Injectivité des transformées de Radon

Cette étude m'a naturellement amenée à la question de l'injectivité d'une telle transformation. Bien que la transformée de Radon classique soit injective sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ (cf. [RK96] par exemple), il n'en est rien en général pour les transformées de Radon à fenêtre. D'après [Qui83], le choix d'une fenêtre invariante par rotation permet tout de même d'obtenir l'injectivité pour les fonctions de carré

intégrable à support compact. Dans [1], j'ai étendu cette classe de fonctions à celles qui décroissent plus vite que n'importe quelle fonction gaussienne.

1.3 Estimations

Il existe une vaste littérature concernant l'estimation du paramètre de Hurst H d'un mouvement brownien fractionnaire (voir par exemple [Coe00] et [BLO⁺03]). La plupart des méthodes se ramènent à l'étude des accroissements qui définissent un processus stationnaire (bruit gaussien fractionnaire). Le choix de la méthode dépend naturellement du point de vue avec lequel on considère le paramètre de Hurst H . Ainsi, les méthodes dites spectrales reposent sur les propriétés d'homogénéité de la densité spectrale du bruit gaussien fractionnaire dans certaines échelles de fréquences. Les estimateurs du maximum de vraisemblance et autres estimateurs de Whittle [Ber94] sont utilisés pour les propriétés de type longue-mémoire qui sont liées à la singularité de la densité spectrale au voisinage de 0 lorsque $H \in (1/2, 1)$. Ces estimateurs sont consistants et vérifient une normalité asymptotique. Cependant l'hypothèse $H > 1/2$ est souvent trop restrictive. D'autres estimateurs sont définis en filtrant des observations discrètes (souvent équiréparties) du mouvement brownien fractionnaire. C'est le cas par exemple des estimateurs à base d'ondelettes [AGF95] ou des variations quadratiques généralisées étudiées dans [IL97, KW97]. L'intérêt de ces estimateurs est principalement dû au fait qu'ils se généralisent à une large classe de processus gaussiens qui admettent la même régularité höldérienne. Ils sont de plus consistants et peuvent vérifier une normalité asymptotique. Enfin, ils admettent également des généralisations en dimension supérieure pour l'étude de la régularité de champs gaussiens.

1.3.1 Variations quadratiques généralisées

On considère un processus gaussien centré $Y = \{Y(t); t \in \mathbb{R}\}$, à accroissements stationnaires et densité spectrale $f \in L^1(\mathbb{R}, \min(1, |\xi|^2) d\xi)$. On suppose également que f satisfait

$$f(\xi) = \frac{c}{|\xi|^{2H+1}} + O_{|\xi| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\xi|^{2H+1+s}} \right), \quad (1.10)$$

pour $H, c, s > 0$ avec $H \notin \mathbb{N}$. Ceci assure que l'exposant de Hölder quadratique critique de Y est donné par H . On suppose observer une réalisation de Y aux points discrets k/n pour $k = 0, \dots, n$: $\{Y(0), Y(1/n), \dots, Y((n-1)/n), Y(1)\}$. On cherche alors à estimer H . La première étape consiste à filtrer les observations afin de se ramener à l'étude d'un processus stationnaire. Par exemple, puisque Y a des accroissements stationnaires, le processus $\{Y((t+1)/n) - Y(t/n); t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire. Plus généralement, on peut considérer le processus filtré

$$Z_{n,\mathbf{a}}(t) = \sum_{k=0}^p a_k Y\left(\frac{t+k}{n}\right), \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Celui-ci est défini pour un filtre discret $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_p)$ de longueur $p+1$ et d'ordre K ($p, K \in \mathbb{N}$ avec $p \geq K$), ce qui signifie que

$$\sum_{k=0}^p a_k k^r = 0 \quad \text{pour } 0 \leq r \leq K-1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^p a_k k^K \neq 0.$$

Le processus $\{Y((t+1)/n) - Y(t/n); t \in \mathbb{R}\}$ des accroissements de Y avec le pas $1/n$ est obtenu en choisissant le filtre d'ordre 1 donné par $\mathbf{a} = (-1, 1)$. De même, les accroissements d'ordre K de Y avec le pas $1/n$ sont obtenus avec le filtre $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_K)$ d'ordre K donné par $a_k = (-1)^{K-k} \binom{K}{k} = (-1)^{K-k} \frac{K!}{k!(K-k)!}$ pour $0 \leq k \leq K$. Puisque Y a des accroissements stationnaires d'ordre $N = 1$, le

processus $Z_{n,\mathbf{a}}$ est stationnaire pour tout filtre d'ordre $K \geq N$. En suivant [KW97] on peut également considérer le processus filtré avec un filtre dilaté. Plus précisément, pour un entier $u \geq 1$, la dilatation \mathbf{a}^u de \mathbf{a} est défini pour $0 \leq k \leq pu$ par $a_k^u = \begin{cases} a_{k'} & \text{si } k' = ku \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Le filtre \mathbf{a}^u est de longueur $pu + 1$ et du même ordre que \mathbf{a} . Les observations de Y permettent donc de calculer $Z_{n,\mathbf{a}^u}(k)$ pour $k = 0, \dots, n - pu$. On peut alors estimer la variance empirique de $Z_{n,\mathbf{a}^u}(0)$ en considérant

$$V_{n,\mathbf{a}^u}(Y) = \frac{1}{n - pu + 1} \sum_{k=0}^{n-pu} (Z_{n,\mathbf{a}^u}(k))^2, \quad (1.11)$$

que nous appelons *variation quadratique généralisée* de Y [IL97]. Sous l'hypothèse (1.10), on peut choisir un filtre \mathbf{a} tel que

$$\mathbb{E}(V_{n,\mathbf{a}^u}(Y)) = \mathbb{E}\left((Z_{n,\mathbf{a}^u}(k))^2\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c_{\mathbf{a}} n^{-2H} u^{2H}.$$

Un estimateur asymptotique de H est obtenu en considérant par exemple pour $u \neq v$

$$\hat{H}_{n,\mathbf{a}^u,\mathbf{a}^v}(Y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{V_{n,\mathbf{a}^u}(Y)}{V_{n,\mathbf{a}^v}(Y)} \right) / \log \left(\frac{u}{v} \right) \quad (1.12)$$

En utilisant une δ -méthode, la normalité asymptotique de cet estimateur peut, selon les valeurs de s , provenir de celle de $(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y), T_{n,\mathbf{a}^v}(Y))$ avec l'estimateur

$$T_{n,\mathbf{a}^u}(Y) = \frac{V_{n,\mathbf{a}^u}(Y)}{\mathbb{E}(V_{n,\mathbf{a}^u}(Y))} = \frac{1}{n - pu + 1} \sum_{k=0}^{n-pu} (X_{n,\mathbf{a}^u}(k))^2, \quad (1.13)$$

où $X_{n,\mathbf{a}^u}(k) = Z_{n,\mathbf{a}^u}(k) / \sqrt{\mathbb{E}\left((Z_{n,\mathbf{a}^u}(k))^2\right)}$. On peut alors aborder l'étude de $T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)$ de deux points de vue différents.

Le premier, qui est celui développé dans [IL97] et suivi dans [5] et [8], consiste à voir $T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)$ comme une somme de variables aléatoires indépendantes. En effet, puisque le vecteur $(X_{n,\mathbf{a}^u}(k))_{0 \leq k \leq n-pu}$ est gaussien on peut écrire

$$T_{n,\mathbf{a}^u}(Y) = \frac{1}{n - pu + 1} \sum_{k=0}^{n-pu} \lambda_{k,n} \varepsilon_{k,n}^2,$$

avec $(\varepsilon_{k,n})_{0 \leq k \leq n-pu}$ une suite de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes et $(\lambda_{k,n})_{0 \leq k \leq n-pu}$ la suite des valeurs propres de la matrice de covariance du vecteur $(X_{n,\mathbf{a}^u}(k))_{0 \leq k \leq n-pu}$. On vérifie une condition de Lindeberg lorsque $\max_{0 \leq k \leq n-pu} \lambda_{k,n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(n \sqrt{\text{Var}(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y))} \right)$, qui assure que

$\frac{T_{n,\mathbf{a}^u}(Y) - 1}{\sqrt{\text{Var}(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y))}}$ converge vers une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On déduit la normalité asymptotique de l'équivalence

$\text{Var}(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_{\mathbf{a}^u}^2}{n}$. De plus, en remarquant que $\mathbb{E}\left((T_{n,\mathbf{a}^u}(Y) - 1)^4\right) \leq c \text{Var}(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y))^2$ on obtient également la convergence presque sûre de $T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)$ vers 1 par le lemme de Borel- Cantelli.

Le second point de vue, que nous adoptons dans [10], est lié à la théorie ergodique en remarquant que $T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)$ est la moyenne empirique du processus stationnaire discret $(X_{n,\mathbf{a}^u}(k)^2)_{k \in \mathbb{Z}}$. Lorsque $Y = B_H$ est un mouvement brownien fractionnaire, par autosimilarité, on se ramène à une suite $(X_{\mathbf{a}^u}(k)^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ qui ne dépend plus de n . La convergence presque sûre résulte du fait que le processus est ergodique car il admet une densité spectrale. Les théorèmes de Breuer-Major [BM83] donnent

des conditions d'obtention du théorème central limite associé. Nous généralisons ces résultats au tableau triangulaire $(X_{n,\mathbf{a}^u}(k)^2)_{k \in \mathbb{Z}}$, en écrivant $T_{n,\mathbf{a}^u}(Y) - 1$ comme un élément d'un chaos de Wiener d'ordre 2 pour lequel les méthodes de Stein et les techniques de calcul de Malliavin développées dans [NOL08, NP09a] s'appliquent. Ces résultats sont décrits dans la partie 1.3.2.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que f , la densité spectrale de Y , satisfait (1.10) pour $H, s > 0$. Soit \mathbf{a} un filtre d'ordre K . On suppose de plus que $|x|^{4K} f(x)^2$ est intégrable sur tout compact de \mathbb{R} . Si $K > H + \frac{1}{4}$, alors pour $u, v \geq 1$ entiers distincts, lorsque n tend vers l'infini,*

$$(i) \quad n \text{Var}(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)) \longrightarrow \sigma_{\mathbf{a}^u}^2(H)$$

$$(ii) \quad \sqrt{n}(T_{n,\mathbf{a}^u}(Y) - 1, T_{n,\mathbf{a}^v}(Y) - 1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{a}^u}^2(H) & \rho_{\mathbf{a}^u, \mathbf{a}^v}(H) \\ \rho_{\mathbf{a}^u, \mathbf{a}^v}(H) & \sigma_{\mathbf{a}^v}^2(H) \end{pmatrix}\right),$$

avec $\sigma_{\mathbf{a}^u}^2(H) = \rho_{\mathbf{a}^u, \mathbf{a}^u}(H)$ et

$$\rho_{\mathbf{a}^u, \mathbf{a}^v}(H) = \frac{4\pi}{C_{\mathbf{a}^u}(H)C_{\mathbf{a}^v}(H)} \int_{[-\pi, \pi]} \left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-ikux} \sum_{k=0}^p a_k e^{ikvx} \right|^2 \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|x + 2\pi k|^{2H+1}} \right|^2 dx$$

$$\text{où } C_{\mathbf{a}^u}(H) = \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-ikux} \right|^2 |x|^{-2H-1} dx.$$

Ceci permet d'obtenir la convergence presque sûre de l'estimateur $\widehat{H}_{n,\mathbf{a}^u, \mathbf{a}^v}$ donné par (1.12) vers H ainsi que sa normalité asymptotique dès que $K > H + \frac{1}{4}$ et $s > 1/2$.

Dans [5], nous avons ainsi construit des estimateurs de la fonction d'anisotropie $h(\theta)$ de champs browniens fractionnaires anisotropes, en considérant les variations quadratiques du processus $P_{(\theta), \phi}(X)$, obtenu par transformée de Radon à fenêtre. Dans [8], nous obtenons la normalité asymptotique d'un couple d'estimateurs de la fonction d'anisotropie dans deux directions différentes, ce qui nous a permis de construire un premier test d'anisotropie. C'est une conséquence du fait que si θ et θ' sont deux directions indépendantes de S^{d-1} , en choisissant une fenêtre ϕ convenable, on obtient que

$$n \text{Cov}(T_{n,\mathbf{a}^u}(P_{(\theta), \phi}(X)), T_{n,\mathbf{a}^v}(P_{(\theta'), \phi}(X))) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Dans [10], nous avons placé les résultats de normalité asymptotique obtenus précédemment dans le cadre plus large des séries temporelles gaussiennes à densité spectrale. Cette mise en perspective nous permet d'utiliser les résultats de [NP09a, NOL08, PT04] et d'avoir des conditions assez simples sur la densité spectrale pour obtenir la normalité asymptotique.

1.3.2 Intégrales multiples de Wiener-Itô

Comme on l'a vu précédemment, la normalité asymptotique de $T_{n,\mathbf{a}^u}(Y)$ est obtenue à partir d'un théorème central limite pour $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_n(k)^2$, avec $(X_n(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite gaussienne stationnaire centrée réduite. Le théorème central limite est donné par la convergence en loi vers une gaussienne de

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (X_n(k)^2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} H_2(X_n(k)),$$

où $H_2(x) = x^2 - 1$ est le polynôme d'Hermite d'ordre 2. Plus généralement, on peut s'intéresser à la convergence en loi de

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} H_l(X_n(k)),$$

où H_l est le polynôme d'Hermite d'ordre $l \geq 2$, défini par $H_l(t) = (-1)^l e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^l}{dt^l} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$. De telles quantités peuvent être en fait définies comme des intégrales multiples de Wiener-Itô d'ordre l . On note r_n la covariance de $(X_n(k))_{k \in \mathbb{Z}}$. Par stationnarité,

$$r_n(k) = \text{Cov}(X_n(k+k'), X_n(k)) \text{ avec } r_n(0) = \text{Var}(X_n(k')) = 1,$$

par hypothèse. On peut alors définir un processus gaussien isonormal $\{W(g) : g \in \mathfrak{H}\}$ (voir par exemple [Nua06] chapitre 1), où $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}})$ est un espace de Hilbert séparable, tel que $(X_n(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ a même loi que $(W(g_{n,k}))_{k \in \mathbb{Z}}$, avec $g_{n,k} \in \mathfrak{H}$ vérifiant

$$\langle g_{n,k}, g_{n,k'} \rangle_{\mathfrak{H}} = r_n(k - k').$$

On note \mathcal{G} la tribu engendrée par $\{W(g) : g \in \mathfrak{H}\}$ et \mathcal{H}_l le sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ engendré par $\{H_l(W(g)) : g \in \mathfrak{H}\}$. Par la décomposition en chaos de Wiener on obtient que $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l$.

On note alors $\mathfrak{H}^{\otimes l}$, le produit tensoriel symétrique d'ordre l que l'on munit de la norme $\sqrt{l!} \|\cdot\|_{\mathfrak{H}^{\otimes l}}$ et I_l l'isométrie entre $\mathfrak{H}^{\otimes l}$ et \mathcal{H}_l le chaos de Wiener d'ordre l . Alors $H_l(X_n(k)) = I_l(g_{n,k}^{\otimes l})$ et

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} H_l(X_n(k)) = I_l(F_n), \text{ avec } F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} g_{n,k}^{\otimes l}.$$

Pour $p \geq 1$, on introduit les espaces de Banach $\ell^p(\mathbb{Z})$ formés des suites $u = (u(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ de puissance

p -ième sommables munis de la norme $\|u\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u(k)|^p \right)^{1/p}$. Lorsque $r_n = r$ ne dépend pas de

n , il suffit que $r \in \ell^l(\mathbb{Z})$ pour avoir la convergence en loi vers une gaussienne de Y_n par le théorème de Breuer-Major [BM83]. Nous généralisons ce résultat dans [10] en nous intéressant particulièrement au cas où la suite $(X_n(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ admet une densité spectrale. Rappelons en effet que, par le théorème d'Herglotz, il existe une mesure positive μ_{X_n} sur le tore $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, appelée mesure spectrale de $(X_n(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$r_n(k) = \widehat{\mu_{X_n}}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{-ikx} \mu_{X_n}(dx).$$

Remarquons que, puisque $\text{Cov}(H_l(X_n(k'+k)), H_l(X_n(k'))) = l! r_n(k-k')^l$ par isométrie, la mesure spectrale de $(H_l(X_n(k)))_{k \in \mathbb{Z}}$ est donnée par $l! \mu_{X_n}^{*l}$ où $*l$ désigne la convolution d'ordre l . On identifie les fonctions 2π -periodiques avec les fonctions définies sur le tore \mathbb{T} et les fonctions définies sur $[-\pi, +\pi)$ et on introduit les espaces de Banach $L^p(\mathbb{T})$ de fonctions mesurables f sur $[-\pi, +\pi)$ de puissance p -ième intégrable munis de la norme

$$\|f\|_p^p := \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^p dx. \quad (1.14)$$

On s'intéresse particulièrement au cas où la mesure μ_{X_n} admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue appelée densité spectrale de $(X_n(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ et notée f_{X_n} . L'existence d'une densité spectrale est assurée dès que $r_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et dans ce cas $f_{X_n}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_n(k) e^{ikx} \in L^2(\mathbb{T})$ est une fonction positive

et paire p.p. Lorsque de plus $f_{X_n} \in L^1(\mathbb{T})$ on peut choisir :

- $\mathfrak{H} = L_e^2(\mathbb{T})$, l'ensemble des fonctions complexes $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ qui satisfont $\overline{\psi(x)} = \psi(-x)$ p.p. $x \in \mathbb{T}$, muni du produit scalaire $\langle \psi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \psi(x) \varphi(x) dx$;
- $W(\psi) = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(x) W(dx)$ avec W une mesure gaussienne complexe sur $[-\pi, +\pi)$ de mesure de contrôle $\frac{1}{2\pi} dx$ vérifiant $W(-A) = \overline{W(A)}$ p.s., pour tout borélien A de $[-\pi, \pi)$;

- $g_{n,k}(x) = e^{-ikx} f_{X_n}(x)^{1/2} \in L_e^2(\mathbb{T})$.

On obtient le résultat suivant qui est une conséquence de la remarque 2.11 et du Théorème 2.10 de [10].

Théorème 1.2. *On suppose que $r_n \in \ell^l(\mathbb{Z})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $r \in \ell^l(\mathbb{Z})$ tel que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers r dans $\ell^l(\mathbb{Z})$. Alors, lorsque n tend vers l'infini :*

$$(i) \quad \text{Var} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} H_l(X_n(k)) \right) \rightarrow \sigma_l^2,$$

$$(ii) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} H_l(X_n(k)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_l^2),$$

avec $\sigma_l^2 = l! \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k)^l$.

Par l'inégalité de Hausdorff-Young (voir [LL01] par exemple), en supposant que $r_n = \widehat{f_{X_n}}$, l'hypothèse est vérifiée dès que f_{X_n} appartient uniformément à l'espace $L^{\frac{l}{l-1}}(\mathbb{T})$ et converge dans cet espace vers une fonction f_X et dans ce cas $\sigma_l^2 = l! f_X^{*l}(0)$.

La démonstration de (i) est donnée par un calcul direct en remarquant que

$$\text{Var}(Y_n) = l! \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) r_n(k)^l.$$

En utilisant l'équivalence des normes $L^p(\Omega, \mathbb{P})$ dans un chaos d'ordre fixé et le lemme de Borel-Cantelli, cela implique en particulier que $n^{-\alpha} Y_n$ converge presque sûrement vers 0 dès que $\alpha > 0$.

Le point (ii) s'obtient de (i) si $l = 1$ et se démontre à l'aide du Théorème 4 de [NOL08] pour $l \geq 2$. En effet, puisque $Y_n = I_l(F_n)$ et vérifie (i), il suffit de démontrer que $\frac{1}{l} \|DY_n\|_{\mathfrak{H}}^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l\sigma_l^2$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$,

avec DY_n la dérivée de Malliavin de Y_n donnée par $DY_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} l H_{l-1}(X_n(k)) g_{n,k}$. On obtient alors

$$\|DY_n\|_{\mathfrak{H}}^2 = \frac{l^2}{n} \sum_{k,k'=0}^{n-1} H_{l-1}(X_n(k)) H_{l-1}(X_n(k')) r_n(k-k').$$

On remarque que lorsque $X_n = X$ et $r_n = r = \widehat{f_X}$, $\|DY_n\|_{\mathfrak{H}}^2 = l^2 \Pi_{f_X, n}^{(l-1)}$ en définissant le périodogramme intégré $\Pi_{\phi, n}^{(l-1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi_n^{(l-1)}(x) \phi(x) dx$, où $\phi \in L^{l/(l-1)}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ et

$$\Pi_n^{(l-1)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k,k'=0}^{n-1} H_{l-1}(X(k)) H_{l-1}(X(k')) e^{i(k'-k)x} = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} H_{l-1}(X(k)) e^{ikx} \right|^2,$$

est le périodogramme d'ordre n de la suite stationnaire $(H_{l-1}(X(k)))_{k \in \mathbb{Z}}$ qui admet $(l-1)! f_X^{*(l-1)}$ pour densité spectrale (voir [Han67] par exemple). Il faut alors montrer que le périodogramme intégré est un estimateur convergent en moyenne quadratique de

$$\frac{(l-1)!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (l-1)! f_X^{*(l-1)}(x) \phi(x) dx = (l-1)! \sum_{k \in \mathbb{Z}} r(k)^{l-1} c_k(\phi),$$

en notant $c_k(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \phi(x) e^{-ikx} dx$ le k -ième coefficient de Fourier de ϕ . On a clairement,

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{l} \|DY_n\|_{\mathfrak{H}}^2 \right) = l! \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) r_n(k)^l \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l\sigma_l^2.$$

Le calcul de la variance est plus technique et repose sur la formule de multiplication (voir [NOL08] par exemple)

$$H_{l-1}(X_n(k))H_{l-1}(X_n(k')) = \sum_{p=0}^{l-1} p!(2(l-1-p))! \binom{l-1}{p}^2 I_{2l-2p-2}(g_{n,k}^{\odot l-1} \tilde{\otimes}_p g_{n,k'}^{\odot l-1}),$$

avec

$$g_{n,k}^{\odot l-1} \tilde{\otimes}_p g_{n,k'}^{\odot l-1} = \langle g_{n,k}, g_{n,k'} \rangle_{\mathfrak{H}}^p \left(g_{n,k}^{\odot l-1-p} \otimes g_{n,k'}^{\odot l-1-p} \right)_s,$$

où $(\cdot)_s$ est la symétrisation dans $\mathfrak{H}^{\otimes(2l-2p-2)}$ d'une fonction de $\mathfrak{H}^{\otimes(2l-2p-2)}$.

Ce cadre d'étude est très agréable puisqu'il permet de nombreux approfondissements et généralisations.

On peut ainsi obtenir la vitesse de convergence de (ii) du théorème 1.2. En effet, si Z est une variable aléatoire de variance 1 dans le chaos de Wiener d'ordre l et $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors la distance de Kolmogorov entre Z et N est majorée par (voir [NP09a] par exemple)

$$d_{Kol}(Z, N) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(Z \leq t) - \mathbb{P}(N \leq t)| \leq \sqrt{\left(\text{Var} \left(\frac{1}{l} \|DZ\|_{\mathfrak{H}}^2 \right) \right)}. \quad (1.15)$$

Ce résultat permet en particulier de donner des versions quantitatives des théorèmes de Breuer-Major [NPP].

