Calcul de déterminants

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2 Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = \sup(i, j)$. Calculer $\det(A)$.

Exercice 3 Calculer les déterminants suivants:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

Exercice 4 On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser $V(a, b)$ et $V(a, b, c)$.
2. On pose, pour $a_1, \ldots, a_n$ fixés,

$$P(x) = V(a_1, a_2, \ldots, a_n, x).$$

   (a) Montrer que P est un polynôme de degré n. Quel est son coefficient dominant ?

   (b) Déterminer n racines de P. En déduire une expression de P en fonction de $V(a_1, \ldots, a_n)$ et des polynômes $(x - a_i)$.

   (c) En déduire l'expression de $V(a_1, \ldots, a_n)$ en fonction de $a_1, \ldots, a_n$.

Exercice 5

1. Soit $a, b, c, d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. On pose

$$f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}.$$

   Montrer que f est dérivable et que

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.

3. Application : calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

   Retrouver le résultat en calculant directement le déterminant.

Exercice 6 On appelle matrice circulante associée au n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ la matrice

$$C_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

1. On note P le polynôme $P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$, θ une racine n-ième de l'unité et X_θ la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \vdots \\ \theta^{n-1} \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $C_n X_\theta = P(\theta) X_\theta$.

2. Soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ les racines n-ième de l'unité et U la matrice dont les matrices colonnes sont $X_{\theta_1}, \dots, X_{\theta_n}$.

   Montrer que $CU = U \operatorname{diag}(P(\theta_1), \dots, P(\theta_n))$.

3. Montrer que $\det(U) \neq 0$ puis déterminer une expression de $\det(C_n)$ en fonction des a_i et des θ_i.

4. En déduire une expression du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & a \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$