Chaînes de Markov I

TD 01
Probabilité - M1

Exercice 1 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à espace d'états discret. Montrer les égalités suivantes :

1. $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j_1,\ldots,X_{n+k}=j_k|X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\right)=\mathbb{P}_{i_n}\left(X_1=j_1,\ldots,X_k=j_k\right).$
2. $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j_1,\ldots,X_{n+k}=j_k|\left(X_0,\ldots,X_{n-1}\right)\in A, X_n=i_n\right)$
   $=\mathbb{P}_{i_n}\left(X_1=j_1,\ldots,X_k=j_k\right).$
3. $\mathbb{P}\left(\left(X_{n+1},\ldots,X_{n+k}\right)\in B|\left(X_0,\ldots,X_{n-1}\right)\in A, X_n=i_n\right)=\mathbb{P}_{i_n}\left(\left(X_1,\ldots,X_k\right)\in B\right).$

Exercice 2 : Montrer, pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$, que :

$$\mathbb{P}(X_{10}=-4|X_9\in\{3,-3\},X_8=2)\neq\mathbb{P}(X_{10}=-4|X_9\in\{3,-3\})$$

Que pouvons nous en déduire ?

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à espace d'états discret, de loi initiale μ et de matrice de transition P. Étudier si les suites suivantes sont des chaînes de Markov, homogènes ou non, et donner quand cela est possible, les probabilités de transition et la loi initiale :

1. $Y_n=X_{kn}$, avec $k\in\mathbb{N}^*$.
2. $Y_n=X_{k+n}$, avec $k\in\mathbb{N}^*$.
3. $Y_n=f(X_n)$ où $f:E\to F$ est une bijection.
4. $Y_n=(X_n,X_{n+1})$.
5. $Y_n=(X_n,f(X_n))$, où f est une application quelconque.

Exercice 4 : Soit $(\xi_n, n\geq 0)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(\xi_n=\pm 1)=\frac{1}{2}$. Étudier si les suites suivantes sont des chaînes de Markov ou pas :

1. $X_n=\sum_{i=0}^n \xi_i$
2. $M_n=\max\{X_k, k\leq n\}$
3. $R_n=M_n-X_n$
4. $Y_n=\xi_n\xi_{n+1}$
5. $Z_n=\frac{\xi_n+\xi_{n+1}}{2}$

Exercice 5 (Chaines de Markov cachées) : Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaine de Markov à valeur dans l'ensemble dénombrable A et si $F : A \to B$ est une application, la suite $(F(X_n))_{n\geq 0}$ est-elle une chaine de Markov ?

Exercice 6 : Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,1\}$. Sa matrice de transition est

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

1. Calculer P^n pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose maintenant (et dans toute la suite que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$). Vérifier que pour toute loi initiale μ :

$$\mathbb{P}_\mu(X_n = 0) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

3. Si $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i) =: \nu(i), i \in \{0,2\}.$$

   On suppose dans toute la suite que $(\alpha, \beta) \neq (1,1)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout événement A

$$\mathbb{P}_\nu(X_n \in A) = \nu(A).$$

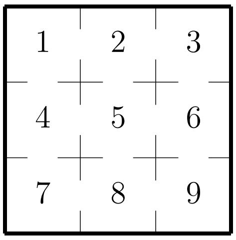
Exercice 7 : Le Bon, la Brute et le Truand se retrouvent finalement pour un mémorable duel à 3 (tout ça pour quelques dollars de plus). Pous simplifier, nous désignerons par A le Bon, B la Brute et C le Truand. Le Bon est un tireur d'élite et touche sa cible à coup sûr. La Brute est également un bon tireur mais tétanisé par l'enjeu, il n'a que 80% de chances de toucher. Enfin, le Truand a mal choisi son emplacement ; ébloui par le soleil couchant, il n'a qu'une probabilité de 10% d'atteindre son but. Les règles du duel sont les suivantes :

— Le premier tireur sera tiré au sort.
— Chacun tire ensuite à tour de rôle dans l'ordre lexicographique.

Bien entendu, à chaque fois que c'est son tour, le tireur choisit de tirer sur son adversaire le plus dangereux.

