Optimisation

Master 1 Statistique & Data Science, Ingénierie Mathématique, 2020-2021

Examen du mercredi 5 mai 2021
Corrigé

Exercice 1. *(sur environ 9 points)*

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2.$$

1. Etude de f sur $\mathbb{R}^2$: Répondre rigoureusement aux questions suivantes.
   1.a) La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
   1.b) La fonction f est-elle strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$?
   1.c) La fonction f atteint-elle une valeur minimale sur $\mathbb{R}^2$?

On considère maintenant l'ensemble

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 13 \text{ et } x_1 + x_2 \geqslant -1\}.$$

2. Propriétés de l'ensemble U :
   2.a) Représenter graphiquement U et préciser les coordonnées des points d'intersection qui apparaissent naturellement.
   2.b) Montrer que U est un ensemble convexe et compact.
   2.c) Introduire deux fonctions g_1 et g_2 pour décrire U comme un ensemble de contraintes inégalités et vérifier que tous les points de U vérifient la qualification de contraintes de Kuhn-Tucker (QCKT).

On cherche désormais à résoudre le problème d'optimisation sous contraintes :

$$\text{Trouver } x^\star \text{ tel que } x^\star \in U \text{ et } \quad f(x^\star) = \min_{x \in U} f(x) \qquad (\mathcal{P})$$

3. Justifier que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.
4. Justifier que $x \in U$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si x vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) que l'on précisera.
5. Déterminer toutes les solutions de $(\mathcal{P})$ à l'aide des conditions KKT.

Solution de l'exercice 1.

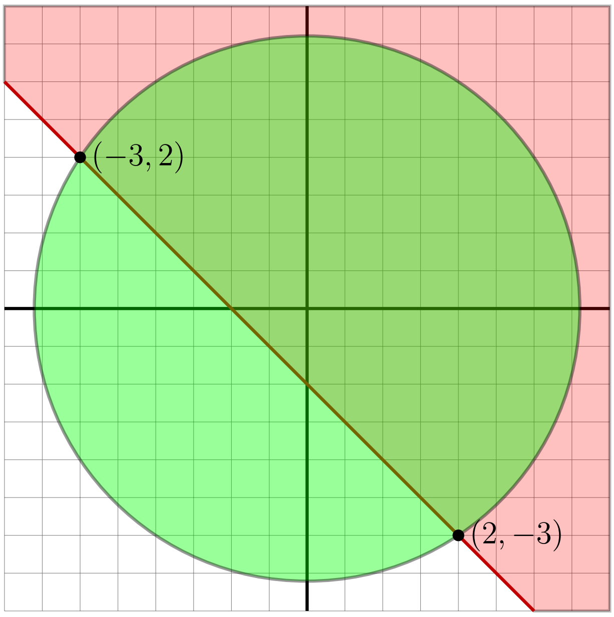
1. Etude f sur $\mathbb{R}^2$: f est quadratique sur $\mathbb{R}^2$ avec pour matrice A, vecteur b et constante c

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad c = 0.$$

   1.a) A est positive donc f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
   1.b) A n'est pas positive donc f n'est pas strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
   1.c) Le système linéaire $Ax = b$ n'admet pas de solution donc f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}^2$ et $\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$.

2. Propriétés de l'ensemble U :

2.a) U est l'intersection d'un disque avec un demi-plan.



Pour les points d'intersection on résout le système

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 & = & 13 \\ x_1 + x_2 & = & -1 \end{cases}$$

Par substituion, $x_2 = -1 - x_1$ et $x_1^2 + (-1 - x_1)^2 = 13$ soit $x_1^2 + x_1 - 6 = 0$. Les racines de ce trinôme sont $x_1 = 2$ et $x_1 = -3$. Finalement les deux points d'intersection sont $(2, -3)$ et $(-3, 2)$.

2.b) U est convexe en tant qu'intersection de deux convexes (un disque et un demi-plan). U est compact car c'est l'intersection non vide d'un compact (disque) et d'un fermé (demi-plan).