On peut également obtenir assez facilement des théorèmes limites vectoriels. Si on considère pour $l, \nu \geq 1$, le vecteur $(I_l(F_n^{(1)}), \dots, I_l(F_n^{(\nu)}))$ et que l'on suppose qu'il existe $\Sigma = (\Sigma_{i,j})_{1 \leq i, j \leq \nu}$ une matrice positive de taille $\nu \times \nu$ telle que la matrice de covariance de ce vecteur converge vers Σ . D'après [PT04] il suffit que chacune des marginales vérifie $I_l(F_n^{(j)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{N}(0, \Sigma_{j,j})$, $1 \leq j \leq \nu$, pour que le vecteur $(I_l(F_n^{(1)}), \dots, I_l(F_n^{(\nu)}))$ converge vers une loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$.

Enfin, dans [10] nous considérons également des généralisations du théorème 1.2 à des suites définies sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$.

1.4 Simulations et applications

Nous avons développé et illustré ces résultats sur des simulations de champs browniens fractionnaires anisotropes 2D en vue d'applications à certaines images médicales dans [5,8,P2,P4].

1.4.1 Simulations et implémentations numériques

En pratique, on observe les images sur une grille rectangulaire de taille $n \times n$, avec $n = 2^m$ pour $m \in \mathbb{N}$. A chaque pixel $(k, l) \in \{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, n-1\}$ est associé un niveau de gris qui correspond à une valeur réelle $x(k, l) \in \mathbb{R}$. Nous faisons l'hypothèse qu'il existe X un champ brownien fractionnaire anisotrope 2D de densité spectrale donnée par (1.6) avec $c = 1$ et $h : [-\pi, \pi] \rightarrow (0, 1)$ une fonction paire (en identifiant S^1 avec $[-\pi, \pi]$) tel que $\{x(k, l); 0 \leq k, l \leq n-1\}$ correspond à une réalisation de $\{X(k/n, l/n); 0 \leq k, l \leq n-1\}$.

Sous cette hypothèse, nous nous intéressons à la question de savoir si l'image correspond à un champ X anisotrope, c'est à dire pour lequel la fonction d'anisotropie h n'est pas constante. Pour cela nous utilisons les versions discrétisées des processus lignes $L_{t_0, \theta_1} X$, $L_{t_0, \theta_2} X$ et des processus transformées de Radon à fenêtre $P_{(\theta_1), \phi} X$, $P_{(\theta_2), \phi} X$ en choisissant pour ϕ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ égale à 1 sur $[0, 1]$ et nulle en dehors de $(-1/n, 1 + 1/n)$ avec $\theta_1 = (0, 1)$ la direction verticale et $\theta_2 = (1, 0)$ la direction horizontale.

On définit alors les restrictions sur les lignes

$$\forall 0 \leq k, l \leq n-1, \quad z_1^l(k) = x(k, l) = z_2^k(l), \quad (1.16)$$

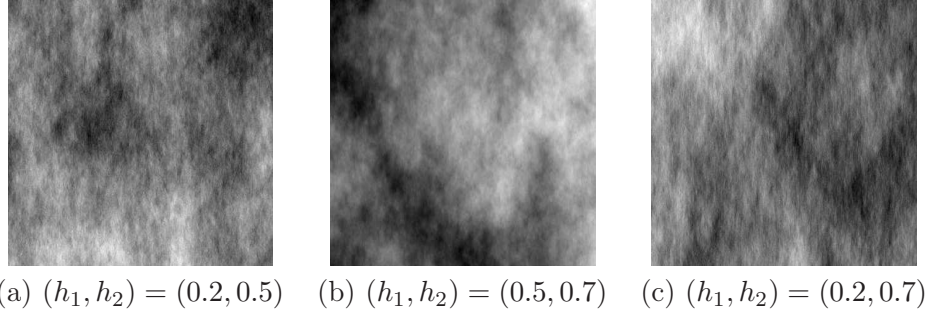


FIGURE 1.2 – Simulations approchées de champs browniens fractionnaires anisotropes pour $c = 1$ et $h(\theta) = |\langle \theta, \theta_1 \rangle| h_1 + (1 - |\langle \theta, \theta_1 \rangle|) h_2$, $\theta_1 = (1, 0)$.

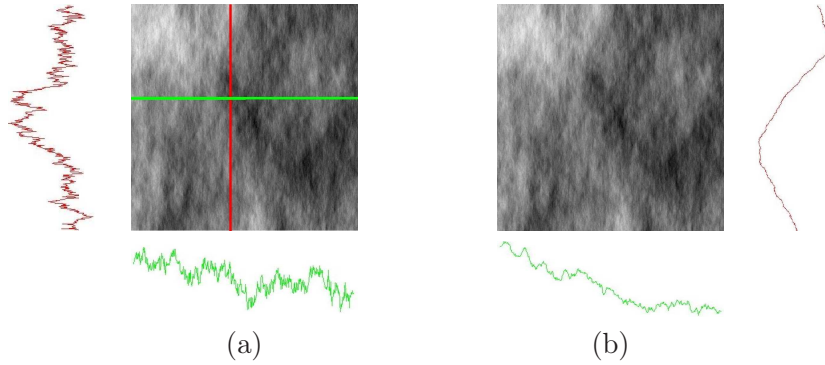


FIGURE 1.3 – (a) lignes extraites (b) transformées de Radon à fenêtre.

dont on calcule les variations quadratiques des accroissements second $w_{e,u}^j$

$$w_{e,u}^j = \frac{1}{n-2u} \sum_{p=0}^{n-2u-1} (z_e^j(p) - 2z_e^j(p+u) + z_e^j(p+2u))^2,$$

pour $u = 1, 2$, $0 \leq j \leq n-1$ et $e = 1, 2$ associé à la direction θ_e . On calcule ensuite les estimateurs \hat{h}_{0e} de l'exposant de Hölder quadratique critique des processus lignes correspondants aux directions $e = 1, 2$

$$\hat{h}_{0e} = \frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{\sum_{j=0}^{n-1} w_{e,2}^j}{\sum_{j=0}^{n-1} w_{e,1}^j} \right), \quad (1.17)$$

Sous notre hypothèse \hat{h}_{0e} doivent tous deux estimer la valeur $H := \operatorname{ess\,inf}_{[-\pi, \pi]} h$. On définit également les processus transformées de Radon à fenêtre discrétisés (y_1 et y_2) de x :

$$\forall 0 \leq k, l \leq n-1, \quad y_1(k) = \frac{l}{n} \sum_{l=0}^{n-1} x(k, l) \quad \text{et} \quad y_2(l) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x(k, l),$$

ce qui revient à discrétiser l'intégrale définissant les transformées de Radon à fenêtre. L'effet de la discrétisation sur les estimateurs a été étudié dans [5]. L'erreur d'approximation est liée à la régularité du champ X et donc à H . Afin d'estimer la régularité de $P_{\langle \theta_e \rangle, \phi} X$, c'est à dire $h(\theta_e) + 1/2$ et non pas H , il est nécessaire de sous-échantillonner les processus discrétisés. Pour $e = 1, 2$, on considère les sous-échantillons $(y_e(2^\nu k))_{0 \leq k \leq 2^{-\nu}(n-1)}$ de y_e , obtenu pour un facteur d'échantillonnage $\nu \in \mathbb{N}$ tel que

$2^{\nu+1}u < n$, dont on calcule les variations quadratiques des accroissements second $v_{e,u}^{\nu}$

$$v_{e,u}^{\nu} = \frac{1}{\tilde{M}} \sum_{p=0}^{\tilde{M}-1} (y_e(sp) - 2y_e(s(p+u)) + y_e(s(p+2u)))^2,$$

pour $u = 1, 2$, $s = 2^{\nu}$ et $\tilde{M} = n/2^{\nu} - 2u$. On obtient alors un estimateur de $h(\theta_e)$ en considérant

$$\hat{h}_e^{\nu} = \frac{1}{2 \log(2)} \log \left(\frac{v_{e,2}^{\nu}}{v_{e,1}^{\nu}} \right) - \frac{1}{2}. \quad (1.18)$$

Nous avons cherché à évaluer ces estimateurs sur des simulations de champs browniens fractionnaires anisotropes.

J'ai commencé à regarder le problème de la simulation des champs gaussiens en dimension supérieure à 1 au cours de ma thèse. En collaboration avec Aurélia Fraysse et Céline Lacaux, nous avons implémenté un code matlab pour la simulation exacte de champs browniens fractionnaires en dimension 2, proposée par M. Stein [Ste02]. Ainsi, lorsque h est constante égale à H nous disposons de réalisations exactes de $\{X(k/n, l/n); 0 \leq k, l \leq n-1\}$ pour $n = 2^9 = 512$ (voir figure 1.1). Dans [5] nous montrons dans ce cas que les estimateurs \hat{h}_e^{ν} sous-estiment les valeurs théoriques. Le biais diminue lorsque ν ou H augmentent alors que l'écart-type augmente avec ν sans varier sensiblement avec H . Ainsi pour $\nu = 0$ le biais varie entre 0.24 ($H = 0.2$) et 0.05 ($H = 0.7$) avec un écart-type de l'ordre de 0.05 alors que pour $\nu = 2$ le biais varie entre 0.04 ($H = 0.2$) et 0.03 ($H = 0.7$) avec un écart-type de l'ordre de 0.1. Cette étude nous a permis d'établir empiriquement une zone de rejet pour un premier test d'anisotropie dans [8] en considérant $|\hat{h}_1^{\nu} - \hat{h}_2^{\nu}|$. A titre de comparaison les biais et écart-types des estimateurs lignes \hat{h}_{0e} sont de l'ordre de 10^{-3} !

Le problème de la simulation exacte pour le cas anisotrope reste ouvert. Dans [5,8,P2], nous avons considéré des simulations obtenues par une méthode spectrale, basée sur la convolution discrète d'un bruit blanc gaussien implémentée par transformée de Fourier rapide. Cette méthode de simulation approchée demande à être améliorée. C'est d'ailleurs l'objet d'un travail en cours [15] dont certains résultats préliminaires sont donnés dans [P4] (voir également la figure 1.2).

1.4.2 Applications en imagerie médicale

Nous avons appliqué cette méthodologie à deux types d'images médicales pour lesquelles l'analyse fractale a été validée par diverses études [BJJ01, HDV⁺99, BPL⁺01, HJJ⁺94] : des mammographies et des clichés radiographiques d'os du calcaneum.

Mammographies

Le sein est constitué de deux types de tissus : les tissus adipeux qui sont radio-transparents et ont tendance à obscurcir la mammographie et les tissus fibro-glandulaires qui sont à l'inverse radio-opaques et ont tendance à éclaircir la mammographie (voir Figure 1.4.2).

La densité du sein est liée à la proportion de la composante fibro-glandulaire observée sur la mammographie. Elle est évaluée sur une mammographie de manière qualitative par le radiologue qui classe les images en quatre catégories, en fonction du rapport entre les zones claires et les zones sombres, proposées par Wolfe [Wol76] qui a avancé l'idée d'une corrélation avec le risque de développer un cancer du sein. Dès lors, de nombreuses études ont porté sur l'automatisation d'une telle évaluation. Un certain nombre d'entre elles est lié à l'analyse fractale des mammographies. Ainsi, Heine et al [HV02] ont validé l'hypothèse d'une autosimilarité statistique en déterminant un indice de Hurst $H \in [0.33, 0.42]$ par une méthode spectrale. Parallèlement, Kestener et al [KLSJA01] ont

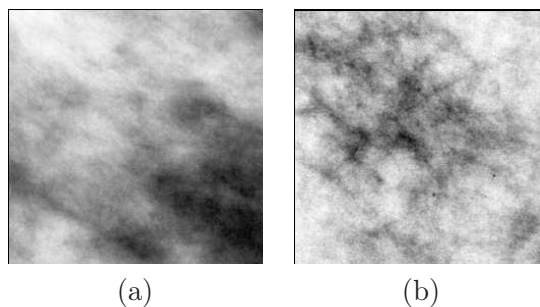


FIGURE 1.4 – Régions extraites d’une mammographie (a) tissus fibro-glandulaires et (b) tissus adipeux.

utilisé l’analyse multifractale pour discriminer les régions denses $H \in [0.55, 0.75]$ des régions adipeuses $H \in [0.2, 0.35]$.

Nous avons travaillé dans [8] sur une base de 58 cas, chaque cas étant composé de mammographies des seins droit et gauche d’une même femme. Les images ont été acquises dans une position medio-latérale oblique en utilisant un Senographe 2000D (General Electric Medical Systems, Milwaukee, WI), avec une résolution spatiale de 0.1mm^2 par pixel (taille de l’image : 1914×2294 pixels). Ces images nous ont été fournies par le département de Radiologie de l’Université de Pennsylvanie. Dans chaque image de la base, nous avons extrait manuellement une région d’intérêt de taille 512×512 dans la région la plus dense du sein. Nous avons ensuite déterminé les valeurs \hat{h}_{0e} et \hat{h}_e^2 reportées dans la figure 1.5. Ceci nous permet de confirmer la pertinence d’un modèle fractionnaire pour la

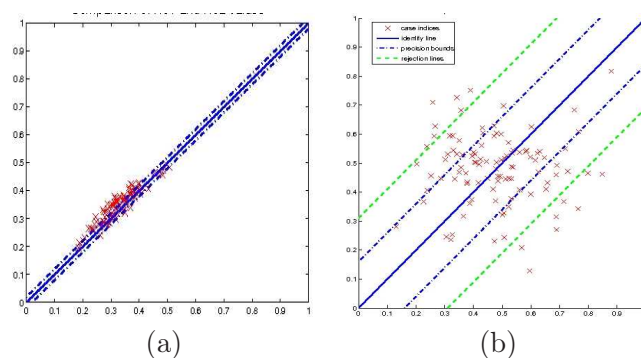


FIGURE 1.5 – comparaisons de (a) \hat{h}_{01} (abscisse) et \hat{h}_{02} , (b) \hat{h}_1^2 et \hat{h}_2^2 .

caractérisation de la densité des mammographies, puisque nous obtenons des résultats proche de ceux obtenus dans [BJJ01, HDV⁺99, HV02]. Cependant nous mettons également en évidence une certaine anisotropie des mammographies qui n’est pas prise en compte dans les études précédemment citées.

Clichés radiographiques d’os du calcaneum

Dans [P2] nous avons travaillé sur des clichés radiographiques d’os du calcaneum. Notre étude a porté sur 211 cas de femmes ménopausées dont 165 sont considérées comme des cas témoins et 46 ont eu des fractures osteoporotiques. Les images, fournies par l’équipe INSERM U658 (Orleans, France), sont des radiographies du calcaneus (BMATM, D3A Medical Systems, Orleans, France) avec une résolution de $50 \mu\text{m}$ par pixel. Dans chaque image nous avons considéré la même région d’intérêt de taille 400×400 pixels, en utilisant trois repères anatomiques fixés par le protocole expérimental. Dans cette étude nous avons pré-traité les images en appliquant un filtre passe-haut. Nous avons alors

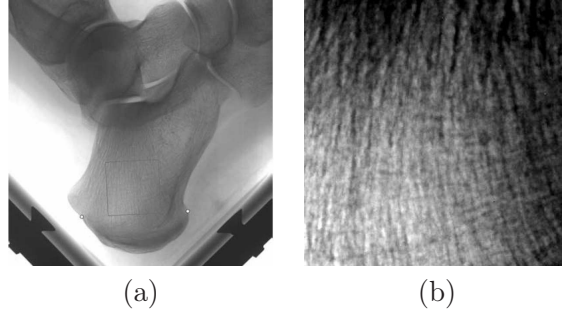


FIGURE 1.6 – Régions extraites de l’os du calcaneum (a) repères anatomiques et (b) image extraite de la radiographie.

estimé les valeurs de \hat{h}_{01} et \hat{h}_{02} reportées dans la figure 1.7. La valeur moyenne estimée $\hat{h}_0 = \frac{\hat{h}_{01} + \hat{h}_{02}}{2}$ se situe dans l’intervalle $[0.484, 0.783]$, avec une moyenne de 0.659 et un écart-type de 0.050. Nous avons trouvé $\hat{h}_0 = 0.636 \pm 0.053$ sur les 46 cas ostéoporotiques contre $\hat{h}_0 = 0.664 \pm 0.049$ sur les 165 cas témoins. Ces résultats sont proches de [BPL⁺01], dans lequel les auteurs trouvaient un indice fractal moyen $H_{mean} = 0.679 \pm 0.053$ sur 107 cas de fractures contre $H_{mean} = 0.696 \pm 0.030$ sur 197 cas témoins par une analyse fractale orientée moyennée sur 36 directions en utilisant l’estimateur du maximum de vraisemblance [LOKS86]. Contrairement à ce qui se passe pour les mammographies

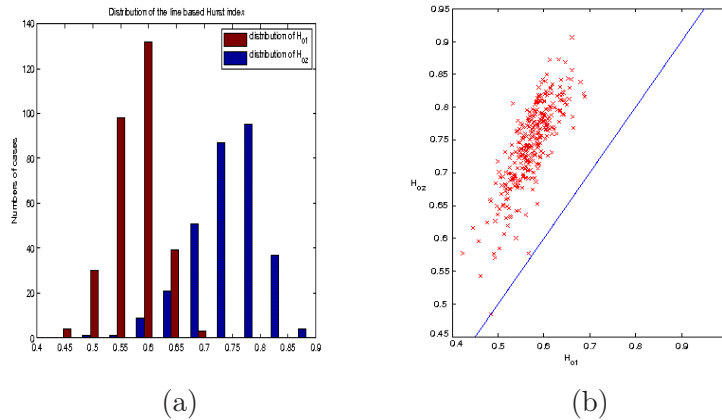


FIGURE 1.7 – comparaisons de \hat{h}_{01} ((a) en rouge (b) en abscisse) et \hat{h}_{02} .

les valeurs \hat{h}_{01} et \hat{h}_{02} sont significativement différentes et révèlent ainsi directement l’anisotropie des clichés radiographiques d’os trabéculaires. Cela nous incite également à considérer que le modèle du champ brownien fractionnaire anisotrope n’est pas adapté pour ce type d’images.

Chapitre 2

Champs stables à autosimilarité matricielle

Lors de mon post-doc à l'Université du Nevada (Reno, USA) j'ai travaillé avec Peter Scheffler sur un nouveau modèle de champ généralisant les champs stables ou gaussiens fractionnaires. L'objectif de ce travail était de construire des champs aléatoires anisotropes pour la modélisation de coupes de roches qui présentent des phénomènes de stries. Nous souhaitons en particulier mettre en évidence



FIGURE 2.1 – Exemples de coupes rocheuses

une direction privilégiée pour l'écoulement des eaux [BMBS06]. Dans ce but, et afin de caractériser l'anisotropie du champ, la propriété d'autosimilarité usuelle est remplacée par une autosimilarité matricielle caractérisée par une matrice de taille d (dimension de l'espace) donnée. Celle-ci permet de considérer d directions privilégiées (les vecteurs propres de la matrice) non nécessairement orthogonales, le long desquelles le champ satisfait une autosimilarité dont l'ordre peut varier (en fonction des valeurs propres de la matrice). Cette idée avait déjà été considérée dans les années 80 par les physiciens Schertzer et Lovejoy [LS85] sous le nom d'invariance d'échelle généralisée afin de tenir compte de l'anisotropie des phénomènes atmosphériques à grande ou petite échelle. De plus, une telle anisotropie est observée dans de nombreuses applications notamment dans l'étude des fractures de matériaux [PBA⁺06]. Selon la nature des phénomènes étudiés, la modélisation par des champs aléatoires gaussiens n'est pas toujours pertinente. C'est en particulier le cas lorsque les phénomènes présentent des queues de distributions "épaisses" (heavy tails phenomena) [RBMS08]. On peut alors remplacer les modèles gaussiens par des modèles de type α -stables, $\alpha \in (0, 2)$ à variance infinie [ST94].

2.1 Champs stables

2.1.1 Champs symétrique α -stables

Les lois gaussiennes font partie de la classe lois stables. Celles-ci vérifient une propriété de stabilité liée au fait que ces lois sont préservées par convolution et possèdent un domaine d'attraction. Elles font également partie de la classe des lois infiniment divisibles. A la différence des lois gaussiennes (2-stables), les lois α -stables, $\alpha \in (0, 2)$, ont des variances infinies, leurs queues de distribution étant de l'ordre de $|x|^{-\alpha}$ lorsque $|x|$ tend vers l'infini. Ainsi, elles apparaissent dans le théorème central limite lorsque l'hypothèse de variance finie est remplacé par une hypothèse de queue de distribution de l'ordre de $|x|^{-\alpha}$. Je me suis plus particulièrement intéressée aux lois symétriques α -stables ($S\alpha S$), caractérisées par un seul paramètre d'échelle $\sigma > 0$. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X \sim S\alpha S(\sigma)$ est donnée par $\mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{-\sigma^\alpha |u|^\alpha}$, $u \in \mathbb{R}$, ce qui permet lorsque $\alpha = 2$ de retrouver une loi gaussienne centrée de variance $2\sigma^2$.

Un champ aléatoire à valeurs réelles $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ est dit symétrique α -stable si toute combinaison linéaire $\sum_{k=1}^n a_k X(t_k)$ suit une loi $S\alpha S$. Lorsque $\alpha = 2$, on retrouve la caractérisation d'un champ gaussien centré. On peut également généraliser les représentations gaussiennes sous forme d'intégrales stochastiques au cadre $S\alpha S$.

2.1.2 Représentation harmonisable stable

Pour $\alpha \in (0, 2]$, une mesure aléatoire complexe isotrope stable ($S\alpha S$ si $\alpha \in (0, 2)$ et gaussienne si $\alpha = 2$) sur \mathbb{R}^d de mesure de contrôle la mesure de Lebesgue est un processus stochastique indexé par les boréliens de mesure de Lebesgue finie $W_\alpha = \{W_\alpha(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ avec } |A| < +\infty\}$ tel que

- $W_\alpha(A)$ est une variable aléatoire complexe vérifiant $\mathbb{E}(\exp(i\Re(\bar{z}W_\alpha(A)))) = \exp(-|z|^\alpha s_\alpha^\alpha |A|)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $s_\alpha^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(x)|^\alpha dx$.
- Si A_1, \dots, A_n sont des boréliens disjoints de mesure finie, les variables aléatoires $W_\alpha(A_1), \dots, W_\alpha(A_n)$ sont indépendantes.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de boréliens disjoints telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |A_n| < +\infty$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} W_\alpha(A_n)$

converge presque sûrement vers $W_\alpha\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

D'après le chapitre 6 de [ST94], on peut définir l'intégrale stochastique $\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) W_\alpha(d\xi)$ dès que $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ boréliennes}; \int_{\mathbb{R}^d} |f(\xi)|^\alpha d\xi < +\infty\}$. Alors,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(i\Re\left(\bar{z}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) W_\alpha(d\xi)\right)\right)\right)\right) = \exp(-|z|^\alpha s_\alpha^\alpha \|f\|_\alpha^\alpha),$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $\|f\|_\alpha^\alpha := \int_{\mathbb{R}^d} |f(\xi)|^\alpha d\xi$. En particulier, $\Re \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) W_\alpha(d\xi)$ et $\Im \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) W_\alpha(d\xi)$ sont de même loi $S\alpha S$ de paramètre d'échelle $s_\alpha \|f\|_\alpha$. Elles sont également indépendantes, dans le cas particulier des lois gaussiennes, pour $\alpha = 2$. En choisissant pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ une fonction positive et paire $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^\alpha) d\xi)$ on peut définir un champ aléatoire stable X_α sur \mathbb{R}^d par

$$X_\alpha = \left\{ \Re \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{it \cdot \xi} - 1\right) f_t(\xi)^{1/\alpha} W_\alpha(d\xi); t \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (2.1)$$

On note alors $s_\alpha \|X_\alpha(t)\|_\alpha$ le paramètre d'échelle de $X_\alpha(t)$. Il est facile de voir que ce champ est à accroissements stationnaires lorsque la fonction $f_t = f$ ne dépend pas de t . En choisissant de plus $f(\xi) = |\xi|^{-\alpha H - d}$ pour $H \in (0, 1)$, le champ X_α est autosimilaire d'ordre H et appelé champ stable fractionnaire harmonisable. Pour chaque direction $\theta \in S^{d-1}$, le processus ligne $L_\theta X_\alpha = \{X_\alpha(t\theta); t \in \mathbb{R}\}$ est alors autosimilaire d'ordre H . La notion d'autosimilarité matricielle va nous permettre de construire des champs pour lesquels il existe d directions d'autosimilarités distinctes.

