Rang d'une matrice

Exercice 1 Chercher le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

en fonction de $m \in \mathbb{C}$.

Exercice 3 Soit M une matrice carrée d'ordre n.

1. Montrer que si M est de rang 1, alors toutes les colonnes sont proportionnelles entre elles.
2. Montrer que $rg(M) = 1$ si et seulement si il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $M = CL$.
3. On suppose que $rg(M) = 1$. Montrer que M est une projection si et seulement si $tr(M) = 1$.

Exercice 4 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$.

1. Montrer que $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYY = 0 \iff Y = 0$.
2. Montrer que $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ BX = 0 \iff AX = 0$.
3. En déduire que $rg(A) = rg(B)$.
4. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) \neq rg({}^tAA)$.

Changement de bases

Exercice 5 On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$f((x,y)) = (2x, -y)$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Soit $e'_1 = (3,1)$, $e'_2 = (5,2)$. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
3. En calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$, donner la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Calculer la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
5. Retrouver la matrice A' par les formules de changement de bases.

Exercice 6 On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathscr{B}$ et on pose $u = (4,1)$, $v = (-6,1)$.

1. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $z = -u + 4v$. Déterminer les coordonnées de z dans la base canonique.

Exercice 7 On considère $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u_1 = (-1,2,2)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (2,-3,2)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On note p la projection sur $Vect(u_1, u_2)$ parallèlement à $Vect(u_3)$. Cette projection est-elle bien définie ?
3. Ecrire la matrice A de p dans la base $\mathscr{B}$.
4. En déduire la matrice A' de p dans la base canonique.

Exercice 8 Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est la matrice d'une projection si et seulement si A est semblable à une matrice J_r pour un certain r.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que PB est une projection.