2.c) On pose $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 13$ et $g_2(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 - 1$. Alors

$$U = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ g_1(x_1, x_2) \leqslant 0 \text{ et } g_2(x_1, x_2) \leqslant 0\}.$$

g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrons tous les points de U vérifient QCKT. Soit $x \in U$. Discutons selon le nombre de contraintes actives :

— Si aucune contrainte n'est active ($g_1(x_1, x_2) < 0$ et $g_2(x_1, x_2) < 0$) il n'y a rien à vérifier.

— Si $g_1(x_1, x_2) = 0$ et $g_2(x_1, x_2) < 0$, alors l'unique vecteur $\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ forme bien une famille libre car $x \neq 0$ sur le bord du disque.

— Si $g_1(x_1, x_2) < 0$ et $g_2(x_1, x_2) = 0$ alors $\nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forme une famille libre car il est non nul.

— Si $g_1(x_1,x_2)=0$ et $g_2(x_1,x_2)=0$ alors d'après la question 2.a) on est soit sur $(2,-3)$ soit sur $(-3,2)$ et alors

$$\{\nabla g_1(x_1,x_2),\nabla g_2(x_1,x_2)\}=\left\{\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}\quad\text{ou}\quad\left\{\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

qui sont des familles libres de vecteurs.

Dans tous les cas x vérifie QCKT.

3. On minimise une fonction continue sur un compact, il y a au moins une solution.
4. Comme f est convexe de classe $\mathcal{C}^1$, g_1 et g_2 sont convexes de classe $\mathcal{C}^1$, on a le théorème KKT cas convexe qui assure que x est solution si et seulement les conditions KKT sont vérifiées, à savoir il existe $\mu_1,\mu_2\geqslant 0$ tels que

$$\nabla f(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0\quad\text{et}\quad\mu_1 g_1(x)=\mu_2 g_2(x)=0.$$

On obtient ici le système

$$\begin{pmatrix}2x_1\\1\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\mu_1(x_1^2+x_2^2-13)=\mu_2(-x_1-x_2-1)=0.$$

5. Déterminons toutes les solutions de $(\mathcal{P})$ à l'aide des conditions KKT.

On résout le système ci-dessus en étudiant le nombre de contraintes actives.

— Si aucune contrainte n'est active, on cherche alors un point critique de f, il n'y a pas de solution.

— Si $g_1(x_1,x_2)=0$ et $g_2(x_1,x_2)<0$, alors $\mu_1\geqslant 0$ quelconque et $\mu_2=0$ et

$$\left\{\begin{array}{ccc}2x_1+2\mu_1x_1&=&0\\1+2\mu_1x_2&=&0\\x_1^2+x_2^2&=&13\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&0\\2\mu_1x_2&=&-1\\x_2&=&\pm\sqrt{13}\end{array}\right.$$

Comme $\mu_1\geqslant 0$ on en déduit $x_2<0$. Mais alors le point $(0,-\sqrt{13})$ est tel que $g_2(x_1,x_2)=\sqrt{13}-1>0$ donc il n'appartient pas à U.

— Si $g_1(x_1,x_2)<0$ et $g_2(x_1,x_2)=0$ alors $\mu_2\geqslant 0$ quelconque et $\mu_1=0$ et

$$\left\{\begin{array}{ccc}2x_1-\mu_2&=&0\\1-\mu_2&=&0\\x_1+x_2&=&-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}x_1&=&\frac12\\\mu_2&=&1\\x_2&=&-\frac32\end{array}\right.$$

On trouve donc une solution qui est $(\frac12,-\frac32)$. On vérifie que $(\frac12,-\frac32)\in U$:

$$g_1\left(\frac12,-\frac32\right)=\frac52-\sqrt{13}<0.$$

— Si $g_1(x_1,x_2)=0$ et $g_2(x_1,x_2)=0$ alors d'après la question 2.a) on est soit sur $(2,-3)$ soit sur $(-3,2)$. On peut résoudre le système dans chaque cas pour voir qu'il y a des problèmes de signe sur μ_1 et μ_2. On peut aussi se contenter d'évaluer f sur ces deux points et comparer avec la valeur pour $(\frac12,-\frac32)$. On a

$$f(\frac12,-\frac32)=\frac14-\frac32=-\frac54.$$

Par ailleurs,

$$f(2,-3) = 4 - 2 = 1 > f(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$$

$$f(-3,2) = 9 + 2 = 11 > f(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$$

donc ces deux points ne sont pas des solutions.

