UNIVERSITÉ D'ORLÉANS **Unité SOL3MT08**
Département de Mathématiques

DM

15. Soit $\mathcal{A} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On donne $P_{(\mathcal{A},\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{A}$ vers la base $\mathcal{B}$ et $P_{(\mathcal{B},\mathcal{C})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$.

1. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$, la matrice de passage de la base $\mathcal{A}$ vers la base $\mathcal{C}$ et la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{A}$.
2. Déterminer les coordonnés de $\overrightarrow{u}$ dans les bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
3. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{k}$, $g(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{-i}$, et $g(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{j}$.
   (a) g est elle bien définie ?
   (b) Déterminer la matrice représentant g en prenant $\mathcal{B}$ comme base de départ et $\mathcal{C}$ comme base d'arrivée.
   (c) Calculer alors la matrice représentant g en prenant $\mathcal{A}$ comme base de départ et d'arrivée.
   (d) Déterminer la matrice représentant g en prenant $\mathcal{C}$ comme base de départ et d'arrivée.
   (e) Donner l'image par f de $\overrightarrow{h} = (x, y, z)$ pour tout $\overrightarrow{h}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (f) Démontrer que g est bijective. Déterminer la matrice représentant la bijection réciproque g^{-1} en prenant $\mathcal{C}$ comme base de départ et d'arrivée.