1. Modéliser les évolutions de ce duel à l'aide d'une chaîne de Markov.
2. Le Truand a été choisi par le sort pour tirer en premier. Il tire donc sur le Bon.
   (a) Calculer la probabilité que le truand survive s'il rate le Bon lors de son premier tir.
   (b) Même question s'il tue le Bon lors de son premier tir.
   (c) Si vous étiez le Truand, quelle stratégie adopteriez-vous lors du premier tir ?

Exercice 8 : On place un rat dans le labyrinthe suivant.



1. A chaque fois qu'il se retrouve dans une des 9 cases, le rat choisit une des portes disponibles au hasard, et indépendamment de ses choix précédents. Soit X_n le numéro de la n-ème case visitée par le rat. Modéliser l'évolution de X_n.
2. On considère la partition de l'espace d'états en les trois classes suivantes :

$$a = \{1, 3, 7, 9\} \quad b = \{2, 4, 6, 8\} \quad c = \{5\} .$$

   On note Y_n la classe à laquelle appartient X_n. Montrer que $\{Y_n \, , \, n \in \mathbb{N}\}$ est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transitions.

Exercice 9 : On considère un hexagone régulier dont les sommets sont numérotés $1, \dots, 6$ dans le sens trigonométrique. A la date 0, deux coccinelles sont placées aux sommets i et j respectivement ($i \neq j$). A la date 1, chacune des coccinelles se déplace, indépendamment de l'autre, vers l'un des deux sommets adjacents, avec une probabilité 1/2. A la date 2, l'opération se répète et ainsi de suite.

A chaque instant n, on note X_n la distance séparant les deux coccinelles (c'est à dire le nombre minimal d'arêtes de l'hexagone entre les deux sommets où elles se trouvent).

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états et la matrice de transition.
2. Donner les classes et préciser si elles sont closes.
3. Calculer le temps moyen que mettront ces coccinelles pour se rencontrer.

Exercice 10 : [Fouilleurs d'esprit]
Au début des années 80, le profilage n'en est qu'à son balbutiement. Cependant, le FBI se doit d'attrapper un serial killer surnommé par la presse *Depth* et ils ont réussi à établir certaines règles concernant son modus operandi. Les victimes de *Depth* sont des femmes blondes, brunes ou rousses et de plus

— si la première victimes est blonde, la prochaine le sera aussi une fois sur deux, elle sera brune une fois sur quatre et sinon rousse ;
— si la première est brune, la prochaine est brune une fois sur deux et sinon elle est blonde ;
— si la première est rousse la prochaine sera blonde trois fois sur quatre et brune sinon.

On note (X_n) la chaîne de Markov représentant la nature de la $n+1$-ème victime et on note $B_r := \{\text{Brune}\}$, $B_\ell := \{\text{Blonde}\}$ et $R := \{\text{Rousse}\}$

1. Donner la matrice de transition et graphe associé à $(X_n)_{n \geq 0}$.
2. *Depth* a tué une jeune femme blonde, quel est le type le plus probable deux victimes plus tard.

3. (Bonus) Reprendre la question précédente, mais on s'intéresse à la nature de la victime au bout de n meurtres. Calculer les limites de ces probabilités.
4. Une victime est blonde, quelle est la probabilité qu'après cette victime, il tue une jeune femme rousse avant une brune ?
5. Une victime est blonde, après cette victime combien y a t'il de victimes en moyennes avant qu'il tue une personne brune ?

Exercice 11 : On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{1,\ldots,6\}$ dont la matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & . & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & . & 0 & 1/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}.$$

1. Compléter la matrice de transition.
2. Réaliser le graphe associé à cette chaîne de Markov.
3. Donner les classes de communication et déterminer lesquelles sont closes.
4. Pour toute classe close $\mathscr{R}$, donner pour tout $x \in \{1,\ldots,6\}$

$$\mathbb{P}_x(T_{\mathscr{R}} < \infty)$$

   où $T_{\mathscr{R}}$ est le temps d'atteinte de la classe $\mathscr{R}$.
5. Donner pour tout $x \in \{1,\ldots,6\}$, $\mathbb{E}_x[T_R]$ où R est la réunion de toutes les classes closes et T_R son temps d'atteinte.