En conclusion le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution qui est $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.

Exercice 2. *(sur environ 16 points)*

Dans cet exercice on considère $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle quadratique

$$g(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c,$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

Partie I : Propriétés générales

On commence par **redémontrer** des résultats de cours.

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\nabla g(x) = Ax - b \quad \text{et} \quad \nabla^2 g(x) = A.$$

2. Redémontrer rigoureusement que g admet un unique minimum global $x^\star = A^{-1}b$.

Partie II : Convergence de l'algorithme de gradient à pas fixe

Dans cette partie de l'exercice on étudie la convergence de l'algorithme de descente de gradient à pas fixe appliqué à la fonctionnelle quadratique g. Pour une fonction quelconque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cet algorithme est décrit par le pseudo-code suivant :

Algorithme 1 : Algorithme de descente de gradient à pas fixe

Données : Un point initial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, un seuil de tolérance $\varepsilon > 0$, un pas fixe $t > 0$
Résultat : Un point $x \in \mathbb{R}^n$ proche de $x^\star$
Initialiser x :
  $x \leftarrow x^{(0)}$;
  $k \leftarrow 0$;
tant que $\|\nabla f(x)\| > \varepsilon$ **faire**
  1. Mettre à jour x avec le pas fixe t dans la direction de descente $-\nabla f(x^{(k)})$:
    $x \leftarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} - t\nabla f(x^{(k)})$;
    $k \leftarrow k + 1$;
fin

Dans la suite de cette partie $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de vecteurs obtenues en appliquant l'Algorithme 1 à la fonction g avec un pas $t > 0$ et en partant de d'un point initial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$x^{(k+1)} - x^\star = (I_n - tA)(x^{(k)} - x^\star).$$

En déduire une expression de $x^{(k)} - x^\star$ en fonction de A, t, et $x^{(0)} - x^\star$.

4. Soit $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des vecteurs propres associés formant une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. En introduisant la décomposition du vecteur $x^{(0)} - x^\star$ dans la base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^\star$ quelque soit la valeur de $x^{(0)}$ si et seulement si
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |1 - t\lambda_i| < 1.$$
5. Montrer que
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |1 - t\lambda_i| \leqslant \max(|1 - t\lambda_1|, |1 - t\lambda_n|).$$
6. En déduire l'intervalle des valeurs de t pour lesquelles l'Algorithme 1 converge et montrer que
$$\|x^{(k)} - x^\star\| \leqslant \max(|1 - t\lambda_1|, |1 - t\lambda_n|)^k \|x^{(0)} - x^\star\|.$$
7. Tracer l'allure des graphiques des fonctions $t \mapsto |1 - t\lambda_1|$ et $t \mapsto |1 - t\lambda_n|$. Pour quelle valeur de t le membre de droite de l'inégalité précédente tend-il le plus vite vers 0 ?

Partie III : Algorithme de gradient à pas fixe avec moment

On considère à nouveau une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ générique. L'algorithme de gradient à pas fixe $t > 0$ avec moment $\beta > 0$ et point initial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ consiste à construire la séquence de vecteurs $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - t\nabla f(x^{(0)}), \\ \forall k \geqslant 1, \quad x^{(k+1)} &= x^{(k)} - t\nabla f(x^{(k)}) + \beta(x^{(k)} - x^{(k-1)}). \end{aligned}$$
En pratique l'algorithme est arrêté avec le même critère d'arrêt que l'Algorithme 1.