2.2 Champs à autosimilarité matricielle

Dans [3], nous considérons une généralisation anisotrope de la notion d'autosimilarité appelée autosimilarité matricielle. Plus précisément, si $E \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice réelle, un champ X sur \mathbb{R}^d , à valeurs réelles, est dit à autosimilarité matricielle d'ordre E s'il satisfait

$$\left\{ X(c^E t); t \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{\text{loi}}{=} c \left\{ X(t); t \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (2.2)$$

pour tout $c > 0$, avec c^E la matrice donnée par $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\log c)^n}{n!} E^n$. Cette notion généralise bien celle d'autosimilarité d'ordre H définie par (1.4) et vérifiée lorsque $E = I_d/H$. Selon la nature de la matrice E , l'autosimilarité matricielle permet de faire intervenir des autosimilarités différentes selon les droites engendrées par les vecteurs propres de la matrice. En particulier, lorsque $E = \text{diag}(1/H_1, \dots, 1/H_d)$ pour $H_j > 0$, les processus lignes $L_{e_j} X = \{X(te_j); t \in \mathbb{R}\}$, obtenus pour $(e_j)_{1 \leq j \leq d}$ la base canonique de \mathbb{R}^d , sont autosimilaires d'ordre H_j . Une façon simple de construire un champ stable vérifiant ce type d'autosimilarité matricielle est de considérer un drap stable fractionnaire harmonisable [Xia10] défini pour $H_j < d$ par

$$X = \left\{ \Re \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{(e^{i(t \cdot e_j)(\xi \cdot e_j)} - 1)}{|\xi \cdot e_j|^{H_j/d+1/\alpha}} W_\alpha(d\xi); t \in \mathbb{R}^d \right\},$$

généralisant ainsi la représentation harmonisable du drap brownien fractionnaire donnée dans [Her06]. Cependant, dans ce cas, les processus lignes $L_{e_j} X$ sont identiquement nuls ce qui fait jouer un rôle important aux axes et peut être un problème en modélisation. Cette propriété est en particulier liée au fait que les draps ne sont pas à accroissements stationnaires. Nous avons donc cherché à construire des champs stables à autosimilarité matricielle et à accroissements stationnaires.

2.2.1 Représentation harmonisable

Lorsque le champ X_α est donné par (2.1) avec $f = f_t$ ne dépendant pas de t , le champ est à accroissements stationnaires. La propriété d'autosimilarité matricielle est vérifiée dès que $f(c^{E^t} \xi) = c^{-\alpha - \text{trace}(E)} f(\xi)$, p.p. $\xi \in \mathbb{R}^d$, pour tout $c > 0$, où E^t désigne la transposée de E . Cette condition est vérifiée lorsque on choisit

$$f(\xi) = \psi(\xi)^{-\alpha - \text{trace}(E)} \quad (2.3)$$

avec ψ une fonction E^t homogène [MS01], ce qui signifie que ψ est une fonction continue positive paire et non nulle en dehors de 0 telle que $\psi(c^{E^t} \xi) = c\psi(\xi)$, pour tout $c > 0$. Lorsque E est une matrice dont les valeurs propres ont une partie réelle strictement supérieure à 1 (on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})^{>1}$ leur ensemble), une telle fonction est bien dans $L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^\alpha) d\xi)$ ce qui nous permet de construire des champs harmonisables stables, à accroissements stationnaires qui satisfont cette propriété d'autosimilarité matricielle. Ainsi, lorsque $E = \text{diag}(1/H_1, \dots, 1/H_d)$ pour $H_j \in (0, 1)$, on peut par exemple choisir

$\psi(\xi) = \sum_{j=1}^d |\xi \cdot e_j|^{H_j}$. Le champ stable harmonisable X_α associé vérifie alors une autosimilarité d'ordre

H_j dans chaque direction e_j . Les directions d'autosimilarité peuvent varier en regardant pour P une matrice inversible, le champ $X_\alpha(P \cdot)$ qui sera lui à autosimilarité matricielle d'ordre $P^{-1}EP$.

Nous construisons également des fonctions E^t homogènes pour des matrices non diagonalisables. Le point clé pour obtenir cette construction et pour étudier ce type de champ est la généralisation des coordonnées polaires en coordonnées polaires adaptées à la matrice [MS01]. D'autres exemples sont également considérés dans [CV11].

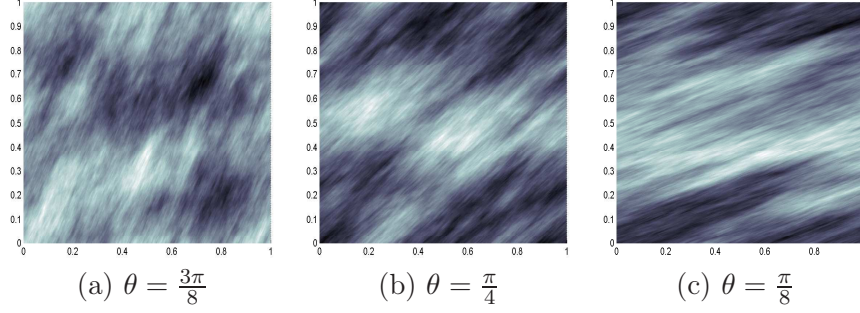


FIGURE 2.2 – Simulations approchées de champs gaussiens ($\alpha = 2$) à autosimilarité matricielle d’ordre $P^{-1}\text{diag}(1/H_1, 1/H_2)P$ avec $Pe_1 = e_1$ et $Pe_2 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$, $H_1 = 0.5$ et $H_2 = 0.7$.

2.2.2 Coordonnées polaires adaptées à une matrice

Dès qu’une matrice E a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement positives (on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})^{>0}$ leur ensemble) on peut considérer une nouvelle norme sur \mathbb{R}^d définie par $\|x\|_E = \int_0^1 |t^E x| \frac{dt}{t}$, avec $|\cdot|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Si $E = I_d/H$ on obtient en fait $\|x\|_E = H|x|$. Les coordonnées polaires correspondant au cas $H = 1$, on définit par analogie la sphère unité $S_E = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_E = 1\}$ (compact de \mathbb{R}^d) et on construit un homéomorphisme $\Psi_E : (r, \theta) \in (0, +\infty) \times S_E \mapsto r^E \theta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Si $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, ses coordonnées polaires par rapport à la matrice E sont alors données par $\Psi_E^{-1}(x)$ que l’on note $(\tau_E(x), \ell_E(x))$ de sorte que $x = \tau_E(x)^E \ell_E(x)$. On dispose alors de l’analogie du changement de coordonnées polaires. En effet, il existe une unique mesure de Radon finie sur S_E notée σ_E telle pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} \int_{S_E} f(r^E \theta) \sigma_E(d\theta) r^{\text{trace}(E)-1} dr.$$

De plus, toute fonction φ E -homogène s’écrit sous la forme $\varphi(x) = \tau_E(x)\varphi(\ell_E(x))$. Le paramètre d’échelle d’un champ stable à autosimilarité matricielle d’ordre $E \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^{>0}$ s’écrit alors $s_\alpha \|X(t)\|_\alpha = s_\alpha \tau_E(t) \|X(\ell_E(t))\|_\alpha$, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. Si de plus X est stochastiquement continu et à accroissements stationnaires on obtient que pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$,

$$c_1 \tau_E(t-s) \leq \|X(t) - X(s)\|_\alpha \leq c_2 \tau_E(t-s),$$

en utilisant la continuité de $\theta \mapsto \|X(\theta)\|_\alpha$ sur le compact S_E . On voit alors que dans le cas gaussien $\alpha = 2$, la régularité höldérienne des trajectoires est donnée par celle de la partie radiale τ_E . Dans le cas autosimilaire, lorsque $E = I_d/H$, celle-ci est donnée par H puisque $\tau_E(t) = H^H |t|^H$. Dans le cas général, la régularité höldérienne de τ_E dépend en fait de la décomposition de Jordan de la matrice E . Pour $1 \leq j \leq d$ on note W_j le sous-espace de \mathbb{R}^d invariant par E associé à la valeur propre de partie réelle $1/H_j$ ($H_j \in (0, 1)$) de dimension l_j si $1/H_j$ est une valeur propre ou $2l_j$ sinon (les W_j ne sont pas nécessairement distincts). Nous montrons dans [6] que, pour tout $r \in (0, 1)$, il existe $c_1, c_2 > 0$ telles que si $t \in W_j \setminus \{0\}$ avec $|t| \leq r$

$$c_1 |t|^{H_j} |\log |t||^{-(l_j-1)H_j} \leq \tau_E(t) \leq c_2 |t|^{H_j} |\log |t||^{(l_j-1)H_j}. \quad (2.4)$$

En particulier ceci implique que dans le cas gaussien, l’exposant de Hölder quadratique critique du processus ligne $L_{t_0, \theta} X$ est donné par H_j dès que l’on choisit une direction $\theta \in W_j$. Cette expression nous donne également un contrôle uniforme sur \mathbb{R}^d qui va prescrire la régularité globale. En effet, en notant $\underline{H} = \min_{1 \leq j \leq d} H_j$ et $\overline{H} = \max_{1 \leq j \leq d} H_j$ on obtient pour $l = \max_{1 \leq j \leq d} l_j$ que si $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec $|t| \leq r$

$$c_1 |t|^{\overline{H}} |\log |t||^{-(l-1)\overline{H}} \leq \tau_E(t) \leq c_2 |t|^{\underline{H}} |\log |t||^{(l-1)\underline{H}}. \quad (2.5)$$

Ces relations sont également utilisées pour déterminer la régularité höldérienne des champs stables à autosimilarité matricielle (voir section 2.3).

2.2.3 Représentation moyenne mobile

Une autre façon de construire des champs stables à autosimilarité matricielle est de généraliser la représentation moyenne mobile du champ brownien fractionnaire B_H . En effet en utilisant la théorie des distributions pour les fonctions homogènes [GV67], on voit que la transformée de Fourier de $|\xi|^{-H-d/2}$ est donnée par $c_H|x|^{H-d/2}$. Ainsi, lorsque B_H est défini par sa représentation harmonisable (1.1), sa variance vérifie $\text{Var}(B_H(t)) = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{it \cdot \xi} - 1|^2 |\xi|^{-2H-d} d\xi = \frac{c_H^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} ||t - x|^{H-d/2} - |-x|^{H-d/2}|^2 dx$, par le théorème de Plancherel. Par stationnarité des accroissements cela suffit à caractériser la loi de B_H et on obtient alors sa représentation moyenne mobile

$$B_H \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{c_H}{(2\pi)^{d/2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |t - x|^{H-\frac{d}{2}} - |-x|^{H-\frac{d}{2}} M_2(dx); t \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (2.6)$$

en choisissant M_2 une mesure de Wiener réelle. Dans [3] nous généralisons cette approche et construisons des champs stables à accroissements stationnaires à autosimilarité matricielle d'ordre $E \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^{>1}$. Pour cela, nous choisissons M_α une mesure $S\alpha S$ réelle de mesure de contrôle la mesure de Lebesgue [ST94] et définissons

$$Y_\alpha = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(t - x)^{1-\text{trace}(E)/\alpha} - \varphi(-x)^{1-\text{trace}(E)/\alpha} \right) M_\alpha(dx), t \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (2.7)$$

avec φ une fonction E -homogène continue positive non nulle en dehors de 0 qui satisfait de plus la condition de régularité suivante : il existe $s > 1$ tel que pour tout $0 < A < B$ il existe $C > 0$ tel que, pour $A \leq |y| \leq B$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\tau_E(x) \leq 1 \Rightarrow |\varphi(x + y) - \varphi(y)| \leq C\tau_E(x)^s.$$

Dans le cas autosimilaire $E = I_d/H$, un tel champ peut être construit en choisissant $\varphi(t) = |t|^H$. Il faut noter que même si dans le cas gaussien la représentation harmonisable obtenue pour $\psi(t) = |t|^H$ donne, à une constante près, le même champ brownien fractionnaire B_H il n'en est rien pour les champs α -stables $\alpha \in (0, 2)$. En particulier nous montrons dans [6] que si $d \geq 2$ toute modification du champ α -stable Y_α est p.s. non bornée sur n'importe quelle boule ouverte de \mathbb{R}^d . En revanche les propriétés trajectorielles du champ α -stable harmonisable X_α défini par (2.1) avec (2.3) sont les mêmes que celles du champs gaussien X_2 .

2.3 Régularité höldérienne des champs α -stables harmonisables

La régularité höldérienne trajectorielle des champs gaussiens se déduit de la régularité höldérienne en moyenne quadratique, c'est à dire du comportement du paramètre d'échelle $\|X(t) - X(s)\|_2$. Ce n'est en général pas le cas des champs α -stables. En revanche on peut s'y ramener lorsque on considère les champs α -stables harmonisables comme nous l'étudions dans [6]. Nous nous sommes inspirées des résultats de Kono et Maejima [KM91], qui consistent à utiliser la représentation de LePage [LeP89] des processus α -stables harmonisables pour les étudier sous forme de processus conditionnellement gaussiens.

2.3.1 Séries de LePage

On suppose ici que $\alpha \in (0, 2)$ et on considère le champ aléatoire X_α donné par (2.1) avec $f_t \in L^1(\mathbb{R}^d, \min(1, |\xi|^\alpha) d\xi)$ positive et paire pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. La représentation de LePage permet d'écrire X_α sous la forme d'une série de variables aléatoires. Pour cela nous considérons $(T_n)_{n \geq 1}$, $(g_n)_{n \geq 1}$ et $(\xi_n)_{n \geq 1}$ des suites indépendantes de variables aléatoires telles que

- T_n est le n -ième temps d'arrivée d'un processus de Poisson sur \mathbb{R}^+ d'intensité 1.

- $(g_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires complexes isotropes, ie $g_n \stackrel{(d)}{=} e^{i\theta} g_n$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de \mathbb{R}^d de loi μ équivalente à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , ie il existe $m > 0$ p.p. telle que $\mu(d\xi) = m(\xi)d\xi$.

Lorsque on suppose $\mathbb{E}(|g_n|^\alpha) < +\infty$ et $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, la série $\sum T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} h(\xi_n) g_n$ converge presque sûrement et la variable aléatoire complexe ainsi obtenue admet une loi $S\alpha S$ de paramètre d'échelle $c_\alpha s_\alpha \|h\|_\alpha$ avec $c_\alpha^\alpha = \mathbb{E}(|\Re(g_1)|^\alpha) \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \right) s_\alpha^{-\alpha}$. On peut alors considérer le champ aléatoire

$$Z_\alpha = \left\{ c_\alpha^{-1} \Re \left(\sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} (e^{it \cdot \xi_n} - 1) f_t(\xi_n)^{1/\alpha} g_n \right) ; t \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (2.8)$$

qui vérifie $Z_\alpha \stackrel{loi}{=} X_\alpha$.

2.3.2 Champs conditionnellement gaussiens

En choisissant g_1 une variable aléatoire gaussienne complexe isotrope, conditionnellement à $(T_n, \xi_n)_{n \geq 1}$, le champ Z_α est gaussien centré. Alors, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, la variable $Z_\alpha(u) - Z_\alpha(v)$ est gaussienne centrée de variance

$$v_\alpha^2((u, v) | (T_n, \xi_n)_n) = \frac{c_\alpha^{-2}}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} \left| (e^{iu \cdot \xi_n} - 1) f_u(\xi_n)^{1/\alpha} - (e^{iv \cdot \xi_n} - 1) f_v(\xi_n)^{1/\alpha} \right|^2. \quad (2.9)$$

Lorsque X_α est à autosimilarité matricielle d'ordre $E \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^{>1}$ défini par (2.1) avec (2.3), en choisissant pour $\eta > 0$

$$m(\xi) = \frac{c_\eta}{\tau_{E^t}(\xi) \text{trace}(E) |\log \tau_{E^t}(\xi)|^{1+\eta}},$$

avec c_η telle que $\int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) d\xi = 1$, on montre que p.s. il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, si $|u - v| \leq \gamma$,

$$v_\alpha((u, v) | (T_n, \xi_n)_n) \leq \tau_E(u - v) |\log \tau_E(u - v)|^{(1+\eta)/\alpha}.$$

On remarque par ailleurs que dans le cas gaussien $v_2(u, v) = \|X_2(u) - X_2(v)\|_2$ satisfait également cette majoration en remplaçant $(1 + \eta)/\alpha$ par η . Ceci nous permet de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit K un pavé de \mathbb{R}^d . Il existe une modification continue \tilde{X}_α de X_α qui vérifie pour tout $\eta > 0$*

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \sup_{\substack{u, v \in K \\ 0 < |u - v| \leq \gamma}} \frac{|\tilde{X}_\alpha(u) - \tilde{X}_\alpha(v)|}{\tau_E(u - v) |\log \tau_E(u - v)|^{\beta(\alpha) + 1/2 + \eta}} = 0 \text{ p.s.} \quad (2.10)$$

avec $\beta(\alpha) = 1/\alpha$ si $\alpha \in (0, 2)$ et $\beta(2) = 0$.

En particulier, si $\underline{H} = \min_{1 \leq j \leq d} H_j$ avec $1/H_j$ la partie réelle d'une valeur propre de la matrice E , le champ \tilde{X}_α admet \underline{H} comme exposant de Hölder critique. On montre également que

$$\dim_{\mathcal{B}} \tilde{X}_\alpha = \dim_{\mathcal{H}} \tilde{X}_\alpha = d + 1 - \underline{H} \text{ p.s.}$$

avec $\dim_{\mathcal{H}} \tilde{X}_\alpha$ et $\dim_{\mathcal{B}} \tilde{X}_\alpha$ les dimensions de Hausdorff et de boîtes du graphe de \tilde{X}_α sur le pavé K . Enfin, pour toute direction θ dans un espace propre associé à $1/H_j$, le processus ligne $L_{t_0, \theta} \tilde{X}_\alpha$ admet H_j comme exposant de Hölder critique pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^d$.

2.3.3 Généralisations

Dans [14], nous avons généralisé ces résultats dans un cadre non stationnaire en définissant des champs qui satisfont localement la propriété d'autosimilarité matricielle. Pour cela on choisit une application $t \in \mathbb{R}^d \mapsto E(t) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^{>1}$ et on considère des champs stables X_α définis par (2.1) avec

$$f_t(\xi) = \psi_t(\xi)^{-\alpha - \text{trace}(E(t))},$$

où ψ_t est une fonction $E(t)^t$ homogène continue positive et non nulle en dehors de 0. On obtient en particulier des champs stables harmonisables multifractionnaires, appelés champs browniens multifractionnaires pour $\alpha = 2$ [BJR97], en choisissant une fonction $h : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, 1)$, $E(t) = I_d/h(t)$ et $\psi_t(\xi) = |\xi|^{h(t)}$. Pour étudier la régularité on s'est inspiré des travaux d'Antoine Ayache sur le mouvement brownien multifractionnaire généralisé. Il y introduit un champ auxiliaire permettant de ramener l'étude locale du multifractionnaire à celle du fractionnaire [Aya02]. Nous définissons ainsi un champ aléatoire stable Z_α sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, contenant la diagonale $\{(t, t, t); t \in \mathbb{R}^d\}$, par

$$Z_\alpha = \left\{ \Re \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{it \cdot \xi} - 1 \right) \psi_u(\xi)^{-q(v)/\alpha} W_\alpha(d\xi), (t, u, v) \in U \right\}, \quad (2.11)$$

avec $q(v) = \alpha + \text{trace}(E(v))$ de sorte que $X_\alpha = \{Z_\alpha(t, t, t); t \in \mathbb{R}^d\}$. En remarquant que $\{Z_\alpha(t, u, u); t \in \mathbb{R}^d\}$ est un champ stable harmonisable d'autosimilarité matricielle $E(u)$ on s'attend à ce que la régularité au voisinage du point u soit donnée par celui-ci dès que Z est plus régulier dans les 2 dernières variables. Nous avons donc fait l'hypothèse que les fonctions $u \mapsto E(u)$ et $(u, \xi) \mapsto \psi_u(\xi)$ étaient localement lipschitziennes lorsque u est dans un pavé K de \mathbb{R}^d et $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. La première hypothèse permet d'assurer la régularité lipschitzienne des valeurs propres associées à la matrice $E(u)$ mais pas celle des vecteurs propres. Nous avons donc dû supposer également que les matrices commutaient sur K . On montre alors que le champ Z est bien plus régulier dans les deux dernières variables que dans la première ce qui nous permet de construire une modification \tilde{X}_α de X_α sur K qui satisfait pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \sup_{\substack{|u| \leq \gamma, |v| \leq \gamma \\ t+u, t+v \in K}} \frac{|\tilde{X}(t+u) - \tilde{X}(t+v)|}{\tau_{E(t)}(u-v)^{1-\varepsilon}} = 0 \text{ p.s.}$$

Pour démontrer cela, on utilise à nouveau une représentation en série de Lepage que l'on localise au voisinage du point t en choisissant $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de \mathbb{R}^d de densité

$$m_t(\xi) = \frac{c_{\eta, t}}{\tau_{E(t)^t}(\xi) |\text{trace}(E(t))| |\log \tau_{E(t)^t}(\xi)|^{1+\eta}}.$$

Cette localisation nous fait perdre le terme logarithmique qui est remplacé par une puissance en $-\varepsilon$. Cependant, ce résultat est suffisant pour déterminer les exposants de Hölder locaux et ponctuels du champ \tilde{X} . En effet on montre que p.s. l'exposant de Hölder local de \tilde{X} , défini par

$$H_{loc}(t) = \sup \left\{ H > 0; \lim_{u, v \rightarrow 0} \frac{\tilde{X}(t+u) - \tilde{X}(t+v)}{|u-v|^H} = 0 \right\},$$

et l'exposant de Hölder ponctuel de \tilde{X} , défini par (1.7), sont égaux à $\underline{H}(t) = \min_{1 \leq j \leq d} H_j(t)$ avec $1/H_j(t)$ la partie réelle d'une valeur propre de la matrice $E(t)$. De plus, pour toute direction θ dans un espace propre associé à $1/H_j(t)$, le processus ligne $L_{t, \theta} \tilde{X}_\alpha$ admet $H_j(t)$ comme exposant de Hölder ponctuel au point 0. Remarquons que ces résultats généralisent dans un cadre anisotrope et α -stable les propriétés bien connues du mouvement brownien multifractionnaire ($d = 1$) de fonction multifractionnaire $t \in \mathbb{R} \mapsto H(t) \in (0, 1)$ lorsque la régularité höldérienne au point t de cette fonction est plus

grande que $H(t)$. Ce processus peut en fait être vu localement au voisinage de t comme un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H(t)$ au moyen de la propriété lass (1.5) évoquée lors du premier chapitre. En effet, en tout point $t \in \mathbb{R}$, il est lass d'ordre $H(t)$ et de champ tangent le mouvement brownien fractionnaire d'ordre $H(t)$. La généralisation de cette propriété en dimension $d \geq 2$ n'est pas adaptée à l'étude de champs à autosimilarité matricielle puisqu'elle ne capture pas l'anisotropie de la matrice de la matrice E . Nous avons donc introduit la propriété d'autosimilarité matricielle asymptotique locale (laos) qui est vérifiée par le champ X_α au point $t \in \mathbb{R}^d$ puisque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{X_\alpha(t + \varepsilon^{E(t)}u) - X_\alpha(t)}{\varepsilon}; u \in \mathbb{R}^d \right\} \stackrel{fdd}{=} \left\{ Z_t(u); u \in \mathbb{R}^d \right\}, \quad (2.12)$$

où Z_t est un champ non dégénéré. Ici, le champ tangent Z_t est en fait un champ stable harmonisable d'autosimilarité matricielle $E(t)$ obtenu pour la fonction $\psi_t(\xi)^{-\alpha - \text{trace}(E(t))}$. Remarquons que la propriété lass d'ordre $H(t)$ correspond alors à la propriété laos lorsque $E(t) = I_d/H(t)$.

