Chaînes de Markov

TD 03
Probabilité - M1

Exercice 1 : On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $[\![1,7]\!]$ de matrice de transition P

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/9 & 7/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe associé à la chaîne avec les probabilités de passage correspondantes.
2. Déterminer les classes d'états récurrents et transients.
3. La chaîne est-elle irréductible ?
4. Calculer $\mathbb{P}_3(X_2 = 6)$ et $\mathbb{P}_1(X_2 = 7)$.

Exercice 2 : Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration.

1. Soient T un temps d'arrêt p.s. fini et $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires. Montrer que X_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.
2. Soient S et T deux temps d'arrêts tels que l'inégalité $S \leq T$ soit presque sûrement vérifiée. Établir l'inclusion $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 3 : Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov. Les variables aléatoires suivantes sont-elles des temps d'arrêt ?

1. $T_x := \inf\{n \geq 0, X_n = x\}$ et $T'_x := \inf\{n \geq 0, X_{n+1} = x\}$.
2. $T_x^+ := \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$.
3. $S^A := \inf\{n \geq 0, X_n \notin A\}$ et $S_d^A := \sup\{n \leq 123, X_n \notin A\}$.
4. Soient U et V deux temps d'arrêt. $\inf\{U, V\}$ et $\max\{U, V\}$ sont-elles des temps d'arrêt ? Sont-elles $\mathcal{F}_V$ mesurables ?

Exercice 4 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $[\![1,10]\!]$ dont les probabilités de passage sont

$$\begin{aligned} p_{1,6} &= p_{1,8} = p_{3,3} = p_{5,8} = p_{6,1} = p_{6,8} = p_{7,4} = p_{7,10} = p_{8,1} = p_{8,6} = 1/2 \\ p_{2,5} &= p_{4,7} = p_{10,7} = 1 \\ p_{3,5} &= p_{3,7} = p_{5,3} = p_{5,7} = p_{9,9} = 1/4 \\ p_{9,2} &= 3/4. \end{aligned}$$

1. Donner la matrice et le graphe associés à cette chaîne.
2. Déterminer les classes de communication et leur nature.
3. Calculer les probabilités d'absorption des états transitoires par les classes récurrentes.
4. Pour chaque état transitoire, donner le temps moyen d'atteinte d'une des deux classes récurrentes.
5. Déterminer les distributions stationnaires de la chaîne et le temps moyen de retour pour les états récurrents.

Exercice 5 : Soient $(X_n)_{n\geq 0}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$ et $(Z_n)_{n\geq 0}$ des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuéees de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_1$. On suppose de plus que les trois suites sont indépendantes entre elles. On définit maintenant le vecteur $\xi_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ pour tout $n \geq 1$ et $S_0 = (0,0,0)$ p.s.

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
2. Calculer $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^n X_k = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire $\mathbb{P}(S_n = (0,0,0))$.
4. Montrer que $(0,0,0)$ est un état transitoire.

Exercice 6 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont les transitions sont données par $p_{i,j} = 1/2$ si $j = i \pm 1$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. Si $a \in \mathbb{Z}$, on note T_a le premier instant positif ou nul où la chaine passe en a et T_a^+ le premier instant strictement positif où la chaine passe en a.

1. Soient $a \leq x \leq b$ trois entiers relatifs.
   (a) Expliciter $f(x) = \mathbb{P}_x(T_a < T_b)$. (Indication : trouver un lien, lorsque x est différent de a et de b, entre $f(x-1)$, $f(x)$ et $f(x+1)$.)
   (b) Expliciter $g(x) = \mathbb{E}_x(\min(T_a, T_b))$. (Même indication que pour la question précédente.)
2. Montrer, lorsque $0 \leq s < 1$, l'égalité $\mathbb{E}(s^{T_0^+}) = 1-(1-s^2)^{1/2}$. (Indication : utiliser plusieurs fois les propriétés de Markov).
3. Montrer, lorsque $0 \leq s < 1$, l'égalité $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_n = 0)s^n = (1-s^2)^{-1/2}$.