8. ***(sur 4 points)*** On suppose que les fonctions

   `function fx = f(x)` et `function gfx = gradf(x)`

   sont définies dans scilab. Ecrire une fonction scilab

   ```
   function [Xk,FXk] = algo_moment(x0, eps, t, bet, f, gradf)
   ```

   qui prend en entrées un point initial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, un seuil de tolérance $\varepsilon > 0$, et deux paramètres $t > 0$ et $\beta > 0$, les fonctions pour évaluer f et ∇f. La fonction renvoie la matrice `Xk` (de taille n par nombre d'itérations) contenant la liste des vecteurs $x^{(k)}$ donnée par l'algorithme de gradient à pas fixe $t > 0$ avec moment $\beta > 0$ ainsi que la liste des valeurs `Fxk` de la fonctionnelle f aux points $x^{(k)}$. On veillera à ajouter une condition pour limiter le nombre d'itérations à 10 000.

On considère de nouveau la fonction quadratique $g(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$. Soit $(x^{(k)})$ la suite de vecteurs obtenue par l'algorithme de gradient à pas fixe $t > 0$ avec moment $\beta > 0$ appliqué à g. On introduit la suite de vecteurs
$$y^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ x^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$
et on pose également $y^\star = \begin{pmatrix} x^\star \\ x^\star \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$.

9. Montrer que la suite $y^{(k)} - y^\star$ vérifie une équation de récurrence de la forme
$$y^{(k+1)} - y^\star = T(y^{(k)} - y^\star)$$
(bien préciser l'expression de T).
10. Que faut-il faire pour établir la convergence de l'algorithme de gradient à pas fixe $t > 0$ avec moment $\beta > 0$ appliqué à g ? Peut-on faire le même raisonnement qu'à la question 4 ?

Solution de l'exercice 2.

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ car polynomiale de degré 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$f(x+h) = f(x) + \langle Ax - b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle.$$
Par Cauchy-Swharz, $\langle Ah, h\rangle \leqslant \|Ah\|\|h\| \leqslant \|A\|\|h\|^2 = o_{h\to 0}(\|h\|)$. Donc f est différentiable en x et $\nabla f(x) = Ax - b$. $x \mapsto \nabla f(x) = Ax - b$ est affine de matrice A, sa différentielle est $\nabla^2 f(x) = A$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla^2 f(x) = A$ est définie positive, donc f est strictement convexe. Ainsi f admet au plus un minimum global $x^\star$ et il est caractérisé par l'équation $\nabla f(x) = 0$. Or comme A est inversible,
$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$
Et donc f admet un unique minimum global $x^\star$ égal à $A^{-1}b$.
3. On peut (par exemple) partir du terme de droite.
$$(I_n - tA)(x^{(k)} - x^\star) = x^{(k)} - t(Ax^{(k)} - Ax^\star) - x^\star.$$
Or $Ax^\star = b$, et donc $Ax^{(k)} - Ax^\star = Ax^{(k)} - b = \nabla f(x^{(k)})$. Ainsi,
$$(I_n - tA)(x^{(k)} - x^\star) = x^{(k)} - t\nabla f(x^{(k)}) - x^\star = x^{(k+1)} - x^\star.$$
On peut aussi écrire les équations
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - t\nabla f(x^{(k)}) \quad \text{et} \quad x^\star = x^\star - t\nabla f(x^\star)$$
et les soustraire pour obtenir l'équation demandée. Par récurrence immédiate on obtient
$$x^{(k)} - x^\star = (I_n - tA)^k(x^{(0)} - x^\star).$$
4. Les vecteurs propres $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de A sont aussi des vecteurs propres de la matrice $I_n - tA$ dont les valeurs propres sont $1 - t\lambda_i$. Si on note
$$x^{(0)} - x^\star = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$
la décomposition de $x^{(0)} - x^\star$ dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, on a alors
$$x^{(k)} - x^\star = (I_n - tA)^k\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (I_n - tA)^k u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - t\lambda_i)^k u_i.$$
Alors $x^{(k)} - x^\star$ tend vers 0 quelque soit $x^{(0)}$ si et seulement si pour tout i la suite $\left((1 - t\lambda_i)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. On en déduit que $x^{(k)} - x^\star$ tend vers 0 quelque soit $x^{(0)}$ si et seulement si
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad |1 - t\lambda_i| < 1.$$

5. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On a $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$ et donc

$$1 - t\lambda_n \leqslant 1 - t\lambda_i \leqslant 1 - t\lambda_1.$$

Si $1 - t\lambda_i \geqslant 0$, alors on en déduit que

$$0 \leqslant 1 - t\lambda_i = |1 - t\lambda_i| \leqslant 1 - t\lambda_1 = |1 - t\lambda_1|.$$