2.4 Ensembles de niveaux et excursions

Dans [Xia09], Yimin Xiao s'est en particulier intéressé à la dimension de Hausdorff des ensembles de niveaux de champs gaussiens anisotropes. Ses résultats permettent de montrer que la dimension de Hausdorff des lignes de niveaux d'un champ aléatoire gaussien harmonisable X_2 à autosimilarité matricielle d'ordre E , défini par (2.1) avec $\alpha = 2$ et $f_t = f$ donnée par (2.3), est déterminée par $d - \underline{H}$ avec probabilité positive sur un pavé K^* de \mathbb{R}^d ne contenant pas l'origine 0. Cette restriction provient du fait que $X_2(0) = 0$ p.s. et que nous avons besoin de minorer uniformément la variance de $X_2(t)$ pour $t \in K^*$ par une constante strictement positive. On retrouve l'anisotropie du champ en considérant les ensembles de niveaux de $(X_2^{(1)}, \dots, X_2^{(n)})$ un n échantillon de X_2 . En effet, en notant $1/H_j$ les parties réelles des valeurs propres de la matrice E et en supposant $0 < H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_d < 1$ (de sorte que $\underline{H} = \min_{1 \leq j \leq d} H_j = H_1$), si $n < \text{trace}(E) = \sum_{j=1}^d \frac{1}{H_j}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, avec probabilité positive,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}} \{t \in K^*; (X_2^{(1)}(t), \dots, X_2^{(n)}(t)) = x\} &= \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ d - H_k n + \sum_{j=1}^k \frac{(H_k - H_j)}{H_j} \right\} \\ &= d - H_{k_0} n + \sum_{j=1}^{k_0} \frac{(H_{k_0} - H_j)}{H_j}, \end{aligned}$$

où $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ est tel que $\sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{1}{H_j} \leq n < \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{H_j}$ en utilisant la convention $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{H_j} = 0$. Ce résultat généralise bien le cas du champ brownien fractionnaire B_H de paramètre de Hurst H pour lequel Monrad et Pitt [MP87] ont démontré que si $n < d/H$, p.s.

$$\dim_{\mathcal{H}} \{t \in K^*; (B_H^{(1)}(t), \dots, B_H^{(n)}(t)) \in F\} = d - H(n - \dim_{\mathcal{H}} F),$$

pour tout ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^n$. Remarquons que dans le cas anisotrope, seule la majoration de la dimension de Hausdorff est p.s. Nous avons généralisé ces résultats dans [7] pour les excursions de champs gaussiens anisotropes. Nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé tel que $\dim_{\mathcal{H}} F \geq n - \text{trace}(E)$. On suppose de plus que F satisfait une condition d'uniformité sur sa dimension de Hausdorff (condition (S) de [7]) lorsque $\dim_{\mathcal{H}} F > 0$. Alors, avec probabilité positive,*

$$\dim_{\mathcal{H}} \{t \in K^*; (X_2^{(1)}(t), \dots, X_2^{(n)}(t)) \in F\} = \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ d - H_k(n - \dim_{\mathcal{H}} F) + \sum_{j=1}^k \frac{(H_k - H_j)}{H_j} \right\},$$

la majoration ayant lieu p.s.

Pour démontrer la majoration, nous considérons un recouvrement particulier de l'ensemble F adapté à la matrice E . Nous avons alors besoin d'estimer la probabilité d'atteinte d'un point x sur une boule anisotrope définie au moyen des coordonnées polaires adaptées à E par $B_E(t, r) = \{s \in \mathbb{R}^d; \tau_E(t - s) \leq r\}$. On obtient alors que pour tout $M > 0$, il existe $c, \delta > 0$ telles que pour tout $r \in (0, \delta)$, $t \in K^*$, $x \in [-M, M]$,

$$\mathbb{P} \left(\inf_{s \in B_E(t, r) \cap K^*} |X_2(s) - x| \leq r \right) \leq cr.$$

La preuve consiste à se ramener à une probabilité portant sur $X_2(t)$ en utilisant les lois conditionnelles des variables $X_2(s)$ sachant $X_2(t)$ et le théorème de Dudley. Puisque le champ X_2 est gaussien on peut en fait obtenir ce résultat dès qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$(C1a) \text{ pour tout } t \in K^*, \|X_2(t)\|_2 \geq c_1;$$

$$(C1b) \text{ pour tout } s, s' \in K^*, \|X_2(s) - X_2(s')\|_2 \leq c_2 \tau_E(s - s').$$

La minoration est obtenue en utilisant des techniques classiques de théorie du potentiel. On construit une suite de mesures aléatoires μ_σ qui converge faiblement pour $\sigma \rightarrow 0$ vers une mesure à support dans $\{t \in K^*; (X_2^{(1)}(t), \dots, X_2^{(n)}(t)) \in F\}$, en considérant pour une mesure ν à support dans F , la mesure μ_σ qui admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}^d$ par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(X_2^{(j)}(t) - x_j)^2}{2\sigma^2} \right) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\sigma^2 \xi_j^2}{2} + i\xi_j (X_2^{(j)}(t) - x_j) \right) d\xi d\nu(x).$$

La condition (C1a) permet de minorer uniformément $\mathbb{E}(\mu_\sigma(K^*))$. On majore ensuite l'espérance de la s-énergie de la mesure μ_σ défini par $I_s(\mu_\sigma) = \int_{K^*} \int_{K^*} |t - s|^{-s} d\mu_\sigma(s) d\mu_\sigma(t)$ pour appliquer le théorème de Frostman, sous les hypothèses

$$(C1c) \text{ pour tout } s, t \in K^*, \|X(s) - X(t)\|_2 \geq c_3 \tau_E(t - s);$$

$$(C2a) \text{ pour tout } s, t \in K^*, \text{Var}(X(s)|X(t)) \geq c_4 \tau_E(t - s),$$

avec $c_3, c_4 > 0$. La condition (C2a) correspond à une propriété de local non-déterminisme à deux points sur K^* .

2.5 Simulations, estimations et applications

En collaboration avec Peter Scheffler, nous nous sommes intéressés à la simulation de champs α -stable à autosimilarité matricielle. Nous avons considéré dans un premier temps le cas des processus linéaire α -stable ($d = 1$). Dans [4], nous obtenons une approximation de ces processus par une série de Fourier ce qui nous permet d'obtenir des simulations peu coûteuses via l'algorithme de transformation de Fourier rapide. Nous donnons des majorations des vitesses de convergence dans le cas où les processus admettent des modifications continues. Nous comparons également nos résultats avec ceux précédemment obtenus dans [CLL07, ST04, WMZ04], en estimant le paramètre d'autosimilarité d'après les résultats de [SPT02]. Ce travail a été généralisé dans [KSS09] pour des champs aléatoires définis par une intégrale stochastique de la forme $\{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x) M_\alpha(dx); t \in \mathbb{R}^d\}$ avec M_α une mesure $S\alpha S$ réelle de mesure de contrôle la mesure de Lebesgue et $\varphi_t(x)$ bornée en t , excluant ainsi les champs à autosimilarité matricielle donné par (2.7) dès que $d \geq 2$.

La question de l'estimation de la matrice E est cruciale. Les résultats de régularité directionnelle obtenus dans le cas gaussiens vont permettre une estimation des valeurs propres de la matrice lorsque

celle-ci est diagonalisable, en considérant les variations quadratiques du champ le long des droites dirigées par les vecteurs propres de la matrice. Un premier résultat dans ce sens a été obtenu dans [P3] où nous avons également montré la pertinence d'un tel type de modèle pour les radiographies d'os trabéculaires. Pour l'obtenir nous considérons un champ gaussien X en dimension $d = 2$ à densité spectrale (1.2) donnée par

$$f(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^{2a})^{-\beta}, \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

avec $\beta = H_1 + (1 + 1/a)/2$ et $a = H_2/H_1$ pour $0 < H_1 \leq H_2 < 1$. Ce champ est alors à autosimilarité matricielle pour la matrice $E = \text{diag}(1/H_1, 1/H_2)$. Le choix d'une telle densité spectrale nous permet d'obtenir exactement un champ brownien fractionnaire de paramètre de Hurst égal à H_1 lorsque $a = 1$. Nous avons alors déterminé le comportement asymptotique des densités spectrales $\mathcal{L}_\theta f$ des processus lignes $L_{t_0, \theta} X$ données par (1.8) pour une direction $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ de \mathbb{R}^2 . Lorsque $\theta = e_j$, $j = 1, 2$, est un vecteur de la base canonique, en utilisant la stationnarité des accroissements et l'autosimilarité matricielle on voit que $L_{t_0, e_j} X - L_{t_0, e_j} X(0)$ est un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H_j et donc de densité spectrale proportionnelle à $|\zeta|^{-2H_j-1}$. Plus précisément, les densités spectrales sont données par $\mathcal{L}_{e_1} f(\zeta) = |\zeta|^{-2H_1-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (s^{2a} + 1)^{-\beta} ds \right)$ et $\mathcal{L}_{e_2} f(\zeta) = |\zeta|^{-2H_2-1} \left(\int_{\mathbb{R}} (s^2 + 1)^{-\beta} ds \right)$. On obtient alors un estimateur p.s. de H_j en considérant l'estimateur des variations quadratiques généralisées (1.12) du processus $L_{t_0, e_j} X$ qui vérifie une normalité asymptotique dès que l'ordre du filtre est supérieur à $H_j + \frac{1}{4}$.

En revanche, lorsque $\theta \neq e_1$ et $\theta \neq e_2$ on a $\theta_1 \neq 0$ et la densité spectrale de $L_{t_0, \theta} X$ satisfait

$$\mathcal{L}_\theta f(\zeta) = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} (s^{2a} + \theta_1^{-2})^{-\beta} ds \right) / |\theta_1|}{|\zeta|^{2H_1+1}} + O_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\zeta|^{2H_1+1+(1-1/a)}} \right),$$

ce qui signifie que la condition (1.10) est vérifiée pour $H = H_1$ et $s = 1 - 1/a$. Ainsi, en considérant l'estimateur des variations quadratiques généralisées (1.12) du processus $L_{t_0, \theta} X$, on obtient un nouvel estimateur p.s. de H_1 mais qui ne vérifie une normalité asymptotique que lorsque l'anisotropie est suffisamment "grande" c'est à dire $a > 2$.

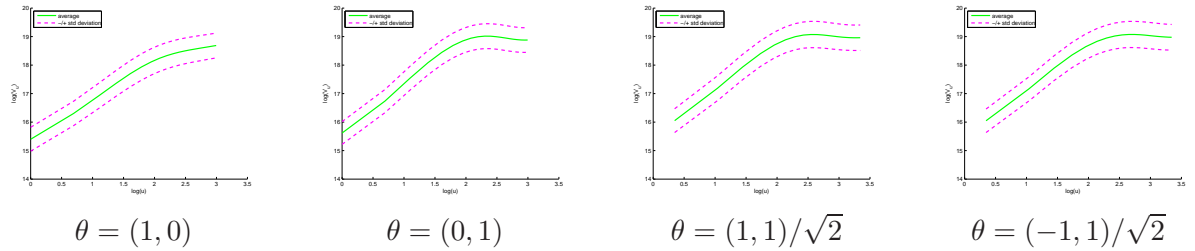


FIGURE 2.3 – Logarithme des variations quadratiques $V_{\mathbf{a}}^u$ en fonction du logarithme de l'échelle u (en pixels) dans différentes directions θ du plan pour $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$.

A la suite des premiers résultats concernant les clichés radiographiques d'os du calcaneum, obtenus dans [P2] et présentés dans la section 1.4.2, nous avons cherché à valider la pertinence d'un tel modèle pour ces clichés dans [P3]. A la différence de l'étude précédente les images n'ont pas été préalablement traitées par un filtre passe-haut. De plus, nous avons cherché à comparer les variations quadratiques du second ordre des processus extraits sur les lignes horizontales, verticales et également diagonales. La figure 2.3 présente les valeurs obtenues en fonction de l'échelle u en diagramme log-log. Nous observons deux gammes d'échelles consécutives pour lesquelles les valeurs observées semblent bien linéaires. Les petites échelles pour u variant de 1 ($50\mu\text{m}$) à 5 ($250\mu\text{m}$) pixels et les échelles intermédiaires pour u supérieur à 5 ($250\mu\text{m}$) pixels. Les petites échelles correspondent à l'épaisseur des travées dans le calcaneum et donc à la structure même de l'os. Les échelles intermédiaires correspondant à des

distances supérieures à l'épaisseur des travées sont plus représentatives des liens entre les structures de l'os. Nous avons donc choisi de travailler autour de l'échelle $u = 6$ et de comparer les variations quadratiques pour $u = 6$ et $v = 5$. On estime alors les valeurs des paramètres de Hurst en utilisant (1.18) où $(u, v) = (2, 1)$ est remplacé par $(u, v) = (6, 5)$. Nous avons alors trouver en moyenne les valeurs 0.51 ± 0.08 pour $\theta = (1, 0)$, 0.56 ± 0.06 pour $\theta = (0, 1)$, 0.51 ± 0.08 pour $\theta = (1, 1)/\sqrt{2}$, et 0.51 ± 0.09 $\theta = (-1, 1)/\sqrt{2}$, ce qui pourrait correspondre au modèle à autosimilarité matricielle proposé.

Chapitre 3

Modèles de type shot noise

La dernière partie de mon travail concerne l'étude de certains champs aléatoires de type shot noise. Les modèles de type shot noise [Dal71] sont obtenus en considérant des champs aléatoires définis par

$$X(t) = \sum_{(x_j, \kappa_j) \in \Phi} f(t - x_j, \kappa_j), \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

avec Φ un processus de Poisson marqué sur $\mathbb{R}^d \times K$, K étant l'espace des marques, et $f : \mathbb{R}^d \times K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que la série converge p.s. Ce type de modèle intervient dans de nombreux domaines d'applications. Il doit son nom à S. O. Rice qui l'a introduit en dimension $d = 1$ pour modéliser des perturbations aléatoires ("shot effects") dans des circuits électroniques [Ric44]. Depuis il a beaucoup été utilisé, notamment en physique [LT89] et en télécommunications pour modéliser par exemple le nombre de connexions internet [KT08], ou déterminer la position d'antennes émettrices ($d = 2$) [BB01]. Il est également étudié en géométrie aléatoire lorsque $d \geq 2$ et K est un ensemble de compacts aléatoires de \mathbb{R}^d . Le processus ponctuel Φ correspond alors à un modèle de type germe-grain : on lance aléatoirement des points (les germes) dans \mathbb{R}^d et des parties compactes de \mathbb{R}^d les contenant (les grains). C'est donc un modèle assez courant en analyse d'image [Ser82] et qui connaît un grand essor pour la synthèse de textures [Gal10], dû notamment à sa simplicité de simulation. Enfin, il intervient naturellement dans la modélisation des milieux granulaires ($d = 3$) : d'un point de vue microscopique la densité de matière peut alors s'interpréter comme le nombre de grains qui se recouvrent.

Je me suis principalement placée dans le cas où on pouvait considérer Φ comme un processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ muni de la tribu borélienne. Ce processus est alors déterminé par une mesure positive ν sur $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+))$ localement finie sur $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$, appelée intensité de Φ . On peut lui associer une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ définie par $N = \sum_{(x_j, \kappa_j) \in \Phi} \delta_{(x_j, \kappa_j)}$, avec δ la masse

de Dirac, appelée mesure aléatoire de Poisson d'intensité ν . Rappelons (voir par exemple le chapitre 10 de [Kal02]) que la mesure aléatoire N définit un processus stochastique indexé par les boréliens de mesure finie $N = \{N(A); A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+) \text{ avec } \nu(A) < +\infty\}$ tel que

- $N(A)$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\nu(A)$, correspondant au nombre de points du processus Φ qui sont dans A .
- Si A_1, \dots, A_n sont des boréliens disjoints de mesure finie, les variables aléatoires $N(A_1), \dots, N(A_n)$ sont indépendantes.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de boréliens disjoints telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) < +\infty$ alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} N(A_n)$

converge presque sûrement vers $N\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

Ainsi, lorsque $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \min(|f(x, \kappa)|, 1) \nu(dx, d\kappa) < +\infty,$$

la série $\sum_{(x_j, \kappa_j) \in \Phi} f(x_j, \kappa_j)$ converge p.s. et on peut l'écrire sous la forme d'une intégrale stochastique par rapport à la mesure de Poisson N :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} f(x, \kappa) N(dx, d\kappa). \quad (3.2)$$

La fonction caractéristique de cette variable est alors donnée par

$$\mathbb{E} \left(e^{iu \int f dN} \right) = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left(e^{iuf(x, \kappa)} - 1 \right) \nu(dx, d\kappa) \right), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Terminons enfin par rappeler que $\int f dN \in L^1(\Omega)$ si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu)$ avec $\mathbb{E} \left(\int f dN \right) = \int f d\nu$ et que $\int f dN \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu) \cap L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu)$ avec $\text{Var} \left(\int f dN \right) = \int f^2 d\nu$. Ainsi, en choisissant $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} |f(t-x, \kappa)| \nu(dx, d\kappa) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} f(t-x, \kappa)^2 \nu(dx, d\kappa) < +\infty,$$

on définit un champ aléatoire du second ordre sur \mathbb{R}^d par (3.1) qui vérifie $X(t) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} f(t-x, \kappa) N(dx, d\kappa)$ et

$$\text{Cov} (X(t), X(s)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} f(t-x, \kappa) f(s-x, \kappa) \nu(dx, d\kappa), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^d.$$

3.1 Modèles de microboules et généralisations

Dans [2] nous nous sommes intéressées à ce type de modèle aléatoire pour la modélisation de l'os, dans le cadre du projet ANR MIPOMODIM sur le diagnostic précoce de l'ostéoporose. Cette étude présente un double intérêt. D'une part elle permet, en sortant du cadre gaussien, d'exhiber des propriétés d'autosimilarité asymptotique locale différentes en loi et au second ordre et donc de poser la question du choix du paramètre d'autosimilarité. D'autre part elle donne un nouvel exemple pour lequel on peut définir des transformées X-ray à fenêtre dont les paramètres d'autosimilarité asymptotique locale sont obtenus en ajoutant 1/2.

3.1.1 Modèles de microboules

Nous nous sommes inspirées du modèle de Micropulses introduit par Ciosek-Georges et Mandelbrot [CGM95]. Nous avons considéré un modèle d'agrégation de petites boules $B(x, r)$ dont les centres et rayons sont donnés par un processus de Poisson ponctuel $\Phi_h = \{(x_j, r_j); j \in J\}$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, avec une intensité en loi de puissance du rayon :

$$\nu_h(dx, dr) = dx r^{-d-1+2h(x)} \mathbf{1}_{(0,1)}(r) dr, \quad (3.4)$$

où h est une fonction borélienne sur \mathbb{R}^d à valeurs dans $(0, +\infty)$. Plus h prend des petites valeurs et plus la singularité de ν_h en 0 est importante ce qui signifie qu'il y aura dans ce modèle beaucoup de rayons très petits. On construit alors le champ X de la façon suivante. En un point t de \mathbb{R}^d on compte le nombre de boules contenant t et on définit $X(t)$ comme ce nombre aléatoire qui correspond au

shot noise (3.1) associé à Φ_h et $f(x, r) = \mathbf{1}_{B(x, r)}$. On a bien $f(t - \cdot, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu_h)$ et on peut remplacer la somme intervenant dans (3.1) par une intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire de Poisson N_h d'intensité ν_h :

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{B(x, r)}(t) N_h(dx, dr). \quad (3.5)$$

Remarquons qu'en fait $X(t) = N_h(\mathcal{C}(t))$, en définissant $\mathcal{C}(t)$, le cône issu de t , par

$$\mathcal{C}(t) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \text{ tel que } t \in B(x, r)\}. \quad (3.6)$$

Ainsi, la variable aléatoire $X(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\nu_h(\mathcal{C}(t))$ et le champ aléatoire X est un champ du second ordre de type Chentsov (voir [ST94] par exemple).

Nous avons alors modélisé le procédé de radiographie par une transformée X-ray à fenêtre de X obtenue par (1.9) en choisissant pour V un hyperplan orthogonal à une direction $\theta \in S^{d-1}$. Plus précisément, en choisissant ϕ une fenêtre adaptée sur \mathbb{R} (par exemple une fonction de la classe de Schwartz), on s'intéresse au champ aléatoire défini par

$$P_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(X) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mathcal{P}_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(\mathbf{1}_{B(x, r)})(t) N_h(dx, dr); t \in \langle \theta \rangle^\perp \right\},$$

avec $\mathcal{P}_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(\mathbf{1}_{B(x, r)})(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{B(x, r)}(t + s\theta) \phi(s) ds$. Remarquons que ce champ aléatoire correspond moralement à (1.9) en intervertissant les intégrales. Cependant, il est plus aisé de le définir ainsi puisque $\mathcal{P}_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(\mathbf{1}_{B(\cdot, \cdot)})(t) \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu_h)$. Comme on a également $\mathcal{P}_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(\mathbf{1}_{B(\cdot, \cdot)})(t) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu_h)$, le champ $P_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(X)$ est aussi du second ordre.

Nous nous sommes alors intéressées aux propriétés d'autosimilarités asymptotiques locales de ces modèles. Remarquons que lorsque on considère B un champ gaussien centré, celui-ci est lass (1.5) d'ordre H au point t si et seulement si pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Cov} \left(\frac{B(t + \varepsilon u) - B(t)}{\varepsilon^H}, \frac{B(t + \varepsilon v) - B(t)}{\varepsilon^H} \right) = \Sigma_t(u, v), \quad (3.7)$$

avec Σ_t une fonction de covariance non nulle. On dit alors que B est cov-lass d'ordre H au point t . Les propriétés lass et cov-lass ne sont pas équivalentes dans le cas général. Ainsi, on montre dans [2] que si h est une fonction höldérienne sur \mathbb{R}^d à valeurs dans $(0, 1/2)$, le modèle de microboules centré $X - \mathbb{E}(X)$ est cov-lass d'ordre $h(t)$ au point t . Si il est également lass au point t , l'ordre doit être supérieur ou égale à $2h(t)$. Le comportement local de X est donc proche de celui d'un mouvement brownien multifractionnaire au second ordre mais pas en loi. En choisissant pour h une fonction homogène d'ordre 0 höldérienne sur la sphère S^{d-1} à valeurs dans $(0, 1/2)$, on montre que le modèle de microboules centré $X - \mathbb{E}(X)$ est cov-lass d'ordre $H = \text{essinf}_{S^{d-1}} h$ au point 0 et lass d'ordre $2H$ au point 0 de champ tangent un champ déterministe. En particulier, lorsque $h = H \in (0, 1/2)$ est constante, le champ X est stationnaire ainsi que le champ $P_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(X)$, transformée X-ray à fenêtre de X . On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soit $h = H \in (0, 1/2)$ et $\theta \in S^{d-1}$.*

- *En tout point $t \in \mathbb{R}^d$, le champ X est cov-lass d'ordre H et lass d'ordre $2H$;*
- *En tout point $t \in \langle \theta \rangle^\perp$, le champ $P_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(X)$ est cov-lass et lass d'ordre $H + \frac{1}{2}$ de champ tangent un champ brownien fractionnaire d'ordre $H + \frac{1}{2}$.*

Ainsi, les paramètres d'autosimilarité asymptotique locale en loi et au second ordre de $P_{\langle \theta \rangle^\perp, \phi}(X)$ sont reliés avec le paramètre d'autosimilarité au second ordre du champ initial X par un facteur $+\frac{1}{2}$, comme dans le cas gaussien. Enfin, le champ tangent étant gaussien, ceci peut justifier d'un point de vue mathématique l'utilisation de modèles gaussiens pour les radiographies.