Exercice 7 : Montrer que la loi du temps de premier passage en i ($i \neq 0$) de la marche aléatoire symétrique unidimensionnelle est donnée par

$$\mathbb{P}(T_i = n) = \begin{cases} \frac{|i|}{n}\mathbb{P}(X_n = i) & \text{pour } n \in \{|i|, |i|+2, \dots\}\ , \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En déduire que $\mathbb{E}[T_i] = +\infty$.
Indications :

1. Par symétrie, on peut supposer $i > 0$.
2. Ecrire l'événement $\{T_i = n\}$ à l'aide des événements $\{X_{n-1} = i-1\}$ et $\{T_i \leq n-2\}$.
3. A l'aide du principe de réflexion, montrer que
$$\mathbb{P}(T_i = n) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}(X_{n-1} = i-1) - \mathbb{P}(X_{n-1} = i+1)\right]$$
et conclure par un calcul direct.

Exercice 8 : On considère la chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur $\mathbb{N}$ telle que :

$$p_{x,y} := \begin{cases} 1 - p_x, \text{ si } y = x+1 \\ p_x, \text{ si } y = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de cette chaîne et montrer qu'elle est irréductible.
2. Calculer la quantité $\mathbb{P}_0(T_0^+ > n)$ et justifier l'existence de sa limite quand $n \to +\infty$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ pour que la la chaîne soit récurrente.
4. On suppose maintenant $p_x = p, \forall x \in \mathbb{N}$. Montrer que la chaîne est récurrente positive. En déduire la valeur de la probabilité stationnaire en 0.
5. Donner la probabilité stationnaire associée à la chaîne.
6. Soit $T_N := \inf\{n \geq 0, X_n = N\}$. Calculer pour $x \in E$, $\mathbb{E}_x[T_N]$.
7. On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité de donner pile est p. Montrer, à l'aide des questions précédentes, que l'on obtient avec probabilité 1 une suite de N piles consécutifs.

Exercice 9 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les probabilités de passage sont définies par :

$$p_{0,0} := r_0,\ p_{0,1} := p_0,\ \text{ et pour } i \geq 1,\ p_{i,j} := \begin{cases} p_i \text{ si } j = i+1 \\ q_i \text{ si } j = i-1 \end{cases}$$

où $0 < p_i < 1$, $0 < q_i < 1$, $p_0 + r_0 = 1$ et pour tout $i \geq 1$, $p_i + q_i = 1$.

1. (a) Tracer le graphe de cette chaîne.
   (b) Montrer que $\xi = (\xi_i)_i \geq 0$ définie par
   $$\xi_0 = 1,\ \xi_i = \frac{p_0 p_1 \dots p_{i-1}}{q_1 \dots q_i},\ \forall i \geq 1$$
   est une mesure stationnaire associée à X.

(c) Montrer que toute mesure stationnaire $\delta = (\delta_i)_{i\geq 0}$ vérifiant $\delta_0 = 1$ est égale à ξ. Que peut on en déduire pour une mesure stationnaire μ quelconque ?

(d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ξ pour que la chaîne X soit récurrente positive. En déduire l'espérance du premier retour en 0 en partant de 0.

2. On note $T_i := \inf\{n \geq 0, X_n = i\}$ le premier temps d'atteinte du niveau i et soit $a > 0$.

   (a) Calculer pour $0 \leq i \leq a$, $\mathbb{P}_i(T_a < T_0)$ en fonction de $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_i = \prod_{j=1}^{i} \frac{q_j}{p_j}$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}(T_0 = \infty) = \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} \{T_n < T_0\})$ et en déduire $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur γ pour la récurrence de la chaîne.

3. On suppose maintenant que $p_i = p$, $q_i = q$, $\forall i \geq 1$ et que $p_0 = 1$.

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q concernant la récurrence de la chaîne.