Si $1 - t\lambda_i \leqslant 0$, alors on en déduit que

$$0 \leqslant -(1 - t\lambda_i) = |1 - t\lambda_i| \leqslant -(1 - t\lambda_n) = |1 - t\lambda_n|.$$

Dans les deux cas on a bien

$$|1 - t\lambda_i| \leqslant \max(|1 - t\lambda_1|, |1 - t\lambda_n|).$$

6. Finalement, il suffit que la condition $|1 - t\lambda_i| < 1$ soit vérifiée pour $i = 1$ et $i = n$. Or

$$|1 - t\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - t\lambda_1 < 1 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{2}{\lambda_1}$$

et de même, $|1 - t\lambda_n| < 1$ équivaut à $0 < t < \frac{2}{\lambda_n}$. Comme $\lambda_1 \leqslant \lambda_n$, $t < \frac{2}{\lambda_n}$ implique $t < \frac{2}{\lambda_1}$. Au final, l'algorithme converge pour t tel que $t \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$.
On vient de montrer que $\|I_n - tA\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \max(|1 - t\lambda_1|, |1 - t\lambda_n|)$. Or on a

$$\|x^{(k)} - x^\star\| = \|(I_n - tA)^k (x^{(0)} - x^\star)\| \leqslant \|I_n - tA\|^k_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \|(x^{(0)} - x^\star)\|,$$

d'où l'inégalité annoncée.

7. En traçant le graphe des deux fonctions, on voit que la fonction

$$t \mapsto \max(|1 - t\lambda_1|, |1 - t\lambda_n|)$$

est minimale lorsque les deux courbes se croisent, soit au point pour lequel

$$t\lambda_n - 1 = 1 - t\lambda_1$$

ce qui donne $t = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$.

8. Par rapport à la descente de gradient standard, la seule difficulté consiste à introduire une variable supplémentaire pour retenir la valeur x_{k-1}.

```
function [Xk,FXk] = algo_moment(x0, eps, t, bet, f, gradf)
// Initialisation
x = x0
k = 0
gfx = gradf(x)
sqngfx = gfx'*gfx
Xk = x
FXk = f(x)
// Premiere iteration
xk = x
x = xk-t*gfx
```

```
gfx = gradf(x)
sqngfx = gfx'*gfx
Xk = [Xk,x]
FXk = [FXk,f(x)]
k = k+1
xkm = xk // variable a l'iteration k-1
xk = x
// Iterations suivantes
while(sqngfx>eps^2 & k < 10000)
  x = xk-t*gfx + bet*(xk-xkm)
  gfx = gradf(x)
  sqngfx = gfx'*gfx
  Xk = [Xk,x]
  FXk = [FXk,f(x)]
  k = k+1
  xkm = xk
  xk = x
end
endfunction
```

9. On a, en utilisant la question 3,

$$\begin{aligned} x^{(k+2)} - x^\star &= x^{(k+1)} - t\nabla f(x^{(k+1)}) + \beta(x^{(k+1)} - x^{(k)}) - x^\star \\ &= (I_n - tA)(x^{(k+1)} - x^\star) + \beta((x^{(k+1)} - x^\star) - (x^{(k)} - x^\star)) \\ &= ((1+\beta)I_n - tA)(x^{(k+1)} - x^\star) - \beta I_n(x^{(k)} - x^\star). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$y^{(k+1)} - y^\star = \begin{pmatrix} x^{(k+2)} - x^\star \\ x^{(k+1)} - x^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\beta)I_n - tA & -\beta I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)} - x^\star \\ x^{(k)} - x^\star \end{pmatrix}.$$

10. Il faut montrer que T^n tend vers 0, ce qui est équivalent à dire que la valeur propre de module maximale (rayon spectral) est strictement inférieure à 1. Cette fois-ci la matrice n'est pas symétrique et donc pas forcément diagonalisable. Il faudrait faire une étude spécifique pour lier les valeurs propres de T à celles de A.