3.1.2 Généralisations

Dans [9], nous nous sommes intéressés à une généralisation de ce modèle de microboules. En effet, les auteurs de [KLS07] considèrent un modèle similaire, vu non pas comme un champ ponctuel indexé par \mathbb{R}^d mais comme un champ généralisé indexé par des mesures de masse finie. Nous avons unifié les deux points de vue et obtenu des champs généralisés en limite qui diffèrent selon l'échelle considérée. Plus précisément, on considère un modèle de microboules obtenu lorsque on remplace l'intensité ν_h donnée par (3.4) par l'intensité

$$\nu(dx, dr) = dx m(dr), \quad (3.8)$$

avec m une mesure positive localement finie sur $(0, +\infty)$. Ce choix signifie, d'une part que les centres des boules sont lancés uniformément dans l'espace et, d'autre part, que les rayons sont choisis indépendamment des centres. On suppose de plus que le "volume moyen" des boules est fini ce qui correspond à supposer que

$$\int_{\mathbb{R}^+} r^d m(dr) < +\infty. \quad (3.9)$$

Cette condition assure ainsi l'existence du modèle de microboules $\{X(t); t \in \mathbb{R}^d\}$ qui sera alors un champ du second ordre stationnaire. On remplace l'hypothèse que $m(dr) = r^{-d-1+2H} \mathbf{1}_{(0,1)}(r) dr$, par une hypothèse de comportement en loi de puissance qui pourra être vérifiée au voisinage de 0 ou au voisinage de $+\infty$:

$$\mathbf{A}(\beta) : m(dr) = g(r) dr \text{ avec } g(r) \sim r^{-\beta-1}, \text{ quand } r \rightarrow 0^{d-\beta},$$

où par convention $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^\alpha = +\infty$ si $\alpha < 0$. Remarquons que l'hypothèse d'intégrabilité (3.9) implique que $\beta > d - 1$.

On cherche alors à définir un champ généralisé, indexé par des mesures signées finies. Pour cela on introduit \mathcal{M} l'ensemble des mesures signées finies μ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ que l'on munit de la norme définie par la variation totale $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d)$. En remarquant que $\mu(B(\cdot, \cdot)) \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \nu)$ si $\mu \in \mathcal{M}$, on peut alors définir la variable aléatoire

$$X(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) N(dx, dr), \quad (3.10)$$

où N est cette fois une mesure aléatoire de Poisson d'intensité ν . Cette variable correspond moralement à $\int_{\mathbb{R}^d} X(t) \mu(dt)$ de sorte que $X(t) = X(\delta_t)$ et nous permet de considérer le champ généralisé $\{X(\mu); \mu \in \mathcal{M}\}$. Nous avons alors étudié les propriétés asymptotiques de ces champs à petites et grandes échelles en introduisant pour $\rho > 0$ le champ généralisé $X_\rho = \{X_\rho(\mu); \mu \in \mathcal{M}\}$, obtenu en remplaçant la mesure N par une mesure aléatoire de Poisson $N_{\lambda(\rho), \rho}$ d'intensité

$$\nu_{\lambda(\rho), \rho} = \lambda(\rho) dx m_\rho(dr), \quad (3.11)$$

avec m_ρ la mesure image de m par le changement d'échelle $r \mapsto \rho r$ et $\lambda(\rho) > 0$ un coefficient d'échelle. Lorsque $\lambda(\rho) = \rho^{-d}$, le champ X_ρ a mêmes lois fini-dimensionnelles que $\{X(\mu^\rho); \mu \in \mathcal{M}\}$, où $\mu^\rho(B) = \mu(\rho B)$, pour tout borélien B de \mathbb{R}^d . Sous l'hypothèse $\mathbf{A}(\beta)$ on s'attend à avoir

$$\text{Var}(X_\rho(\mu)) \sim \lambda(\rho) \rho^\beta \text{Var}(X(\mu)), \quad \rho \rightarrow 0^{\beta-d},$$

mais $\text{Var}(X_\rho(\delta_0)) = \lambda(\rho) \rho^d \text{Var}(X(\delta_0))$. Nous avons donc besoin d'introduire des sous-espaces stricts de \mathcal{M} afin d'étudier la convergence de X_ρ . Pour $\beta > d$ on pose

$$\mathcal{M}_\beta = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \exists \alpha \text{ t.q. } d < \beta < \alpha \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |z - z'|^{d-\alpha} |\mu|(dz) |\mu|(dz') < +\infty \right\},$$

qui correspond à un sous-ensemble de mesures dont l'énergie de Riesz est finie et vérifie $\mathcal{M}_\beta = \{0\}$ si $\beta \geq 2d$. Lorsque $\beta < d$ nous avons besoin de supposer que les mesures sont de moyennes nulles et d'une information supplémentaire sur leur comportement à l'infini. On pose alors

$$\mathcal{M}_\beta = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_{\mathbb{R}^d} \mu(dz) = 0 \text{ et } \exists \alpha \text{ t.q. } \alpha < \beta < d \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |z - z'|^{d-\alpha} |\mu|(dz) |\mu|(dz') < +\infty \right\}.$$

On obtient le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soit $d-1 < \beta < 2d$ avec $\beta \neq d$ et m une mesure positive sur \mathbb{R}^+ satisfaisant $\mathbf{A}(\beta)$. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\beta$, pour toute fonction positive λ ,*

$$\frac{X_\rho(\mu) - \mathbb{E}(X_\rho(\mu))}{\sqrt{\lambda(\rho)\rho^\beta}} \xrightarrow[\rho \rightarrow 0^{\beta-d}]{\text{loi}} Z_\beta(\mu),$$

dans les deux cas suivants :

- **régime gaussien** : si $\lambda(\rho)\rho^\beta \xrightarrow[\rho \rightarrow 0^{\beta-d}]{} +\infty$ avec $Z_\beta = W_\beta$ un champ gaussien centré sur \mathcal{M}_β de covariance

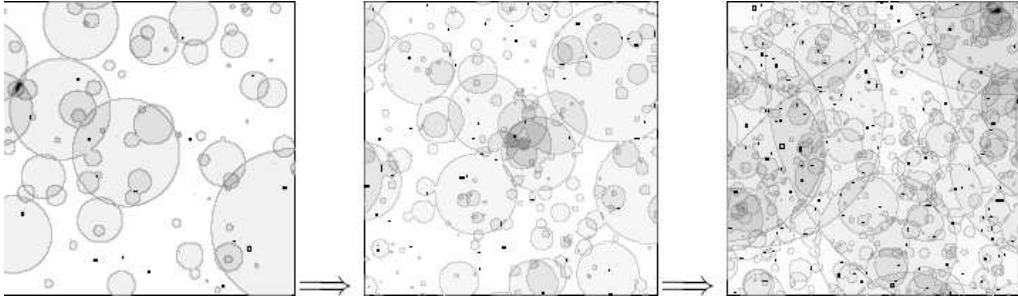
$$\text{Cov}(W_\beta(\mu), W_\beta(\nu)) = c_\beta \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |z - z'|^{d-\beta} \mu(dz) \nu(dz'), \quad (3.12)$$

où c_β est une constante négative si $\beta < d$ et positive si $\beta > d$.

- **régime poissonien** : si $\lambda(\rho)\rho^\beta \xrightarrow[\rho \rightarrow 0^{\beta-d}]{} a^{d-\beta}$, pour un certain $a > 0$, avec $Z_\beta(\mu) = a^{-(d-\beta)/2} J_\beta(\mu_a)$, où J_β est le champ centré défini sur \mathcal{M}_β par

$$J_\beta(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widetilde{N}_\beta(dx, dr),$$

avec \widetilde{N}_β une mesure de Poisson compensée d'intensité $dx r^{-\beta-1} dr$, et μ_a définie par $\mu_a(A) = \mu(a^{-1}A)$.



Ce résultat a été généralisé dans [BD09] en considérant un modèle pour lequel chacune des boules aléatoires a également un poids aléatoire. En choisissant ce poids dans le domaine d'attraction d'une loi stable, ils obtiennent également un régime stable pour lequel le champ limite est stable avec dépendance.

Nous nous sommes également intéressés aux propriétés des champs W_β et J_β intervenant à la limite. Par choix de la mesure de Lebesgue pour l'intensité des centres des boules dans (3.8), tous deux sont des champs stationnaires sur \mathcal{M}_β ce qui signifie que leur loi est invariante par translation de la mesure. De plus ils sont centrés, du second ordre et ont les mêmes fonctions de covariance. Ils satisfont donc les mêmes propriétés au second ordre. En particulier ils sont autosimilaires au second ordre d'ordre $H = \frac{d-\beta}{2} \in (-d/2, 1/2) \setminus \{0\}$.

3.1.3 Autosimilarité et représentation ponctuelle

Nous avons alors cherché d'une part à associer aux champs W_β et J_β une représentation ponctuelle et d'autre part à étendre l'ordre d'autosimilarité. En ce qui concerne le premier point, on peut tout d'abord remarquer que les masses de Dirac ne sont pas des mesures de \mathcal{M}_β . Nous nous sommes donc inspirés des travaux de Dobrushin [Dob79] sur la caractérisation des champs stationnaires autosimilaires vu comme des distributions tempérées aléatoires. En effet, en identifiant une fonction φ de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ à une mesure signée $\mu(dz) = \varphi(z)dz$ de \mathcal{M} on remarque que W_β et J_β induisent des distributions tempérées aléatoires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si $d < \beta < 2d$ et $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^d)$ si $d - 1 < \beta < d$, en définissant pour $n > 0$

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d); D^j \widehat{\varphi}(0) = 0, \text{ pour tout } j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } |j| = j_1 + \dots + j_d < n \right\}.$$

Il est à noter que les distributions tempérées aléatoires définies sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d)$ correspondent moralement à des dérivées d'ordre n de distributions tempérées aléatoires définies sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, puisque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d) = \text{Vect} \{ D^j \varphi : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), j \in \mathbb{N}^d, |j| = n \}$, la connaissance d'un champ X sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d)$ nous donne seulement de l'information sur $D^j X$ pour $|j| = n$ en utilisant le fait que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $D^j X(\varphi) = (-1)^{|j|} X(D^j \varphi)$. Ceci nous permet alors d'obtenir des champs autosimilaires de tout ordre sur $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}^d)$, en définissant pour $H \in \mathbb{R}$ avec $H \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ si $d = 1$ et $H \notin \mathbb{Z}$ si $d \geq 2$,

$$B_H(\varphi) \stackrel{fdd}{=} W_{\beta_H}((-\Delta)^{-m/2} \varphi) \text{ et } P_H(\varphi) \stackrel{fdd}{=} J_{\beta_H}((-\Delta)^{-m/2} \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^d),$$

avec $m = [H + \frac{1}{2}] \in \mathbb{Z}$ la partie entière de $H + \frac{1}{2}$, $\beta_H = d - 2(H - m) \in (d - 1, 2d) \setminus \{0\}$ et $(-\Delta)^{-m/2} \varphi(\xi) = |\xi|^{-m} \widehat{\varphi}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Ces champs sont autosimilaires au second ordre d'ordre H . En particulier, si $H < 0$ on ne peut pas leur associer de représentation ponctuelle. Pour $H > 0$, leur fonction de covariance est donnée par

$$\text{Cov}(B_H(\varphi), B_H(\psi)) = \text{Cov}(P_H(\varphi), P_H(\psi)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \Gamma_H(t, s) \varphi(t) \psi(s) dt ds, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^d),$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_H(t, s) &= k_{\beta_H} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-it \cdot \xi} - \sum_{0 \leq k < [H]} \frac{(-it \cdot \xi)^k}{k!} \right) \overline{\left(e^{-is \cdot \xi} - \sum_{0 \leq k < [H]} \frac{(-is \cdot \xi)^k}{k!} \right)} |\xi|^{-d-2H} d\xi \\ &= (-1)^{[H]} c_H \left(|t - s|^{2H} - \sum_{|l| < [H]} \frac{(-1)^{|l|}}{l!} \left(s^l D^l |t|^{2H} + t^l D^l |s|^{2H} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

de sorte que $B_H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} B_H(t) \varphi(t) dt$ et $P_H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} P_H(t) \varphi(t) dt$ avec B_H et P_H admettant Γ_H pour fonction de covariance. Ce sont en particulier des champs à accroissements d'ordre $[H]$ stationnaires et autosimilaires d'ordre H , où $[H]$ désigne la partie entière par excès de H .

Lorsque $H \in (0, 1)$, puisque B_H est un champ gaussien, on retrouve, à une constante près, le champ brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$ défini par (1.1). Si on suppose de plus que $H < 1/2$, on peut remarquer que $P_H = \{ J_{\beta_H}(\delta_t - \delta_0); t \in \mathbb{R}^d \}$ de sorte que l'on peut donner une représentation de P_H sous la forme d'une intégrale stochastique :

$$P_H = \left\{ \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\mathbf{1}_{B(x,r)}(t) - \mathbf{1}_{B(x,r)}(0)) N_H(dx, dr); t \in \mathbb{R}^d \right\},$$

avec N_H une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité $\nu_H(dx, dr) = dx r^{-d-1-2H} dr$. Nous avons choisi de l'appeler champ de Poisson fractionnaire d'ordre H . On peut remarquer que

$$P_H(t) = N_H(\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{C}(0)^c) - N_H(\mathcal{C}(0) \cap \mathcal{C}(t)^c), \quad (3.14)$$

où $\mathcal{C}(t)$ est le cône introduit dans (3.6). Ainsi, $P_H(t)$ suit une loi de Skellam de paramètre ν_H ($\mathcal{C}(t) \cap \mathcal{C}(0)^c$) = ν_H ($\mathcal{C}(0) \cap \mathcal{C}(t)^c$) = $c_H |t|^{2H}$.

3.2 Seuillages et recouvrements aléatoires

Le seuillage est couramment utilisé en analyse d'images puisque c'est une méthode simple de segmentation. Il est donc naturel en modélisation stochastique, lorsque on considère un champ aléatoire X à valeurs réelles, d'étudier les champ aléatoires binaires (à valeurs dans $\{0, 1\}$) obtenus par seuillage. Le seuillage simple consiste à choisir un seuil $\alpha \in \mathbb{R}$ et à considérer le champ aléatoire $S_\alpha X = \{\mathbf{1}_{X(t) \geq \alpha}; t \in \mathbb{R}^d\}$. Il se peut alors que le seuil soit mal adapté et que le champ $S_\alpha X$ soit dégénéré c'est à dire constant p.s. Lorsque X est un modèle de type microboules l'ensemble aléatoire $S_\alpha X^{-1}(\{1\})$ correspond à l'ensemble des points qui sont recouverts par au moins α boules aléatoires. C'est un champ booléen qui peut décrire un milieu bi-phasique dont le procédé de construction peut faire penser à des microporosités lancées aléatoirement. En choisissant $\alpha = 1$, le champ $S_1 X$ est dégénéré si p.s. tout point de \mathbb{R}^d est recouvert par une boule aléatoire. La question de dégénérescence est donc en fait liée à la question du recouvrement de l'espace par un ensemble aléatoire. C'est ce que nous étudie dans [11] pour un modèle de type microboules pour une intensité ν donnée par (3.8) avec m une mesure positive localement finie sur $(0, +\infty)$. On note alors Ξ l'ensemble aléatoire $S_1 X^{-1}(\{1\})$ de sorte que $\Xi = \bigcup_{(x,r) \in \Phi} B(x,r)$, où Φ désigne un processus Ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité ν . On peut remarquer dans un premier temps que

$$\mathbb{P}(0 \notin \Xi) = \mathbb{P}(\{(x,r) \in \Phi; 0 \in B(x,r)\} = \emptyset) = \exp\left(-v_d \int_0^{+\infty} r^d m(dr)\right), \text{ avec } v_d = |B(0,1)|.$$

Ainsi, (3.9) est une condition suffisante pour que $S_1 X$ ne soit pas dégénéré. Nous avons donc travailler sous l'hypothèse que

$$\int_{\mathbb{R}^d} r^d m(dr) = +\infty, \quad (3.15)$$

qui est alors une condition nécessaire pour que \mathbb{R}^d soit recouvert p.s. par Ξ . Nous définissons également $\psi(m) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^d \subset \Xi)$ la probabilité de recouvrement qui vaut 0 ou 1 du fait de l'ergodicité du processus ponctuel associé aux centres des boules. Puisque la mesure m est supposée localement finie sur $(0, +\infty)$, la condition (3.15) sera vérifiée en fonction du comportement de m soit au voisinage de 0 (correspondant aux petites boules), soit au voisinage de $+\infty$ (correspondant aux grosses boules). On peut donc traiter les deux cas séparément en considérant les mesures $m_H(dr) = \mathbf{1}_{(0,1)}(r)dr$ et $m_L(dr) = \mathbf{1}_{[1,+\infty)}(r)dr$ ainsi que les ensembles Ξ_H et Ξ_L correspondant. En s'inspirant de [Man72] et [She72], on dit que la mesure m induit un recouvrement haute fréquence, respectivement basse fréquence, si $\psi(m_H) = 1$, respectivement $\psi(m_L) = 1$. Le recouvrement basse fréquence est très proche de ce qui se passe dans le cas très étudié des modèles booléens (voir [MR96] ou [Hal88]) pour lesquels la mesure m est une mesure finie. Pour qu'il y ait recouvrement basse fréquence, il faut et il suffit que m_L vérifie (3.15). Le cas du recouvrement haute fréquence est plus délicat. En utilisant un argument de martingale, Kahane a montré qu'une condition nécessaire pour que $\psi(m_H) = 1$ est donnée par

$$\int_0^1 u^{d-1} \exp\left(v_d \int_u^1 r^{d-1} (r-u) m(dr)\right) du = +\infty.$$

En fait, c'est également une condition suffisante en dimension $d = 1$ et, en dimension plus grande, pour le recouvrement par un certain type d'ensembles convexes qui ne sont pas des boules. Nous obtenons cependant une condition suffisante de recouvrement basse fréquence qui va nous permettre d'énoncer un critère simple de recouvrement. En effet, on montre que si

$$\limsup_{u \rightarrow 0} u^d \exp\left(v_d \int_u^1 (r-u)^d m(dr)\right) = +\infty$$

alors $\psi(m_H) = 1$. On démontre alors que $\psi(m) = \max(\psi(m_H), \psi(m_L))$ ce qui signifie que le recouvrement est forcément haute ou basse fréquence. En s'inspirant de la théorie de la percolation, on définit une intensité critique de recouvrement donnée par

$$\lambda_c(m) = \inf\{\lambda \geq 0; \psi(\lambda m) > 0\} \in [0, +\infty].$$

On donne alors les valeurs explicites des intensités critiques de recouvrement basse et haute fréquence : $\lambda_c(m_L) = 0$ si m_L vérifie (3.15), sinon $\lambda_c(m_L) = +\infty$ et $\lambda_c(m_H) = d/\ell(m)^1$ où

$$\ell(m) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(|\ln \varepsilon|^{-1} v_d \int_{\varepsilon}^1 r^d m(dr) \right) \in [0, +\infty]. \quad (3.16)$$

En particulier, lorsque $\ell(m) > d$, p.s. \mathbb{R}^d est recouvert par Ξ_H . Un cas intéressant est obtenu lorsque $\ell(m) \in (0, d]$. En effet, on peut alors considérer $F = [0, 1]^d \cap \Xi_H^c$, l'ensemble des points dans $[0, 1]^d$ qui ne sont pas recouverts par Ξ_H . Puisque $\ell(m) > 0$, la mesure m_H vérifie (3.15) et la mesure de Lebesgue de F est nulle. En revanche, en s'inspirant de [EH78], on obtient le résultat suivant concernant sa dimension de Hausdorff.

Théorème 3.3. *Si $\ell(m) > 0$,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) \leq \max(d - \ell(m), 0) \text{ p.s.}$$

De plus, si $\ell(m) \leq d$, avec probabilité positive, $\dim_{\mathcal{H}}(F) = d - \ell(m)$.

En percolation continue, on peut s'intéresser à l'existence de grandes composantes connexes dans le complémentaire de Ξ_H . En suivant [BC10] et [MR96], on définit une nouvelle intensité critique

$$\lambda_f(m) = \inf\{\lambda \geq 0; \theta_f(\lambda m) = 0\},$$

en considérant $\theta_f(m)$ la probabilité que $F = [0, 1]^d \cap \Xi_H^c$ contienne une composante connexe plus grande qu'un point. Le théorème 3.3 permet alors de montrer que $\lambda_f(m) \leq \frac{d-1}{\ell(m)}$ et d'observer une phase de transition formée de poussière dans Ξ^c jusqu'à ce qu'il devienne vide.

Un exemple typique de modèle admettant ce comportement, étudié dans [BC10], est obtenu en choisissant $m(dr) = r^{-d-1}dr$ pour laquelle la mesure ν est invariante d'échelle, et $\ell(m) = v_d \in (0, +\infty)$. Ce choix d'intensité est également souvent fait dans l'étude des cascades multiplicatives (voir [BM02] ou [Cha05] par exemple). Un autre exemple est donné par le modèle Booléen multi-échelle [MR96, MPV01, Gou08], résultant de la superposition de modèles booléens indépendants pris à différentes échelles. Pour $\rho > 1$, il est obtenu en choisissant la mesure $\mu^\rho = \sum_{n \geq 0} \rho^{nd} \delta_{\rho^{-n}}$, de sorte

que $\ell(\mu^\rho) = \frac{v_d}{\ln(\rho)} \in (0, +\infty)$.

3.3 Nombre de franchissements des processus shot noise

En collaboration avec Agnès Desolneux, nous nous intéressons aux statistiques des ensembles de niveaux de certains champs aléatoires de type shot noise. L'étude des ensembles de niveaux intervient dans de nombreux domaines d'applications comme en optique et océanographie (mesure de l'amplitude des vagues [LH57, KL00]), physique (étude de la fréquence d'oscillateur harmonique [KL10]), fiabilité [Ryc00]. Nous avons commencé notre travail par le cas de la dimension $d = 1$ et avons étudié dans [12] et [13] les nombres moyens de franchissements d'un niveau (crossings) par un processus shot noise stationnaire. Nous considérons donc un processus X donné par (3.1) avec Φ un processus de

1. avec la convention $d/0 = +\infty$ et $d/+\infty = 0$

Poisson marqué sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'intensité $\nu(dx, d\kappa) = \lambda dx F(d\kappa)$ avec $\lambda > 0$, F une mesure de probabilité sur \mathbb{R} et $f(x, \kappa) = \kappa g(x)$ pour une certaine fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De façon équivalente

$$X(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \beta_i g(t - \tau_i), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.17)$$

avec $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ les points d'un processus de Poisson ponctuel sur \mathbb{R} d'intensité λds , et $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires iid de même loi F qu'une variable aléatoire β , indépendantes de $\{\tau_i\}$. Nous supposons que g est une fonction intégrable de $L^1(\mathbb{R})$, qui est de classe \mathcal{C}^2 par morceaux sur \mathbb{R} , avec un ensemble fini de points de discontinuité noté

$$S_g = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \text{ tels que } t_1 < \dots < t_n,$$

et appelé ensemble des sauts de g . En posant $t_0 = -\infty$ et $t_{n+1} = +\infty$, la fonction g est donc de classe \mathcal{C}^2 sur $]t_{i-1}, t_i[$ pour $1 \leq i \leq n+1$ et admet des limites finies à gauche et à droite en tout point de S_g . On note g' , respectivement g'' , la fonction définie en tout point $s \notin S_g$ par la dérivée usuelle $g'(s)$, respectivement $g''(s)$. La régularité du processus shot noise X se déduit alors de celle de g en ajoutant des conditions d'intégrabilité.

