Eléments propres d'un endomorphisme

Exercice 1 Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes. Quelle est la dimension de ces sous-espaces propres ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Mêmes questions pour les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

On distinguera les cas $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $u : P \longmapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Ecrire la matrice de u dans la base canonique de E.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 5 Soit C une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = C\,{}^tC$.

1. Quel est le rang de A ?
2. En déduire le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres.

Exercice 6 Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E défini par $u(f) = f'$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 7 Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.
2. On considère l'application T sur E définie par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ T(f)(x) = f(x+1).$$

   Montrer que T est un endomorphisme de E.
3. Déterminer les valeurs propres de T.