Optimisation

Master 1 Statistique & Data Science, Ingénierie Mathématique, 2021-2022

Corrigé de la feuille de TD/TP n°1 : Rappels et compléments de calculs différentiels

Exercice 1.

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $f(x) = Ax + b$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^n$.

Solution de l'exercice 1. Pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x+h) = A(x+h) + b = f(x) + Ah$$

donc f est différentiable en x et $\mathrm{d}f(x) = A$. Comme $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est constante, c'est une application $\mathcal{C}^\infty$ donc f est aussi $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 2.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer $\nabla f(x)$ pour tout x.
2. Quelle est l'expression de ∇f si A est symétrique ?
3. Quel est le gradient de l'application $x \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2$?

Solution de l'exercice 2.

1. Pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h), x+h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle \quad = f(x) + \frac{1}{2}\langle (A + A^T)x, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle. \end{aligned}$$

   Or par Cauchy-Shwarz, $|\frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\|Ah\|\|h\| \leqslant \frac{1}{2}\|A\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\|h\|^2$, donc c'est bien en o de $\|h\|$. D'où f est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x.$$

2. Si A est symétrique, alors $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)x = Ax$.
3. C'est le cas particulier où $A = I_n$ qui est symétrique, donc $\nabla f(x) = x$.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Déterminer une expression du gradient de $h = g \circ f$.

Application : Donner l'expression du gradient de $x \mapsto \|x\|^4$, $x \mapsto e^{\|x\|^2}$.

Exercice 4.

Cet exercice porte sur le théorème :

Théorème 1 (Condition nécessaire d'extremum local)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si la fonction f admet un extremum local en un point $x \in \Omega$ et si elle est différentiable en ce point, alors

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{(ou encore } \mathrm{d}f(x) = 0\text{)}.$$

1. Prouver le Théorème 1 en considérant l'application $\varphi : t \mapsto f(x + th)$ pour un vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ non nul quelconque.
2. Montrer que la conclusion du théorème est fausse si Ω n'est pas un ouvert.
3. Montrer que la réciproque du théorème est fausse : $\nabla f(x) = 0$ n'implique pas que x soit un extremum local.

Solution de l'exercice 4.

1. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Comme Ω est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $x + th \in \Omega$. La fonction $\varphi : t \mapsto f(x + th)$ est donc définie sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Elle est dérivable en $t = 0$, et d'après la formule de dérivation des fonctions composées, $\varphi'(0) = \mathrm{d}f(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$. φ ayant un extremum en $t = 0$, on sait que $\varphi'(0) = 0$ (en utilisant le cas bien connu des fonctions réelles de la variable réelle). On en déduit que $\langle \nabla f(x), h \rangle = 0$. Ceci est vrai pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, donc on a bien $\nabla f(x) = 0$.
2. On considère par exemple pour $n = 1$, $f(x) = x$ sur le domaine fermé $\Omega = [0, 1]$ qui admet un minimum local en $x = 0$ (au bord du domaine...).
3. Par exemple, toujours sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ a une dérivée nulle en 0 mais 0 n'est pas un extremum.