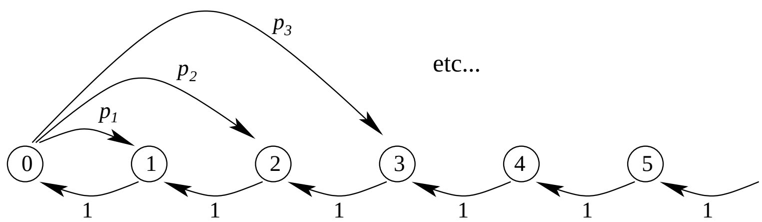
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q concernant la récurrence positivité de la chaîne.

Exercice 10 :

Un client arrive dans une banque. Devant l'unique guichet, il y a une queue de longueur aléatoire L. La loi de L est donnée par $\mathbb{P}(L = k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$ (on suppose $\sum_{k\geq 1} p_k = 1$).

On admet que chaque client est servi pendant un intervalle de temps de longueur 1. Une fois le premier client servi, notre client avance d'une unité dans la file. Une fois servi, on suppose que le client se place à nouveau au bout de la queue.

On modélise la situation par la chaîne de Markov suivante :



1. Sous quelle condition sur les p_k la chaîne est-elle irréductible ?

   Pour le reste du problème, on suppose les p_k tels que la chaîne soit irréductible.

2. On suppose $X_0 = 0$. Soit

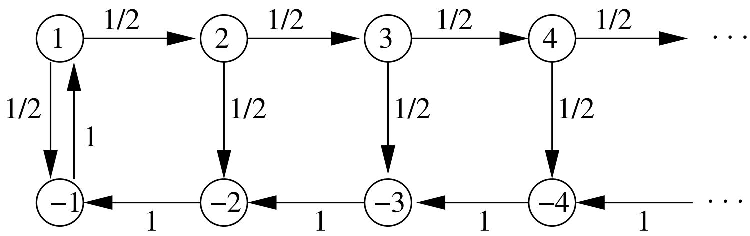
$$\tau_0 = \inf\{n > 0 : X_n = 0\}$$

   le temps de premier retour en 0. Déterminer sa loi.

3. Montrer que l'état 0 est récurrent.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_k pour que l'état 0 soit récurrent positif.
5. Donner une condition suffisante sur les p_k pour que l'état 0 soit apériodique.
6. Soit π l'unique distribution stationnaire de la chaîne. Calculer π_0 à l'aide de $\mathbb{E}_0[\tau_0]$.
7. Par récurrence, déterminer π_i pour tout i.

Exercice 11 :
On considère la chaîne de Markov suivante sur $\mathbb{Z}^*$:



1. La chaîne est-elle irréductible ?
2. L'état 1 est-il récurrent ?
3. L'état 1 est-il récurrent positif ?
4. L'état 1 est-il apériodique ?
5. Soit π la distribution stationnaire de la chaîne. Calculer π_1.
6. Calculer π_i pour tout $i \in \chi$.

Exercice 12 : Soit $(X_n, n \geq 0)$ la marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$ de probabilités de transition :

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ p_{i,i+1} = p, \text{ et } p_{i,i-1} = 1 - q = p$$

1. On note $T_i = \inf\{n \geq 0,\ X_n = i\}$ et soient $a < x < b$.
   (a) Donner la probabilité $\mathbb{P}_x(T_a < T_b)$. En déduire la loi de $X_{T_a \wedge T_b}$.
   (b) Donner selon les valeurs de p la quantité $\mathbb{P}_x(T_a < \infty)$.
2. Soit $0 < s < 1$.
   (a) Exprimer $\mathbb{E}_1[s^{T_0}]$ en fonction de p, q, s et $\mathbb{E}_2[s^{T_0}]$.
   (b) En déduire, si l'on note $\varphi(x) = \mathbb{E}_x[s^{T_0}]$, $\varphi(2) = \varphi(1)^2$.
   (c) En déduire $\varphi(1)$ (justifier votre choix).