Rappels de calcul matriciel

Exercice 1 Calculer tous les produits de deux matrices choisies parmi :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 Calculer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. Calculer B^n pour tout entier $n \geq 1$.
2. En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de A^n.
3. Calculer $(I + B)(I - B + B^2)$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle transposée de A, que l'on note ${}^tA$, la matrice carrée (b_{ij}) où $b_{ij} = a_{ji}$.

1. Exprimer ${}^t(AB)$ an fonction de ${}^tA$ et de ${}^tB$.
2. Montrer que si A est inversible, ${}^tA$ l'est aussi et que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Sous-espaces vectoriels - Familles de vecteurs

Exercice 5 Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, preciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :
a)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 3x - y + t = 0\}$;
b)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y + 2z + t = 1\}$;
c)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$;
d)$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (3a + b, a - b, a + 5b, 2a + b)\}$.

Exercice 6 Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $a = (1, 2, 3)$ et $b = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $c = (1, 0, 1)$ et $d = (0, 1, 1)$.

Exercice 7 Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 1\} \quad \text{et} \quad A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 + z^2 = 1 \text{ et } x = 0\}.$$

Exercice 8 Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que cet ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la famille de fonctions $(x \mapsto e^{nx})_{n\geq 1}$ est libre dans cet espace.

Exercice 9 Déterminer un supplémentaire de :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z = 0, x - y + z + 2t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] | P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $R_4[X]$.
3. $H = \{f \in C^1(\mathbb{R}) | f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $C^1(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une projection vectorielle, déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 11 Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E,\ P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 12 Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = (1 - X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes pairs}\}$.
A-t-on $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes impairs}\}$?