Théorème 3.4. *Soit $\beta \in L^1(\Omega)$ et g une fonction \mathcal{C}^2 par morceaux telle que $\#S_g < \infty$ et $g, g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors X est un processus stationnaire presque sûrement \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} avec*

$$S_X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (\tau_i + S_g)$$

et

$$\forall t \notin S_X, \quad X'(t) = \sum_i \beta_i g'(t - \tau_i).$$

Si de plus $\beta \in L^2(\Omega)$ et $S_g = \emptyset$, le processus X est un processus du second ordre continûment dérivable presque sûrement et en moyenne quadratique.

En particulier, le processus X est une fonction à variations bornées sur tout intervalle (a, b) . Par stationnarité on peut restreindre son étude à l'intervalle $(0, 1)$. Sa variation totale sur $(0, 1)$ est donnée par

$$TV(X, (0, 1)) = \int_0^1 |X'(t)| dt + \sum_{j=1}^n \sum_{\tau_i \in (-t_j, 1-t_j)} |\beta_i| |g(t_j^+) - g(t_j^-)| < +\infty \text{ p.s.}$$

avec $g(t_j^+) = \lim_{s \rightarrow t_j, s > t_j} g(s)$, $g(t_j^-) = \lim_{s \rightarrow t_j, s < t_j} g(s)$ les limites à droite et à gauche de g au point t_j . On peut alors étudier les nombres de franchissements dans le cadre des fonctions à variations bornées [EG92].

3.3.1 Transformée de Fourier du nombre moyen de franchissements

Lorsque X est p.s. \mathcal{C}^1 par morceaux sur $(0, 1)$ (avec un nombre fini de points de discontinuités sur $(0, 1)$) on peut définir la variable aléatoire correspondant à son nombre de franchissements d'un niveau $\alpha \in \mathbb{R}$ sur $(0, 1)$ par

$$N_X(\alpha, (0, 1)) = \#\{s \in (0, 1) ; \min(X(s^-), X(s^+)) \leq \alpha \leq \max(X(s^-), X(s^+))\}.$$

Une généralisation de la formule de la co-aire pour les fonctions à variations bornées [CF97] nous permet d'obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} h(\alpha) N_X(\alpha, (0, 1)) d\alpha = \int_0^1 h(X(s)) |X'(s)| ds + \sum_{s \in S_X \cap (0, 1)} \int_{\min(X(s^+), X(s^-))}^{\max(X(s^+), X(s^-))} h(\alpha) d\alpha, \text{ p.s.} \quad (3.18)$$

pour toute fonction h continue bornée sur \mathbb{R} . Nous nous sommes particulièrement intéressées au nombre moyen de franchissement de X sur $(0, 1)$ donné par

$$C_X(\alpha) = \mathbb{E}(N_X(\alpha, (0, 1))). \quad (3.19)$$

En choisissant dans (3.18) la fonction h de la forme $h(x) = e^{iux}$, $u \in \mathbb{R}$, et en prenant l'espérance on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 3.5. *Soit $\beta \in L^1(\Omega)$ et g une fonction \mathcal{C}^2 par morceaux telle que $\#S_g < \infty$ et $g, g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $C_X \in L^1(\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} C_X(\alpha) d\alpha = \mathbb{E}(TV(X, (0, 1))) = \mathbb{E}(|X'(0)|) + \lambda \mathbb{E}(|\beta|) \sum_{j=1}^n |g(t_j^+) - g(t_j^-)|.$$

De plus, sa transformée de Fourier, notée $u \mapsto \widehat{C}_X(u)$ est donnée pour $u \neq 0$ par

$$\widehat{C}_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX(0)} |X'(0)|) + \lambda \mathbb{E}(e^{iuX(0)}) \sum_{j=1}^n \frac{\mathbb{E}(e^{iu \max(\beta g(t_j^-), \beta g(t_j^+))}) - \mathbb{E}(e^{iu \min(\beta g(t_j^-), \beta g(t_j^+))})}{iu}.$$

Si de plus $\beta \in L^2(\Omega)$, $\mathbb{E}(e^{iuX(0)} |X'(0)|) = \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, -v) \right) dv$, avec

$$\psi(u, v) = \mathbb{E}(e^{iuX(0) + ivX'(0)}) = \exp \left(\lambda \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (e^{iz(ug(s) + vg'(s))} - 1) ds F(dz) \right).$$

En particulier, lorsque $\beta \geq 0$ p.s. et $g' \leq 0$ p.p., on montre que pour tout $u \neq 0$

$$\widehat{C}_X(u) = 2\lambda \mathbb{E}(e^{iuX(0)}) \sum_{t_j: g(t_j^+) > g(t_j^-)} \frac{\widehat{F}(ug(t_j^+)) - \widehat{F}(ug(t_j^-))}{iu},$$

et alors, par injectivité de la transformée de Fourier, pour presque tout niveau $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$C_X(\alpha) = 2\lambda \sum_{t_j: g(t_j^+) > g(t_j^-)} \mathbb{P}[\alpha - \beta g(t_j^+) \leq X(0) \leq \alpha - \beta g(t_j^-)].$$

On obtient ainsi une généralisation de la formule de Hsing [Hsi87], où l'auteur considère une fonction g décroissante presque partout qui n'a qu'un seul saut positif en 0. On généralise également les résultats de [OB83] concernant le noyau exponentielle $g(s) = 0$ pour $s < 0$ et $g(s) = e^{-s}$ pour $s \geq 0$ avec β de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. Dans ce cas, $\psi(u, v) = \frac{\mu^\lambda}{(\mu - iu + iv)^\lambda}$ de sorte que $\widehat{C}_X(u) = \frac{2\lambda\mu^\lambda}{(\mu - iu)^{\lambda+1}}$ est proportionnelle à la transformée de Fourier d'une loi Gamma. Ceci implique que

$$C_X(\alpha) = \frac{2\lambda\mu^\lambda \alpha^\lambda e^{-\mu\alpha}}{\Gamma(\lambda + 1)} \mathbf{1}_{\{\alpha \geq 0\}} \quad \text{p.p. } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Notons que les auteurs de [OB83] ont obtenu ce résultat pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$ et pour tout niveau $\alpha \in \mathbb{R}$, en utilisant les propriétés markoviennes du processus shot noise qui ne sont pas vérifiées pour un noyau général. A priori, l'inversion de la transformée de Fourier ne permet que de déterminer les valeurs de $C_X(\alpha)$ presque partout. C'est déjà une information qui peut être utilisée dans les applications comme discuté dans [Ryc00]. On peut obtenir des résultats pour tout niveau α lorsque on sait de plus que C_X est une fonction continue (ce qui est le cas par exemple pour le noyau exponentiel).

3.3.2 Continuité du nombre moyen de franchissements

Dans [12], pour étudier la continuité du nombre moyen de franchissements, nous avons cherché à établir une formule directe pour C_X . Pour cela, nous nous sommes concentrées sur le cas où $S_g = \emptyset$ et $\beta = 1$ p.s. Dans ce cas, le processus est continûment dérivable presque sûrement et en moyenne quadratique. Si de plus, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, il vérifie

$$\mathbb{P}(\exists t \in [0, 1] \text{ t.q. } X(t) = \alpha \text{ et } X'(t) = 0) = 0, \quad (3.20)$$

alors $N_X(\alpha, (0, 1)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^1 \mathbb{1}_{|X(t) - \alpha| < \delta} |X'(t)| dt$ p.s., par la formule de Kac (voir [AW09] par exemple). En utilisant la stationnarité de X , lorsque le couple $(X(0), X'(0))$ admet une densité continue p on peut espérer, en prenant l'espérance, obtenir la formule de Rice $C_X(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} |z| p(\alpha, z) dz$ et en déduire la continuité de C_X . Bien entendu, il faut faire un certain nombre d'hypothèses supplémentaires pour justifier l'interversion de la limite et de l'espérance. Dans le cas précis qui nous intéresse la condition (3.20) n'est pas toujours vérifiée pour le niveau $\alpha = 0$. En particulier, si g est à support compact on montre que $\mathbb{P}(X(0) = 0 \text{ et } X'(0) = 0) > 0$ puisque cet évènement a lieu si aucun point du processus de Poisson n'est dans le support de g . On peut cependant régulariser la loi jointe en conditionnant pour $T > 0$ et $k_0 \geq 1$ par l'évènement

$$\gamma_T = \#\{i; \tau_i \in [-T, T]\} \geq k_0.$$

En effet, si on suppose que g est une fonction de classe \mathcal{C}^4 telle que pour tout $s \in [-T, T + 1]$, les matrices

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} g'(s) & g''(s) \\ g''(s) & g^{(3)}(s) \end{pmatrix} \text{ et } \Phi'(s) = \begin{pmatrix} g''(s) & g^{(3)}(s) \\ g^{(3)}(s) & g^{(4)}(s) \end{pmatrix} \text{ sont inversibles,} \quad (3.21)$$

on montre en utilisant la méthode de la phase stationnaire (voir [Ste02] par exemple) que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left| \int_{-T}^T e^{iug(t-s) + vg'(t-s)} ds \right| \leq c_T (1 + u^2 + v^2)^{-1/4}.$$

Ceci nous permet d'obtenir l'intégrabilité des fonctions caractéristiques des lois conditionnelles à $\{\gamma_T \geq k_0\}$ dès que k_0 est suffisamment grand et d'en déduire l'existence de densités continues et bornées associées. En vérifiant les conditions de [Lea66], on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 3.6. *Si $g \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$ vérifie (3.21) avec $g, g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$ et $\beta = 1$ p.s. alors pour $k_0 \geq 8$, $\alpha \mapsto \mathbb{E}(N_X(\alpha, (0, 1)) | \gamma_T \geq k_0)$ est continue sur \mathbb{R} .*

3.3.3 Convergence du nombre moyen de franchissements

Lorsque X est un processus shot noise du second ordre, il est bien connu [Pap71, HS85] que, quand l'intensité λ tend vers $+\infty$, le processus normalisé $Z_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (X(t) - \mathbb{E}(X(t)))$ converge en loi vers un processus gaussien centré B de covariance $\text{Cov}(B(t), B(t')) = \frac{1}{\lambda} \text{Cov}(X(t), X(t')) = \mathbb{E}(\beta^2) \int_{\mathbb{R}} g(t-s)g(t'-s)ds$. En fait, si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ avec $g, g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$ et $g'' \in L^p(\mathbb{R})$ pour un $p > 1$, on obtient la convergence en loi de (Z_λ, Z'_λ) vers (B, B') dans l'espace des fonctions continues sur les compacts, muni de la topologie de la convergence uniforme. En utilisant l'espérance de la formule de la co-aire (3.18), on obtient alors la convergence faible de C_{Z_λ} vers C_B avec, d'après la formule de Rice [CL04],

$$C_B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} e^{-\alpha^2/2m_0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

où $m_0 = \text{Var}(B(t)) = \int_{\mathbb{R}} g(s)^2 ds$ et $m_2 = \text{Var}(B'(t)) = \int_{\mathbb{R}} g'(s)^2 ds$. De plus, grâce à la formule explicite de la transformée de Fourier du nombre de franchissements de Z_λ , on peut donner une

vitesse pour la convergence ponctuelle de $\widehat{C}_{Z_\lambda}(u)$ vers $\widehat{C}_B(u)$. En s'inspirant des techniques de preuve du théorème central limite pour les densités (voir [Fel66] par exemple) et en conditionnant à nouveau, on obtient une convergence forte.

Théorème 3.7. *Si $g \in C^4(\mathbb{R})$ vérifie (3.21) sur $[-1, 2]$ avec $g, g', g'' \in L^1(\mathbb{R})$, $\beta = 1$ p.s. et γ_λ désigne le nombre de points dans $[-1, 1]$ du processus de Poisson d'intensité λ associé à Z_λ alors*

$$\mathbb{E}(N_{Z_\lambda}(\alpha, (0, 1)) | \gamma_\lambda \geq \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} C_B(\alpha), \quad \text{uniformément pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.3.4 Application au noyau gaussien

Dans [12], nous avons utilisé les résultats précédents pour traiter en détail le cas d'un processus shot noise avec un noyau gaussien donné par (3.17) avec $\beta = 1$ p.s. et

$$g(t) = g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2},$$

noté $X_{\lambda, \sigma}$. Un tel modèle permet de décrire la température au point t , au temps σ^2 , lorsque des sources de chaleur ont été placées aléatoirement suivant un processus de Poisson d'intensité λ sur la droite réelle, au temps 0. On montre en particulier que $(\sigma, t) \mapsto X_{\lambda, \sigma}(t)$ satisfait p.s. l'équation de la chaleur sur $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial X_{\lambda, \sigma}}{\partial \sigma}(t) = \sum_i \frac{\partial g_\sigma}{\partial \sigma}(t - \tau_i) = \sigma X''_{\lambda, \sigma}(t). \quad (3.22)$$

Nous avons étudié le nombre moyen d'extrema locaux de $X_{\lambda, \sigma}$ sur l'intervalle $(0, 1)$ noté $\rho(\lambda, \sigma)$. Nous montrons que (3.20) est vérifiée pour $X'_{\lambda, \sigma}$ au niveau $\alpha = 0$ et ainsi $\rho(\lambda, \sigma)$ est donné par $\mathbb{E}(N_{X'_{\lambda, \sigma}}(0, (0, 1)))$, le nombre moyen de franchissement du niveau 0 par le processus $X'_{\lambda, \sigma}$. Il majore donc $C_{X_{\lambda, \sigma}}(\alpha)$ pour tout niveau $\alpha \in \mathbb{R}$. Une grosse difficulté a été de démontrer que $\rho(\lambda, \sigma)$ était bien fini, ce que nous avons réussi à faire en donnant une majoration explicite. Enfin, nous avons regardé l'évolution de ρ en fonction du temps σ et de l'intensité λ .

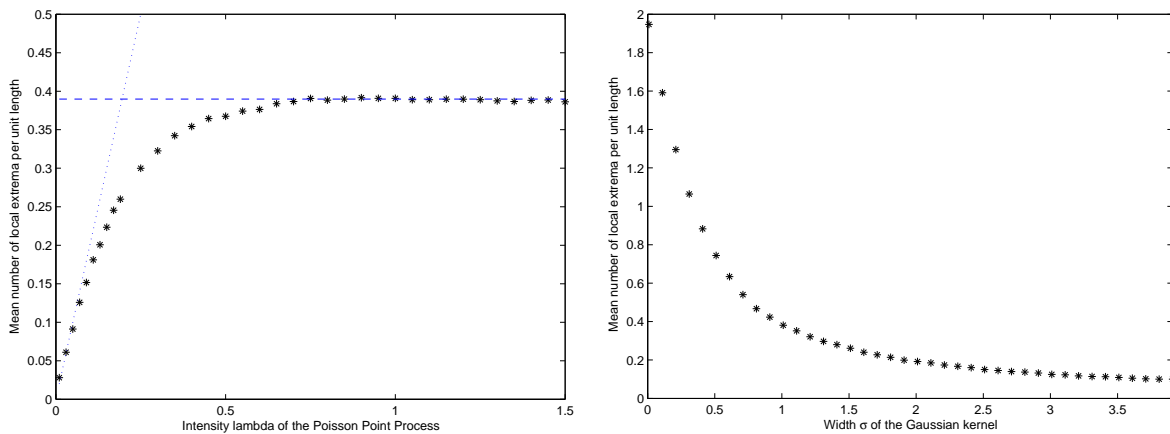


FIGURE 3.1 – Gauche : Moyenne empirique du nombre d'extrema locaux de $X_{\lambda, \sigma}$ en fonction de λ (ici $\sigma = 1$ et la moyenne est estimée sur 10 échantillons de $X_{\lambda, \sigma}$ synthétisé sur l'intervalle $[-100, 100]$). La ligne horizontale correspond à la valeur $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}}$ et la ligne pointillée correspond à la droite $\lambda \mapsto 2\lambda$. Droite : Moyenne empirique du nombre d'extrema locaux de $X_{\lambda, \sigma}$ en fonction de σ (ici $\lambda = 1$ et la moyenne est estimée sur 10 échantillons de $X_{\lambda, \sigma}$ synthétisé sur l'intervalle $[-100, 100]$).

On montre tout d'abord que ρ satisfait le changement d'échelle suivant :

$$\forall c > 0, c\rho(\lambda, c\sigma) = \rho(c\lambda, \sigma).$$

Ceci permet de considérer ρ comme une simple fonction de σ ou de λ . La figure 3.1 présente l'allure de ces fonctions en utilisant la moyenne empirique pour estimer ρ . On voit ainsi empiriquement que

$$\rho(\lambda, \sigma) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma\pi} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ceci peut se démontrer théoriquement, en utilisant le théorème 3.7 pour $X'_{\lambda, \sigma}$ et $\alpha = 0$, si on arrive à majorer le second moment de $N_{X'_{\lambda, \sigma}}(0)$ par un polynôme en λ . On s'aperçoit également d'un second régime pour les petites valeurs de λ puisque la courbe a pour asymptote la droite $\lambda \mapsto 2\lambda$. En utilisant le changement d'échelle cela revient à dire que que $\rho(\lambda, \sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 2\lambda$.

Nous avons donc étudié l'évolution de $\rho(\lambda, \sigma)$ en fonction de σ . En utilisant le fait que, pour $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, la convolution des noyaux gaussiens g_{σ_1} et g_{σ_2} est le noyau gaussien $g_{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ on peut voir le processus $X_{\lambda, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$ au temps $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ comme la convolution du processus X_{λ, σ_1} au temps σ_1^2 avec le noyau gaussien g_{σ_2} . Ce type de convolution est couramment employé en traitement du signal, d'autant qu'elle ne "crée pas de nouveaux extremas locaux" [YP86]. Ceci se vérifie empiriquement sur une réalisation du processus comme le montre la figure 3.2.

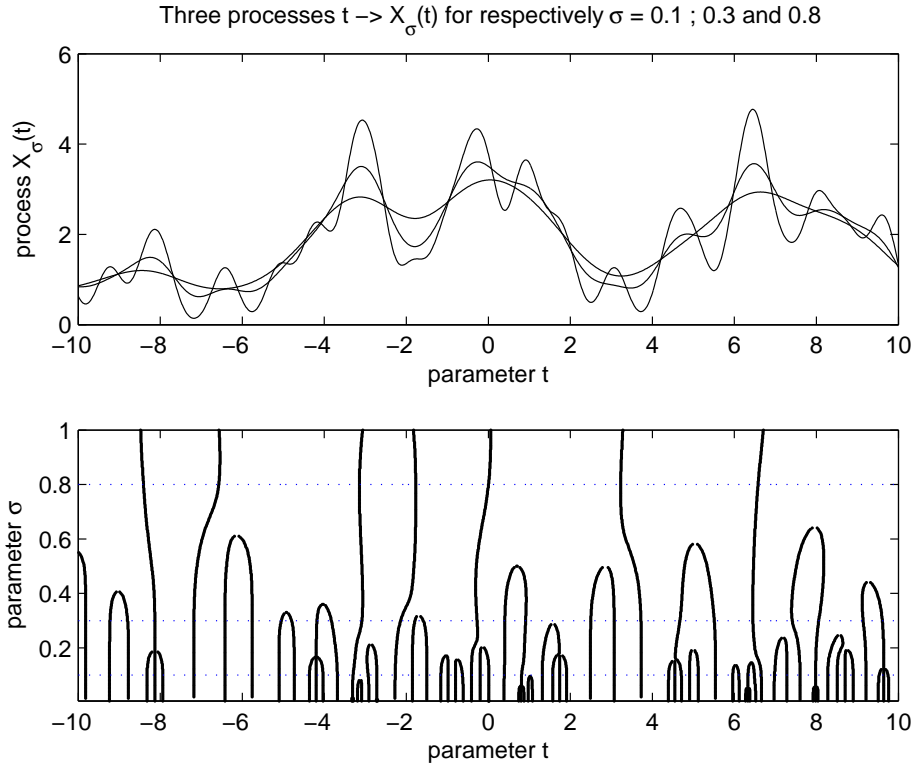


FIGURE 3.2 – Haut : trois processus $t \mapsto X_{\lambda, \sigma}(t)$ obtenu à partir du même processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2$ pour des noyaux gaussiens avec $\sigma = 0.1; 0.3$ et 0.8 . Bas : évolution des extremas locaux de $t \mapsto X_{\lambda, \sigma}(t)$ lorsque σ varie de 0 à 1. Les trois valeurs $\sigma = 0.1; 0.3$ et 0.8 sont indiquées en pointillé. Les points d'intersections correspondent aux positions des extremas locaux de chacun des trois processus.

On s'attend alors à ce que ρ soit une fonction décroissante en σ , comme le montre empiriquement la figure 3.1. On arrive à le démontrer théoriquement, en ajoutant une hypothèse qui nous permet de contrôler les extremas locaux sur les bords des domaines considérés.

Théorème 3.8. *Si $\mathbb{E}(\#\{\sigma \in [\sigma_1, \sigma_0] \text{ such that } X'_{\lambda, \sigma}(0) = 0\}) < +\infty$, pour tout $0 < \sigma_1 < \sigma_0$, alors la fonction $\sigma \mapsto \rho(\lambda, \sigma)$, est décroissante et a pour limite 2λ lorsque σ tend vers 0.*

Chapitre 4

Perspectives de recherches

4.1 Sur le chapitre 1

4.1.1 Optimalité des vitesses de convergence dans les théorèmes de Breuer-Major

Dans la section 1.3.2, nous avons déjà évoqué la possibilité d'obtenir une majoration de la vitesse de convergence dans les théorèmes de Breuer-Major en utilisant la majoration de la distance de Kolmogorov donnée par (1.15). Dans [NP09b], les auteurs montrent que dans un chaos de Wiener d'ordre fixé, cette majoration correspond à la racine carrée du cumulatif d'ordre 4. Ils obtiennent un premier critère d'optimalité qui donne la vitesse de convergence \sqrt{n} dans (ii) du théorème 1.2 lorsque l est pair et X_n est un bruit gaussien fractionnaire d'ordre $H < 1/2$. En collaboration avec Aline Bonami, Ivan Nourdin (IECN, Université de Nancy) et Giovanni Peccati (Luxembourg University), nous travaillons actuellement à des extensions de ce résultat dans les cas $H \geq 1/2$ et l impair qui sont plus difficiles à traiter.

4.1.2 Champs browniens fractionnaires et tests d'anisotropie

Jusqu'à présent, je me suis principalement intéressée à l'estimation de l'anisotropie des champs browniens fractionnaires anisotropes dont la densité spectrale est donnée par (1.6) au travers de la fonction h . Or, la fonction c joue également un rôle important comme le montre la figure 4.1.

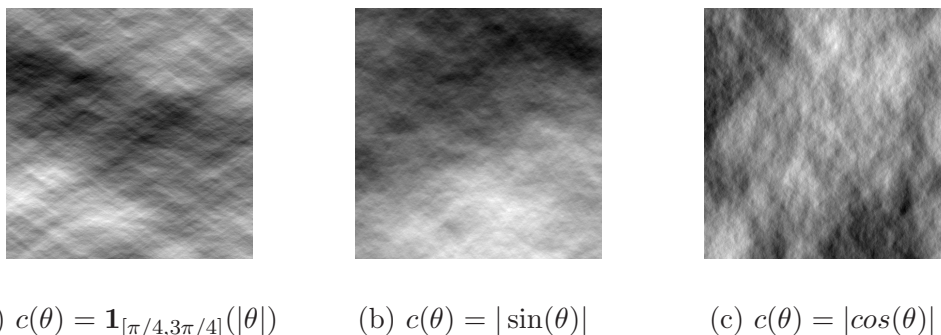


FIGURE 4.1 – Simulations approchées de champs browniens fractionnaires anisotropes pour $h(\theta) = 0.4$.

