Optimisation

Master 1 Statistique & Data Science, Ingénierie Mathématique, 2021-2022

Feuille de TD/TP n°3 : Visualisation de fonctionnelles

Exercice 1.

On considère les quatre fonctions suivantes sur leurs domaines de définition respectifs :

(a) Une fonctionnelle quadratique sur $[-3, 3] \times [-3, 3]$:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - 3x_2 + 1.$$

(b) Fonction barrière logarithmique sur $]0, 1[\times]0, \frac{3}{2}[$:

$$f(x_1, x_2) = -\log(x_1) - \log(x_2) - \log(1 - x_1) - \log(\tfrac{3}{2} - x_2).$$

(c) Fonction de Rosenbrock sur $[-3, 3] \times [-1, 4]$:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

(d) Fonction d'Himmelblau sur $[-5, 5] \times [-5, 5]$:

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2.$$

En adaptant l'exemple de solution pour le cas (a) donné ci-dessous, pour chaque fonction :

— Définir la fonction f par `deff('z=f(x)','z= ...')` en veillant à ce que cette fonction renvoie un vecteur ligne $(f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \dots, f(x^{(m)}))$ lorsque l'entrée x est une liste de m points $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ donnée sous la forme d'une matrice de taille $2 \times m$.

— Evaluer f sur une grille discrétisant le domaine 2D.

— Représenter le graphe de f dans un repère tridimensionnel sur le domaine indiqué.

— Représenter le graphe des lignes de niveaux de f sur le domaine indiqué.

— Préciser si la fonction f est convexe sur son domaine de définition.

Exemple de solution pour 1 :

```
// Fonctionnelle quadratique
// Definir la fonction]
deff('z=f(x)','z= x(1,:).^2+2*x(2,:).^2+x(1,:).*x(2,:)+x(1,:)-3*x(2,:)+1'
// Definir les valeurs x1 et x2, les grilles correspondantes et evaluer f
x1 = linspace(-3,3,200); x2 = x1;
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
Z = f([X1(:),X2(:)]');
Z = matrix(Z,size(X1));

// valeur et position de la valeur minimale sur la grille
[zmin,imin] = min(Z(:));
```

```
x1min = X1(imin)
x2min = X2(imin)

// tracer la fonction
scf(1);clf();
surf(X1,X2,Z)

// Tracer les lignes de niveau
scf(2);clf();
contour2d(x1,x2,Z',50);
plot(x1min,x2min,'r+')  // dessine un + rouge au minimum
```

Exercice 2.

On reprend le premier exemple de l'Exercice 1 (fonctionnelle quadratique).

1. Donner la matrice symétrique A, le vecteur b et la constante c pour lesquelles

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - 3x_2 + 1 = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c.$$

2. Justifier que f est strictement convexe.
3. Vérifier par un calcul direct des dérivées partielles que l'on a bien $\nabla f(x) = Ax - b$.
4. Définir la fonction `deff('g=gradf(x)', 'g = ...')` qui à x associe $\nabla f(x)$ en veillant à ce que cette fonction renvoie une matrice de taille $2\times m$ $(\nabla f(x^{(1)}), \nabla f(x^{(2)}), \dots, \nabla f(x^{(m)}))$ lorsque l'entrée x est une liste de m points $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ donnée sous la forme d'une matrice de taille $2 \times m$.
5. Etant donné un point `x0`$= x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$, écrire une fonction

```
// Plan tangent:
function z=p(x0,x)
    z = ...
endfunction
```

qui à tout point `x`$= x = (x_1, x_2)^T$ associe la valeur du graphe du plan tangent au point $x^{(0)}$ en x (en faisant appel à `gradf`).

6. Pour différentes valeurs de `x0`$= x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$, visualiser simultanément le graphe de f et le graphe du plan tangent en $x^{(0)}$. En particulier on vérifiera visuellement que les plans tangents sont bien situés sous le graphe de f et que le plan tangent est horizontal au point $x^\star = A^{-1}b$ à déterminer.
7. On va maintenant visualiser le champ des gradients ∇f de f grâce à la fonction `champ`. Voici un exemple :

```
// Lignes de niveau et champ de gradients
x1 = linspace(-3,3,200); x2 = x1;
[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
Z = f([X1(:),X2(:)]');
Z = matrix(Z, size(X1));
xg1 = linspace(-3,3,40); xg2 = xg1; // grille plus grossiere
[XG1,XG2] = meshgrid(xg1,xg2);
```

```
G = gradf([XG1(:),XG2(:)]');
U = matrix(G(1,:),size(XG1));
V = matrix(G(2,:),size(XG2));
scf(2);
clf;
contour2d(x1,x2,Z',50);
plot2d(xstar(1),xstar(2),-1,"000");
champ(xg1,xg2,U',V',0.5);
isoview(-3,3,-3,3)
```

Quel est l'intérêt de la ligne `isoview(-3,3,-3,3)` ?

8. Expliquer l'intérêt du script suivant (à exécuter à la suite des lignes de la question précédente) :

```
NG = sqrt(U.^2+V.^2);
NG = NG+(NG==0); // 1 a le pace de 0 (pour eviter de diviser par zero
NU = U./NG;
NV = V./NG;
scf(3);
clf;
contour2d(x1,x2,Z',50);
plot2d(xstar(1),xstar(2),-1,"000");
champ(xg1,xg2,NU',NV',0.5);
isoview(-3,3,-3,3)
```

Exercice 3.

Soient p vecteurs $a^{(1)},\dots,a^{(p)} \in \mathbb{R}^n$, et $b \in \mathbb{R}^p$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} e^{\langle a^{(k)},x\rangle + b_k}.$$

On pose alors $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice dont chaque ligne i correspond au vecteur $(a^{(i)})^T$, à savoir

$$A = \begin{pmatrix} (a^{(1)})^T \\ (a^{(2)})^T \\ \vdots \\ (a^{(p)})^T \end{pmatrix} = \left(a_j^{(i)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est la composée $f = h \circ g$ entre $g : x \mapsto Ax + b$ et $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction à préciser.
2. Justifier que f est deux fois différentiable et calculer les expressions du gradient $\nabla f(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^{(2)} f(x)$ de f en tout point x.
3. Justifier que f est convexe.
4. Préciser A et b pour le cas particulier où $n = 2$, $p = 3$ et
$$f(x) = e^{x_1+3x_2-0.1} + e^{x_1-3x_2-0.1} + e^{-x_1-0.1}.$$
5. On suppose A et b fixés et définis en mémoire dans Octave. Définir deux fonctions `f = @(x)` et `gradf = @(x)` qui évaluent respectivement $f(x)$ et $\nabla f(x)$ en s'assurant que ces fonctions puissent être évaluées sur des listes de m points $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ données sous la forme d'une matrice de taille $n \times m$.

6. Afficher le graphe de la fonction exemple sur le domaine $[-2, 1] \times [-1, 1]$.
7. Afficher sur un même graphe les lignes de niveaux de f ainsi que les directions du gradient $\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ sur le domaine $[-2, 1] \times [-1, 1]$.