De plus, lorsque la fonction h est constante égale à $H \in (0, 1)$, le champ brownien fractionnaire anisotrope est autosimilaire d'ordre H et son variogramme est donné par $v(t) = C(t/|t|)|t|^{2H}$, avec

$$C(t) = \frac{\pi}{2H\Gamma(H)\sin(H\pi)} \int_{S^{d-1}} |t \cdot \theta|^{2H} c(\theta) d\theta,$$

appelée fonction de toposité. Dans le cadre du projet ANR MATAIM, en collaboration avec Aline Bonami (MAPMO, Université d'Orléans) et José R. León (UCV, Venezuela), nous travaillons sur l'estimation de la fonction c pour ces champs autosimilaires. Plusieurs auteurs se sont intéressés aux questions d'estimations liées à ces modèles. Ainsi dans [DH99] les auteurs proposent des estimateurs non biaisés du variogramme pour en déduire des estimateurs de H et C . D'autres types d'estimateurs ont également été étudiés dans [CW00]. Enfin, Jacques Istas a proposé un estimateur pour la fonction d'anisotropie c elle-même [Ist07]. Nous pensons améliorer les résultats existants, en allégeant les hypothèses de validité, grâce au point de vue développé dans [10]. Nous espérons également pouvoir établir des tests statistiques d'anisotropie, en utilisant les résultats de [5], en vue d'applications aux mammographies.

En effet, les résultats obtenus dans [8] semblent valider ce type de modèle pour les mammographies mais peu d'études ont pris en compte l'éventuelle anisotropie des images. On pourrait par exemple étudier l'influence de l'anisotropie sur la détectabilité des tumeurs en généralisant l'approche de [GM09].

4.1.3 Simulations

Je continue à m'intéresser aux problèmes de simulations de champs gaussiens sur une grille régulière. Les méthodes de synthèses exactes du type Choleski sont très coûteuses numériquement et donc inutilisables en pratique. Dans le cadre de champs stationnaires, les méthodes exactes de type matrice circulante [DN97], utilisant la structure Toeplitz de la matrice de covariance, sont plus rapides. Cependant, un flou demeure sur la positivité de la matrice de covariance à construire. On aboutit donc, dans la pratique, à des simulations approchées dont on ne peut calculer l'erreur d'approximation. Il semble plus pertinent de chercher à écrire les champs sous forme de séries aléatoires dont on calcule la vitesse de convergence.

On peut utiliser une discrétisation de l'intégrale stochastique qui représente le champ. Dans le cas d'une représentation harmonisable, on se ramène à une transformée de Fourier discrète rapide. Il faut cependant arriver à alléger les contraintes qui lient les paramètres d'approximation (troncature de l'intégrale, pas de la transformée de Fourier rapide et pas du champ simulé) et déterminer la vitesse de convergence de ces approximations.

Dans le cadre du projet ANR MATAIM, en collaboration avec Lionel Moisan (MAP5, Université Paris Descartes) et Frédéric Richard (MAP5, Université Paris Descartes), nous utilisons une méthode de type "bandes tournantes" [Bro85] pour simuler des champs browniens fractionnaires anisotropes dans [15]. Cette méthode consiste à simuler un champ aléatoire en dimension 2 à partir de la simulation d'un certain nombre de processus en dimension 1. Nous utilisons alors les méthodes de matrices circulantes en dimension 1 qui s'avèrent exactes pour la simulation de mouvements browniens fractionnaires [PHJI02].

4.1.4 Apport des transformées de Radon : modélisation et analyse de texture

Les transformées de Radon apparaissent non seulement comme un outil d'analyse de champs anisotropes mais aussi comme un moyen de modélisation du procédé de radiographie. Cependant de nombreux problèmes numériques et théoriques restent ouverts.

En effet, nous devons faire face à plusieurs difficultés numériques pour l'utilisation de transformées de Radon à fenêtre lors de l'estimation par variations quadratiques. Il y a tout d'abord le problème engendré par les différentes directions de la transformée de Radon. Lorsque on dispose d'une réalisation d'un champ aléatoire sur une grille, le pas et le nombre de points varient selon les directions. C'est pour cette raison que nous nous sommes principalement limités aux directions horizontales et

verticales. Pour éviter cet écueil on pourrait par exemple s'inspirer des travaux de [ACD⁺08] sur la discrétisation des transformées de Radon mais cela nécessiterait d'adapter tous les résultats obtenus dans le cadre continu.

Nous cherchons également à améliorer l'estimation en jouant sur les fenêtres, ce qui amène à une comparaison avec l'utilisation des ridgelets [Can03] et fut à l'origine du sujet de stage proposé à Gilles Drigout.

En ce qui concerne l'analyse de l'anisotropie, je me suis limitée jusqu'à présent à l'étude de la régularité des champs aléatoires à densité spectrale donnée par le comportement asymptotique en loi de puissance aux hautes fréquences de la densité spectrale. J'aimerais également considérer des phénomènes de dépendance à longue portée. Ces phénomènes sont alors déterminés par la singularité au voisinage de zéro de la densité spectrale. Lorsque cette singularité est portée le long d'une droite, comme étudiée par [Lav07], on peut penser que la transformée de Radon du champ dans cette direction va avoir un comportement tout à fait différent des autres directions. Cette transformation pourrait donc aussi être utile pour mettre en évidence ces phénomènes. On peut aussi envisager de moyennner sur des objets géométriques différents, en remplaçant les lignes par des courbes ou même par des variétés spécifiques comme des cercles [AKQ07], liées aux invariants du modèle considéré.

Enfin, à plus long terme, j'aimerais reprendre mes travaux théoriques sur les transformées de Radon, effectués au cours de ma thèse. En effet, l'étude fine du processus de radiographie montre qu'il faut faire appel à des transformées de Radon à poids d'un type différent. Les transformées de Radon atténuées ont fait l'objet d'un intérêt considérable ces dernières années. De nombreux problèmes d'injectivité et d'inversion restent ouverts. Ainsi, en 1998, Arbuzov, Bukgheim et Kazantsev [ABK98] ont démontré des résultats d'injectivité sur les transformées de Radon atténuées en dimension 2, en s'appuyant sur la théorie des fonctions A-analytiques. Cette méthode permet d'en dériver des formules d'inversion mais pas de formule explicite. C'est en 2000 que Novikov [Nov00] a établi une formule explicite sous des conditions sur l'atténuation, affaiblies par Boman et Stromberg [BS04]. Ces résultats sont spécifiques à la dimension 2 et utilisent en particulier l'identification du plan avec le plan complexe et la théorie des fonctions holomorphes. La généralisation de ces résultats à des dimensions supérieures reste un problème ouvert.

Les transformées de Radon interviennent également en imagerie 3D lors de l'analyse de tomosynthèses numériques obtenues par reconstruction tomographique à partir de projections radiographiques réalisées dans différentes directions. Celles-ci peuvent donc permettre de comparer des indices de textures du matériau 3D avec ceux de ses radiographies 2D.

4.2 Sur le chapitre 2

4.2.1 L'autosimilarité matricielle pour révéler l'anisotropie

A la différence de la notion d'autosimilarité (1.4), la notion d'autosimilarité matricielle (2.2) permet de révéler une anisotropie des modèles considérés en la décrivant au travers d'une seule matrice E de taille d et donc d'un nombre limité de paramètres. Jusqu'à présent, peu de travaux ont pris en compte une éventuelle anisotropie des modèles et les généralisations plus réalistes des modèles autosimilaires ont souvent gardé une certaine isotropie, pouvant être déduite des propriétés d'autosimilarités asymptotiques locales (1.5). Ainsi, de nombreux modèles comme le champ brownien multifractionnaire [PLV96, BJR97] ou le *real harmonizable (multi)-fractional Lévy motion* [BCI02, Lac04] peuvent être approchés localement par des champs browniens fractionnaires.

En fait, Falconer a démontré dans [Fal02] que lorsque un champ X satisfait la propriété lass d'ordre $H(t)$ en tout point t alors, pour presque tout t les processus lignes du champ tangent $L_\theta Z_t$

sont des processus à accroissements stationnaires autosimilaires d'ordre $H(t)$, dès que le champ X est à trajectoires continues p.s. En particulier, dans le cas où X est gaussien ce sont des mouvements browniens fractionnaires. Il serait intéressant de voir comment ce travail peut se généraliser à la propriété d'autosimilarité matricielle asymptotique locale (2.12) qui permet d'élargir la classe des modèles de champs tangents en incluant les champs à autosimilarité matricielle.

Cependant, tout comme l'autosimilarité en dimension $d \geq 2$, l'autosimilarité matricielle ne suffit pas à elle seule à caractériser la loi d'un champ même gaussien. Une étude approfondie des invariants de ces champs [KR03] permettrait peut-être une telle caractérisation pour ainsi établir un lien plus clair entre les représentations gaussiennes moyennes mobiles et harmonisables.

D'autre part, il serait également intéressant d'obtenir une sorte de transformation de Lamperti qui établit une correspondance entre les processus autosimilaires et les processus stationnaires et qui a été généralisée pour des draps fractionnaires dans [GPT07].

4.2.2 Les problèmes de simulations et d'estimations dans le cas gaussien

Comme indiqué dans la section 2.5, les champs gaussiens à autosimilarité matricielle semblent une bonne alternative au modèle du champ brownien fractionnaire anisotrope pour la modélisation de radiographies d'os du calcaneum. Ils sont également utilisés dans la modélisation des surfaces de failles de fractures tectoniques qui présentent des phénomènes de stries [CRB⁺09, BGS⁺11].

Dès lors que l'on cherche à valider un modèle théorique, on souhaite le comparer aux données réelles sur des simulations. Nous avons déjà abordé les problèmes rencontrés pour la simulation de champs browniens fractionnaires anisotropes dans la section 4.1.3 qui subsistent pour les champs gaussiens à autosimilarité matricielle. Nous utilisons pour l'instant, des simulations approchées obtenues par la même méthode spectrale que celle utilisée dans [5], également utilisée dans les travaux d'applications [CRB⁺09, BGS⁺11]. Si on souhaite utiliser cette méthode pour valider les modèles il est nécessaire d'en connaître l'erreur d'approximation. On peut également valider les simulations en utilisant des estimateurs des modèles.

En collaboration avec Alexandre Brouste (Université du Maine), Céline Lacaux (IECN, École des Mines de Nancy), et Mark Meerschaert (University of Michigan, USA), nous nous intéressons à la question de l'estimation de la matrice d'autosimilarité E . Comme abordé dans [P3], les résultats de régularité directionnelle obtenus dans le cas gaussien vont permettre une estimation des valeurs propres de la matrice lorsque celle-ci est diagonalisable, en considérant les variations quadratiques du champ le long des droites dirigées par les vecteurs propres de la matrice. Il reste alors à déterminer ces vecteurs propres pour identifier la matrice E . De tels résultats sont indispensables pour poursuivre notre comparaison avec les radiographies d'os dans le cadre du projet ANR MATAIM. Ce problème difficile pourrait avoir des rapprochements avec [CGPP05] où un problème similaire a été étudié pour le drap brownien fractionnaire. Nous avons également évoqué d'autres pistes de réflexion avec Mark Meerschaert lors de mon séjour au Michigan en 2007, sur lesquelles nous travaillons actuellement avec Céline Lacaux.

4.2.3 Le passage du gaussien au stable

Le cadre des champs gaussiens à autosimilarité matricielle permet d'utiliser de nombreux résultats et outils des travaux de Yimin Xiao concernant les propriétés fines des trajectoires de champs gaussiens [Xia09] : dimensions de Hausdorff des ensembles de niveaux, existence et propriétés des temps

locaux,...

En collaboration avec Céline Lacaux nous nous intéressons actuellement à des généralisations de ce type de résultats pour des champs α -stables harmonisables à autosimilarité matricielle ou plus généralement pour des champs conditionnellement gaussiens obtenus en utilisant des séries de Lévy comme dans [6,14]. Un tel cadre pourrait également permettre de considérer des généralisations multi-stables [FLGLV09].

Enfin, les problèmes de simulations et d'estimation évoqués précédemment dans le cas gaussien sont encore d'actualité dans le cas α -stable. Lorsque on considère des modèles non-gaussiens, il faut développer de nouvelles méthodes d'estimation qui pourraient faire l'objet d'un travail à plus long terme. Etant donné les résultats de régularité analogues au cas gaussien pour les champs α -stable harmonisables à autosimilarité matricielle, on peut en effet espérer déterminer un estimateur de la matrice, soit par des méthodes d'ondelettes, soit en considérant dans ce cas les p -variations du champ, pour $p < \alpha$.

4.3 Sur le chapitre 3

4.3.1 Topographie des champs shot noise

En collaboration avec Agnès Desolneux (MAP5, Université Paris Descartes) nous souhaitons poursuivre notre étude de la topographie de modèles shot noise. En particulier, la suite naturelle de nos travaux concerne l'étude de ces modèles pour des images c'est à dire en dimension $d = 2$. Il serait in-

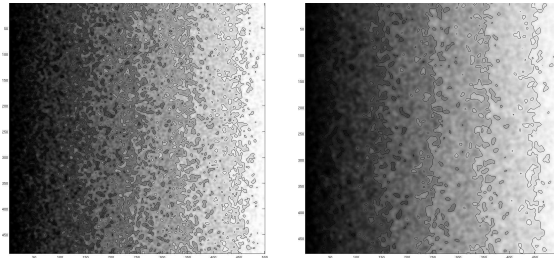


FIGURE 4.2 – Gauche : une image et quelques lignes de niveaux d'un modèle shot noise 2d avec noyau gaussien de largeur $\sigma = 2$. Droite : même processus avec noyau gaussien de largeur $\sigma = 3$.

intéressant d'obtenir des résultats dans le cadre général des champs à variations bornées comme étudiés par Bruno Galerne [Gal10]. De plus, lorsque le champ aléatoire est régulier, ses ensembles de niveaux ne sont plus des points isolés, comme c'était le cas en dimension $d = 1$, mais sont alors des courbes, appelées lignes de niveaux.

On peut s'intéresser à la géométrie de ces lignes de niveaux : longueur, largeur statistique, courbure, en utilisant la théorie de la mesure géométrique [EG92]. Un certain nombre de résultats sont connus pour des champs aléatoires [Adl81, AW09] mais tout comme en dimension $d = 1$, les hypothèses de validité sont souvent difficiles à vérifier et les formules ne sont pas forcément très exploitables en dehors du cadre gaussien. On peut tout de même essayer de les utiliser en approchant le modèle shot noise par un modèle gaussien pour des grandes intensités λ .

Nous souhaitons également regarder des modèles non stationnaires obtenus en prenant un gradient d'intensité à la place de l'intensité λds sur \mathbb{R}^2 . L'intérêt d'un tel choix réside dans le fait

qu'il permet de visualiser globalement la géométrie des lignes de niveaux en fonction des valeurs de λ . Les lignes du niveau $\alpha \in \mathbb{R}$ correspondent à la frontière de l'ensemble aléatoire $S_\alpha X^{-1}(\{1\})$ où $S_\alpha X = \{\mathbf{1}_{X(t) \geq \alpha}; t \in \mathbb{R}^d\}$ est le champ seuillé au niveau α . On est alors amené à étudier des questions classiques en percolation continue [MS83] : existe-t-il une ligne de niveau de longueur infinie et si oui est-elle unique. Comment la caractériser ? Quelle est la dépendance avec le niveau α et l'intensité λ ? La plupart des résultats connus jusqu'à présent le sont dans le cadre stationnaire.

Enfin, de nombreux problèmes statistiques émergent de l'étude de ces modèles. On peut par exemple se demander comment estimer l'intensité λ ou le noyau g d'un champ shot noise stationnaire ?

4.3.2 Étude du champ de Poisson fractionnaire

Dans [16], en collaboration avec Yann Demichel (Modal'X, Université Nanterre Paris Ouest) et Anne Estrade (MAP5, Université Paris Descartes), nous nous intéressons aux propriétés du champ de Poisson fractionnaire P_H introduit dans [9], sur des ensembles finis. Cette étude a débuté par une étude numérique, lors du post-doctorat de Yann Demichel au sein du projet MIPOMODIM en 2008-2009. La représentation (3.14) sous forme d'une différence de deux champs de type Chentsov [ST94] permet d'étudier les lois fini-dimensionnelles de P_H . Du fait de sa non-gaussianité, bien qu'auto-similaire au second ordre, P_H ne vérifie aucune autosimilarité en loi ce qui n'est pas surprenant vu le théorème 3.1. On peut même montrer qu'il vérifie une sorte de multifractalité statistique puisque son exposant [Lud09] est donné par $\zeta(q) = 2H$ pour les petites échelles et $q \geq 2$.

La simulation de ce modèle sur une grille peut se faire de manière exacte en étudiant précisément les contributions de chacune des boules mais il faut alors simuler des lois conditionnelles. Des simulations approchées peuvent être obtenues en tronquant la mesure ν_H pour avoir une mesure finie, on conserve alors uniquement une autosimilarité pour certaines échelles.

D'un point de vue théorique, on peut utiliser l'autosimilarité au second ordre pour construire un estimateur p.s. de H en considérant les variations quadratiques de P_H données par (1.11) pour $\mathbf{a} = (1, -1)$. Une des difficultés est alors de calculer la variance des variations quadratiques mais celle-ci peut s'estimer en utilisant la représentation sous forme d'intégrale stochastique et en se plaçant dans des chaos poissoniens [PT08].

Un autre point de vue que je souhaite aborder prochainement, consiste à étudier les propriétés d'ergodicité du champ aléatoire. En effet, les propriétés d'ergodicité, de faible mélange ou de mélange sont liées à la notion d'indépendance asymptotique et peuvent permettre la construction d'estimateurs p.s. des paramètres des modèles au vue d'une réalisation. Plusieurs résultats ont été établis en dimension 1 pour des processus infiniment divisibles dont font partie les processus obtenus sous forme d'une intégrale stochastique par rapport à une mesure de Poisson. Dans [RŽ97], les auteurs montrent l'équivalence entre le faible mélange et l'ergodicité. Plus récemment, une décomposition en une somme indépendante d'un processus non ergodique et d'un processus faiblement mélangeant est obtenue dans [Roy07]. Parthanil Roy (University of Michigan, USA) a considéré des questions similaires pour des champs stationnaires symétriques α -stables [WRS09]. Avec Anne Estrade, nous pensons obtenir des généralisations de ces résultats en dimension $d \geq 2$, en travaillant avec lui lors de son séjour invité au MAP5 en 2011.

4.3.3 Interprétation géométrique, champs de Chentsov et anisotropie

Les champs de Chentsov [ST94] sont construits à partir d'une mesure aléatoire infiniment divisible (stable, Gaussienne ou Poisson) et d'une famille d'ensembles indexés par les points de \mathbb{R}^d . Ils peuvent

être vus comme des extensions des processus de Lévy. En effet, en considérant des processus de Lévy indexés par des ensembles, dont certaines conditions d'existence sont données dans [BP84], on cherche à remplacer les intervalles de la droite réelle de façon pertinente. Une façon d'obtenir un champ de Lévy à accroissements stationnaires et isotrope est de remplacer les intervalles par des boules comme le fait Shieh dans [Shi95]. Les restrictions de ce champ, appelé champ de Lévy-Chentsov, le long des droites passant par l'origine sont alors des processus de Lévy. On peut également définir un champ de Lévy, appelé drap de Lévy, en remplaçant les intervalles par des rectangles comme considéré dans [AMSW83]. Ce champ est à accroissements rectangles indépendants mais n'est pas à accroissements stationnaires. Sa construction fait jouer un rôle particulier aux axes et il n'est donc pas isotrope.

Tous les travaux présentés en choisissant des boules euclidiennes peuvent donc se généraliser pour obtenir des modèles anisotropes, spatialement corrélés, en remplaçant les boules par d'autres convexes ou simplexes de dimension k [Dep05]. Ce type de construction peut notamment servir à exhiber des fonctions de covariance ou caractériser certains champs fractionnaires en limite [Mar10].

D'autre part, des généralisations de ces modèles peuvent s'obtenir en remplaçant la mesure de Poisson par une autre mesure aléatoire infiniment divisible. Certains de ces modèles peuvent alors être reliés aux cascades infiniment divisibles multi-dimensionnelles comme introduites dans [Cha05] dans le contexte de la modélisation de la turbulence.

Bibliographie

- [ABK98] E. V. ARBUZOV, A. L. BUKGHEIM et S. G. KAZANTSEV – « Two dimensional tomography problems and the theory of A-analytic functions », *Siberian Adv. Math.* **8** (1998), p. 1–20.
- [ACD⁺08] A. AVERBUCH, R. R. COIFMAN, D. L. DONOHO, M. ISRAELI, Y. SHKOLNISKY et I. SEDELNIKOV – « A framework for discrete integral transformations. II. The 2D discrete Radon transform », *SIAM J. Sci. Comput.* **30** (2008), no. 2, p. 785–803.
- [Adl81] R. J. ADLER – *The Geometry of Random Field*, John Wiley & Sons, 1981.
- [AGF95] P. ABRY, P. GONÇALVÈS et P. FLANDRIN – « Wavelets, spectrum analysis and 1/f processes », *Wavelets and statistics*, A. Antoniadis, G. Oppenheim, eds., *Lecture Notes in Statistics*, Springer-Verlag, 1995, p. 15–30.
- [AKQ07] M. AGRANOVSKY, P. KUCHMENT et E. T. QUINTO – « Range descriptions for the spherical mean Radon transform », *J. Funct. Anal.* **248** (2007), no. 2, p. 344–386.
- [AMSW83] R. J. ADLER, D. MONRAD, R. H. SCISSORS et R. WILSON – « Representations, decompositions and sample function continuity of random field with independent increments », *Stochastic Process. Appl.* **15** (1983), p. 3–30.
- [AW09] J.-M. AZAÏS et M. WSCHEBOR – *Level sets and extrema of random processes and fields*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, 2009.
- [Aya02] A. AYACHE – « The generalized multifractional field : a nice tool for the study of the generalized multifractional Brownian motion », *J. Fourier Anal. Appl.* **8** (2002), no. 6, p. 581–601.
- [BB01] F. BACCELLI et B. BŁASZCZYSZYN – « On a coverage process ranging from the Boolean model to the Poisson-Voronoi tessellation with applications to wireless communications », *Adv. in Appl. Probab.* **33** (2001), no. 2, p. 293–323.
- [BC10] E. I. BROMAN et F. CAMIA – « Universal behavior of connectivity properties in fractal percolation models », *Electron. J. Probab.* **15** (2010), p. 1394–1414.
- [BCI02] A. BENASSI, S. COHEN et J. ISTAS – « Identification and properties of real harmonizable fractional Lévy motions », *Bernoulli* **8** (2002), no. 1, p. 97–115.
- [BD09] J.-C. BRETON et C. DOMBRY – « Rescaled weighted random ball models and stable self-similar random fields », *Stochastic Process. Appl.* **119** (2009), no. 10, p. 3633–3652.
- [BE03] A. BONAMI et A. ESTRADE – « Anisotropic analysis of some Gaussian models », *J. Fourier Anal. Appl.* **9** (2003), no. 3, p. 215–236.
- [Beg07] A. BEGYN – « Asymptotic expansion and central limit theorem for quadratic variations of Gaussian processes », *Bernoulli* **13** (2007), no. 3, p. 712–753.
- [Ber94] J. BERAN – *Statistics for long-memory processes*, Chapman Hall London, 1994.
- [BGS⁺11] A. BISTACCHI, W. GRIFFITH, S. SMITH, G. DI TORO, R. JONES et S. NIELSEN – *Fault Roughness at Seismogenic Depths from LIDAR and Photogrammetric Analysis*, 2011, online first.

- [BJJ01] A. BURGESS, F. JACOBSON et P. JUDY – « Human observer detection experiments with mammograms and power-law noise », *Med. Phys.* **28** (2001), no. 4, p. 419–437.
- [BJR97] A. BENASSI, S. JAFFARD et D. ROUX – « Elliptic Gaussian random processes », *Rev. Mathem. Iberoamericana* **13** (1997), no. 1, p. 19–89.
- [BL09] N. BETROUNI et R. LOPES – « Fractal and multifractal analysis : A review », *Medical Image Analysis* **13** (2009), p. 634–649.
- [BLO⁺03] J. M. BARDET, G. LANG, G. OPPENHEIM, A. PHILIPPE, S. STOEV et M. S. TAQQU – « Semi-parametric estimation of the long-range dependence parameter : a survey », *Theory and applications of long-range dependence*, Birkhäuser Boston, 2003, p. 557–577.
- [BM83] P. BREUER et P. MAJOR – « Central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields », *J. Multivariate Anal.* **13** (1983), no. 3, p. 425–441.
- [BM02] J. BARRAL et B. B. MANDELBROT – « Multifractal products of cylindrical pulses », *Probab. Theory Related Fields* **124** (2002), no. 3, p. 409–430.
- [BMBS06] D. BENSON, M. M. MEERSCHAERT, B. BÄUMER et H. P. SCHEFFLER – « Aquifer operator-scaling and the effect on solute mixing and dispersion », *Water Resour. Res.* **42** (2006), p. 1–18.
- [BP84] F. BASS et R. PYKE – « The existence of Set-Indexed Lévy Processes », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **66** (1984), p. 157–172.
- [BPL⁺01] C. L. BENHAMOU, S. POUPON, E. LESPESSAILLES, S. LOISEAU, R. JENNANE, V. SIROUX, W. OHLEY et L. POTHUAUD – « Fractal Analysis of radiographic Trabecular Bone Texture and Bone Mineral Density : Two Complementary Parameters Related to Osteoporotic Fractures », *Journal of bone and mineral research* **16** (2001), no. 4, p. 697–704.
- [Bro85] P. I. BROOKER – « Two-dimensional simulation by turning bands », *J. Internat. Assoc. Math. Geol.* **17** (1985), no. 1, p. 81–90.
- [BS04] J. BOMAN et J. O. STRÖMBERG – « Novikov’s inversion formula for the attenuated Radon Transform : a new approach », *J. Geom. Anal.* **14** (2004), no. 2, p. 185–198.
- [Can03] E. J. CANDÈS – « Ridgelets : estimating with ridge functions », *Ann. Statist.* **31** (2003), no. 5, p. 1561–1599.
- [CF97] R. CHOSKI et I. FONSECA – « A change of variables formula for mappings in BV », *Proceedings of the American Mathematical Society* **125** (1997), no. 7, p. 2065–2072.
- [CGM95] R. CIOSEK-GEORGES et B. B. MANDELBROT – « A class of micropulses and antipersistent fractional Brownian motion », *Stochastic Process. Appl.* **60** (1995), p. 1–18.
- [CGPP05] S. COHEN, X. GUYON, O. PERRIN et M. PONTIER – *Singularity functions for fractional processes, and application to fractional Brownian sheet*, 2005, to appear in *Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Stat.*
- [Cha05] P. CHAINAIS – « Multi-dimensional infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images », *Proc. of ICIP 2005, Genova, Italy* (2005).
- [CL04] H. CRAMÉR et M. R. LEADBETTER – *Stationary and related stochastic processes*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004, Sample function properties and their applications, Reprint of the 1967 original.
- [CLL07] C. COHEN, C. LACAUX et M. LEDOUX – « A general framework for simulation of fractional fields », *Stochastic Process. Appl.* **118** (2007), p. 1489–1517.
- [Coe00] J. F. COEURJOLLY – « Inférence statistique pour les mouvements browniens fractionnaires et multifractionnaires », Thèse, Université Joseph Fourier, 2000.

- [CRB⁺09] T. CANDELA, F. RENARD, M. BOUCHON, A. BROUSTE, D. MARSAN, J. SCHMITTBUHL et C. VOISIN – « Characterization of Fault Roughness at Various Scales : Implications of Three-Dimensional High Resolution Topography Measurements », *Pure and Applied Geophysics* **166** (2009), no. 10-11, p. 1817–1851.
- [CV11] M. CLAUSEL et B. VEDEL – « Explicit constructions of operator scaling Gaussian fields, », *Fractals* **19** (2011), no. 1, p. 101–1011.
- [CW00] G. CHAN et A. T. A. WOOD – « Increment-based estimators of fractal dimension for two-dimensional surface data », *Statist. Sinica* **10** (2000), no. 2, p. 343–376.
- [Dal71] D. J. DALEY – « The definition of a multi-dimensional generalization of shot noise », *Journal of Applied Probability* **8** (1971), no. 1, p. 128–135.
- [Dep05] J. DEPAUW – *Fractional Brownian Lévy’s field of degree k in dimension n* , 2005, Preprint.
- [DH99] S. DAVIES et P. HALL – « Fractal analysis of surface roughness by using spatial data », *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **61** (1999), p. 3–37.
- [DN97] C. R. DIETRICH et G. N. NEWSAM – « Fast and exact simulation of stationary gaussian processes through circulant embedding of the covariance matrix », *SIAM J. Sci. Comput.* **18** (1997), no. 4, p. 1088–1107.
- [Dob79] R. L. DOBRUSHIN – « Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields », *Ann. Probab.* **7** (1979), no. 1, p. 1–28.
- [EG92] L. C. EVANS et R. F. GARIEPY – *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [EH78] Y. EL HELOU – « Recouvrement du tore \mathbb{T}^q par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l’ensemble non recouvert », *Publications Mathématiques d’Orsay* **9** (1978).
- [Fal90] K. J. FALCONER – *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, 1990.
- [Fal02] K. J. FALCONER – « Tangent fields and the local structure of random fields », *J. Theoret. Probab.* **15** (2002), no. 3, p. 731–750.
- [Fel66] W. FELLER – *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.
- [FLGLV09] K. J. FALCONER, R. LE GUÉVEL et J. LEVY VEHEL – « Localisable moving average symmetric stable and multistable processes », *Stochastic Models* **25** (2009), p. 648–672.
- [Gal10] B. GALERNE – « Stochastic Image Models and Texture Synthesis », Thèse, CMLA, ENS de Cachan, http://dev.ipol.im/~galerie/galerie_thesis_final.pdf, 2010.
- [GM09] B. GROSJEAN et L. MOISAN – « A-contrario detectability of spots in textured backgrounds », *J. Math. Imaging Vision* **33** (2009), no. 3, p. 313–337.
- [Gou08] J.-B. GOUÉRE – « Subcritical regimes in the Poisson Boolean model of continuum percolation », *Ann. Probab.* **36** (2008), no. 4, p. 1209–1220.
- [GPT07] M. GENTON, O. PERRIN et M. TAQQU – « Self-similarity and Lamperti transformation for random fields », *Stochastic Models* **23** (2007), p. 397–411.
- [GV67] I. M. GUELFAND et N. Y. VILENKIN – *Les Distributions : Applications de l’Analyse Harmonique*, no. 4, Dunod, 1967.
- [Hal88] P. HALL – *Introduction to the theory of coverage processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- [Han67] E. J. HANNAN – *Time series analysis*, Chapman & Hall/CRC, 1967.
- [HDV⁺99] J. HEINE, S. DEINE, R. VELTHUIZEN et al. – « On the statistical nature of mammograms », *Med. Phys.* **26** (1999), no. 11, p. 2254–2269.

- [Her06] E. HERBIN – « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions », *Rocky Mountain J. Math.* **36** (2006), no. 4, p. 1249–1284.
- [HJJ⁺94] R. HARBA, G. JACQUET, R. JENNANE, T. LOUSSOT, C. L. BENHAMOU, E. LESPESAILLES et D. TOURLIÈRE – « Determination of fractal scales on trabecular bone X-ray images », *Fractals* **2** (1994), no. 3, p. 451–456.
- [HS85] L. HEINRICH et V. SCHMIDT – « Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence », *Advances in Applied Probability* **17** (1985), no. 4, p. 709–730.
- [Hsi87] T. HSING – « On the intensity of crossings by a shot noise process », *Adv. Appl. Prob.* **19** (1987), p. 743–745.
- [HV02] J. HEINE et R. VELTHUIZEN – « Spectral analysis of full field digital mammography data », *Med. Phys.* **29** (2002), no. 5, p. 647–661.
- [IL97] J. ISTAS et G. LANG – « Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process », *Ann. Inst. Henri Poincaré, Prob. Stat.* **33** (1997), no. 4, p. 407–436.
- [Ist07] J. ISTAS – « Identifying the anisotropical function of a d -dimensional Gaussian self-similar process with stationary increments », *Stat. Inference Stoch. Process.* **10** (2007), no. 1, p. 97–106.
- [Kal02] O. KALLENBERG – *Foundations of modern probability*, second éd., Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 2002.
- [KL00] M. F. KRATZ et J. R. LEÓN – « Central limit theorems for the number of maxima and an estimator of the second spectral moment of a stationary Gaussian process, with application to hydroscience », *Extremes* **3** (2000), no. 1, p. 57–86 (2001).
- [KL10] —, « Level curves crossings and applications for Gaussian models », *Extremes* **13** (2010), no. 3, p. 315–351.
- [KLNS07] I. KAJ, L. LESKELÄ, I. NORROS et V. SCHMIDT – « Scaling limits for random fields with long-range dependence », *Ann. Probab.* **35** (2007), no. 2, p. 528–550.
- [KLSJA01] P. KESTENER, J. M. LINA, P. SAINT-JEAN et A. ARNEODO – « Wavelet-based multifractal formalism to assist in diagnosis in digitized mammograms », *Image Anal. Stereol* **10** (2001), p. 169–174.
- [KM91] N. KONO et M. MAEJIMA – « Hölder continuity of sample paths of some self-similar stable processes », *Tokyo J. Math.* **14** (1991), no. 1, p. 93–100.
- [KR03] S. KOŁODYŃSKI et J. ROSIŃSKI – « Group self-similar stable processes in \mathbb{R}^d », *J. Theoret. Probab.* **16** (2003), no. 4, p. 855–876 (2004).
- [KSS09] W. KARCHER, H. SCHEFFLER et E. SPODAREV – *Efficient Simulation of stable random fields and its applications*, 2009, V.Capasso et al. (Eds.) Stereology and Image Analysis. Ecs10 : Proceedings of The 10th European Congress of ISS, The MIRIAM Project Series.
- [KT08] I. KAJ et M. S. TAQQU – « Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process : the integral representation approach », In and out of equilibrium. 2, Progr. Probab., vol. 60, Birkhäuser, Basel, 2008, p. 383–427.
- [KW97] J. T. KENT et A. T. A. WOOD – « Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process by using increments », *J. R. Stat. Soc. Ser. B* **59** (1997), p. 679–699.
- [Lac04] C. LACAUX – « Real harmonizable multifractional Lévy motions », *Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Stat.* **40** (2004), p. 259–277.
- [Lav07] F. LAVANCIER – « Invariance principles for non-isotropic long memory random fields », *Stat. Inference Stoch. Process.* **10** (2007), no. 3, p. 255–282.

- [Lea66] M. R. LEADBETTER – « On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes », *Annals of Mathematical Statistics* **37** (1966), p. 260–267.
- [LeP89] R. LEPAGE – « Conditional moments for coordinates of stable vectors », *Probability theory on vector spaces, IV* (Łańcut, 1987), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1391, Springer, Berlin, 1989, p. 148–163.
- [LH57] M. S. LONGUET-HIGGINS – « The statistical analysis of a random, moving surface », *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A.* **249** (1957), p. 321–387.
- [LL01] E. H. LIEB et M. LOSS – *Analysis (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society, 2001.
- [LOKS86] T. LUNDAHL, W. OHLEY, S. KAY et R. SIFFE – « Fractional brownian motion : a maximum likelihood estimator and its application to image texture », *IEEE Trans. on Medical Images* **5** (1986), no. 3, p. 152–161.
- [LS85] S. LOVEJOY et D. SCHERTZER – « Generalized scale invariance in the atmosphere and fractal models of rain », *Water Resour. Res.* **21** (1985), no. 8, p. 1233–1250.
- [LT89] S. B. LOWEN et M. C. TEICH – « Fractal shot noise », *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989), no. 17, p. 1755–1759.
- [Lud09] C. LUDEÑA – « Confidence intervals for the scaling function of multifractal random walks », *Statist. Probab. Lett.* **79** (2009), no. 9, p. 1186–1193.
- [Man72] B. B. MANDELBROT – « Renewal sets and random cutouts », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **22** (1972), p. 145–157.
- [Mar10] M. MAROUBY – « Trois études de processus fractionnaires », Thèse, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, http://thesesups.ups-tlse.fr/946/1/Marouby_Matthieu.pdf, 2010.
- [MP87] D. MONRAD et L. D. PITT – « Local nondeterminism and Hausdorff dimension », *Seminar on stochastic processes, 1986* (Charlottesville, Va., 1986), *Progr. Probab. Statist.*, vol. 13, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, p. 163–189.
- [MPV01] M. V. MENSHIKOV, S. Y. POPOV et M. VACHKOVSKAIA – « On the connectivity properties of the complementary set in fractal percolation models », *Probab. Theory Related Fields* **119** (2001), no. 2, p. 176–186.
- [MR96] R. MEESTER et R. ROY – *Continuum percolation*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [MS83] S. A. MOLCHANOV et A. K. STEPANOV – « Percolation in random fields. II », *Theoret. and Math. Phys.* **55** (1983), no. 3, p. 592–599.
- [MS01] M. M. MEERSCHAERT et H. P. SCHEFFLER – *Limit distributions for Sums of Independent Random Vectors : Heavy Tails in Theory and Practice*, Wiley Interscience, New York, 2001.
- [MVN68] B. B. MANDELBROT et J. VAN NESS – « Fractional Brownian motion, fractionnal noises and applications », *Siam Review* **10** (1968), p. 422–437.
- [NOL08] D. NUALART et S. ORTIZ-LATORRE – « Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus », *Stochastic Process. Appl.* **118** (2008), no. 4, p. 614–628.
- [Nov00] R. G. NOVIKOV – « An inversion formula for the attenuated X-ray transformation », *Ark. Mat.* **40** (2000), p. 145–167.
- [NP09a] I. NOURDIN et G. PECCATI – « Stein’s method meets Malliavin calculus : a short survey with new estimates », *Recent advances in stochastic dynamics and stochastic analysis*, World Scientific, 2009.
- [NP09b] I. NOURDIN et G. PECCATI – « Stein’s method and exact Berry-Esseen asymptotics for functionals of Gaussian fields », *Ann. Probab.* **37** (2009), no. 6, p. 2231–2261.

- [NPP] I. NOURDIN, G. PECCATI et M. PODOLSKIJ – « Quantitative Breuer-Major Theorems », *Stochastic Process. Appl.* **121**.
- [Nua06] D. NUALART – *The Malliavin Calculus and Related Topics (2nd edition)*, Springer, Berlin, 2006.
- [OB83] E. ORSINGER et F. BATTAGLIA – « Probability distributions and level crossings of shot noise models », *Stochastics* **8** (1982/83), no. 1, p. 45–61.
- [Pap71] A. PAPOULIS – « High density shot noise and Gaussianity », *Journal of Applied Probability* **8** (1971), p. 118–127.
- [PBA⁺06] L. PONSON, D. BONAMY, H. AURADOU, G. MOUROT, S. MOREL, E. BOUCHAUD, C. GUILLOT et J. HULIN – « Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces », *International Journal of Fracture* **140** (2006), p. 27–37.
- [PHJI02] E. PERRIN, R. HARBA, R. JENNANE et I. IRIBARREN – « Fast and Exact Synthesis for 1-D Fractional Brownian Motion and Fractional Gaussian Noises », *IEEE Signal Processing Letters* **9** (2002), no. 11, p. 382–384.
- [PLV96] R. F. PELTIER et J. LEVY VEHEL – « Multifractional Brownian motion : definition and preliminary results », Tech. report, INRIA, <http://www-syntim.inria.fr/fractales/>, 1996.
- [PT04] G. PECCATI et C. TUDOR – « Gaussian limits for vector-valued multiple stochastic integrals », *Séminaire de Probabilités XXXVIII* (2004), p. 247–262.
- [PT08] G. PECCATI et M. S. TAQQU – « Central limit theorems for double Poisson integrals », *Bernoulli* **14** (2008), no. 3, p. 791–821.
- [Qui83] E. T. QUINTO – « The Invertibility of Rotation Invariant Radon Transform », *J. Math. Anal. Appl.* **91** (1983), p. 510–522.
- [RBMS08] D. M. REEVES, D. A. BENSON, M. M. MEERSCHAERT et H.-P. SCHEFFLER – « Transport of conservative solutes in simulated fracture networks : 2. Ensemble solute transport and the correspondence to operator-stable limit distributions », *Water Resour. Res.* **44** (2008).
- [Ric44] S. O. RICE – « Mathematical analysis of random noise », *Bell Systems Tech. J.* **23** (1944), p. 282–332.
- [RK96] A. G. RAMM et A. I. KATSEVICH – *The Radon Transform and Local Tomography*, CRC Press, 1996.
- [Roy07] E. ROY – « Ergodic properties of Poissonian ID processes », *Ann. Probab.* **35** (2007), no. 2, p. 551–576.
- [Ryc00] I. RYCHLIK – « On some reliability applications of Rice’s formula for the intensity of level crossings », *Extremes* **3** (2000), no. 4, p. 331–348.
- [RŻ97] J. ROSIŃSKI et T. ŻAK – « The equivalence of ergodicity of weak mixing for infinitely divisible processes », *J. Theoret. Probab.* **10** (1997), no. 1, p. 73–86.
- [Ser82] J. SERRA – *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.
- [She72] L. A. SHEPP – « Covering the line with random intervals », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **23** (1972), p. 163–170.
- [Shi95] N. R. SHIEH – « Sample functions of Lévy-Chentsov random fields », *Probability theory and mathematical statistics*, World Scientific, 1995, p. 450–459.
- [SPT02] S. STOEV, V. PIPIRAS et M. S. TAQQU – « Estimation of the self-similarity parameter in linear fractional stable motion », *Signal Process.* **82** (2002), p. 1873–1901.
- [ST94] G. SAMORODNITSKY et M. S. TAQQU – *Stable non-Gaussian random processes*, Stochastic Modeling, Chapman & Hall, New York, 1994, Stochastic models with infinite variance.

- [ST04] S. STOEV et M. S. TAQQU – « Simulation methods for linear fractional stable motion and FARIMA using the Fast Fourier Transform », *Fractals* **12** (2004), no. 1, p. 95–121.
- [Ste02] M. L. STEIN – « Fast and exact simulation of fractional Brownian surfaces », *J. Comput. Graph. Statist.* **11** (2002), no. 3, p. 587–599.
- [WMZ04] W. B. WU, G. MICHAELIDIS et D. ZHANG – « Simulating sample path of linear fractional stable motion. », *IEEE Transactions on Information Theory* **50** (2004), no. 6, p. 1088–1096.
- [Wol76] J. N. WOLFE – « Breast patterns as an index of risk for developing breast cancer », *Am. J. Roentgenol* **126** (1976), p. 1130–1139.
- [WRS09] Y. WANG, P. ROY et S. STOEV – *Ergodic properties of sum- and max- stable stationary random fields via null and positive group actions*, Preprint, <http://arxiv.org/abs/0911.0610>, 2009.
- [Xia09] Y. XIAO – « Sample path properties of anisotropic gaussian random fields », *Lecture Notes in Math. 1962*, Springer, New York, 2009, p. 145–212.
- [Xia10] — , « On uniform modulus of continuity of random fields », *Monatsh. Math.* (2010), no. 159, p. 163–184.
- [YP86] A. L. YUILLE et T. A. POGGIO – « Scaling theorems for zero crossings », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **8** (1986), no. 1, p. 15–25.

Liste des publications référencées

Articles dans des revues avec comité de lecture

- [1] H. Biermé. *Injectivity of Rotation invariant windowed Radon transforms*, J. Math. Anal. Appl., **316**(2), 383–396, (2006).
- [2] H. Biermé, A. Estrade. *Poisson random balls : self-similarity and X-ray images*, Adv. Appl. Prob., **38**(4), 853–872, (2006).
- [3] H. Biermé, M. M. Meerschaert, H. P. Scheffler. *Operator Scaling Stable Random Fields*, Stoch. Proc. Appl., **117**(3), 312–332, (2007).
- [4] H. Biermé, H. P. Scheffler. *Fourier series approximation of linear fractional stable motion*, J. Fourier Anal. Appl., **14**(2), 180–202, (2007).
- [5] H. Biermé, F. Richard. *Estimation of anisotropic Gaussian field through Radon transform*, ESAIM Probab. Stat., **12**(1), 30–50, (2008).
- [6] H. Biermé, C. Lacaux. *Hölder regularity for operator scaling stable random fields*, Stoch. Proc. Appl., **119**(7), 2222–2248, (2009).
- [7] H. Biermé, C. Lacaux, Y. Xiao. *Hitting probabilities and the Hausdorff dimension of the inverse images of anisotropic Gaussian random fields*, Bull. London Math. Soc., **41**(2), 253–273, (2009).
- [8] F. Richard, H. Biermé. *Statistical tests of anisotropy for fractional Brownian textures. Application to full-field digital mammography*, J. Math. Imaging Vision, **36**(3), 227–240, (2010).
- [9] H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj. *Self-similar random fields and rescaled random balls models*, J. Theoret. Probab., **23**(4), 1110–1141, (2010).
- [10] H. Biermé, A. Bonami, J. R. León. *Central Limit Theorems and Quadratic Variation in terms of Spectral Density*, Electron. J. Probab., **16**, 362–395, (2011).

Les versions électroniques de ces articles sont disponibles à l'adresse suivante :

<http://www.math-info.univ-paris5.fr/~bierme/HDR/Articles/>

Articles de proceedings

- [P1] H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj. *About scaling behavior of random balls models*, Proc. of S4G 6th Int. Conf., Prague, Czech Republic, (2006).
- [P2] H. Biermé, F. Richard, M. Rachidi, C. L. Benhamou. *Anisotropic texture modeling and applications to medical image analysis*, ESAIM Proc. Mathematical Methods for Imaging and Inverse Problems, 26, 100–122, (2009).
- [P3] H. Biermé, F. Richard, C. L. Benhamou. *Parametric estimation for Gaussian operator scaling random fields and anisotropy analysis of bone radiograph textures*, Proc. of the Int. Conf. MICCAI'09, London, UK, (2009).
- [P4] H. Biermé, F. Richard. *Analysis of texture anisotropy based on some gaussian fields with spectral density*, Proc. de la 2ème conférence Mathématiques pour l'image, Orléans, (2010).

Prépublications

- [11] H. Biermé, A. Estrade. *Covering the whole space with Poisson random balls*, soumis, 15 pages, (2011).
- [12] H. Biermé, A. Desolneux. *Crossings of smooth Shot Noise processes*, soumis, 30 pages, (2011).
- [13] H. Biermé, A. Desolneux. *A Fourier Approach for the Crossings of Shot Noise Processes with Jumps*, soumis, 10 pages, (2010).
- [14] H. Biermé, C. Lacaux, H. P. Scheffler. *Multi-Operator scaling random fields*, soumis, 36 pages, (2010).

Articles en préparation

- [15] H. Biermé, L. Moisan, F. Richard *A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional Brownian fields*.
- [16] H. Biermé, Y. Demichel, A. Estrade. *Fractional Poisson field on a finite set*.