Groupes de tresses, groupes d'Artin, groupes de Garside : une introduction

Thomas Gobet

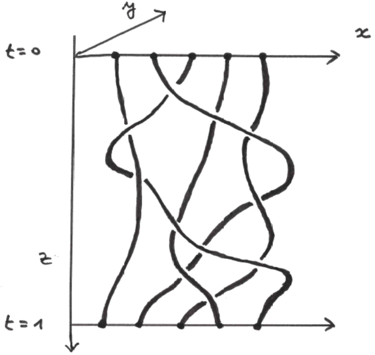
Institut Denis Poisson, Université de Tours

Séminaire Bourbaki du vendredi,
IHP, Paris,
17 juin 2022.

Tresses géométriques

Soit $I = [0,1]$, $n \geq 2$. Une *tresse géométrique* à n brins est un sous-ensemble $\beta \subseteq \mathbb{R}^2 \times I$ constitué de n espaces topologiques disjoints homéomorphes à I (appelés "brins"), tels que

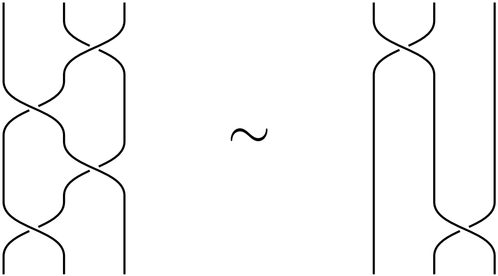
- La projection $\mathbb{R}^2 \times I \to I$ restreinte à chaque brin est un homéomorphisme,
- $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(i, 0, 0) \mid i = 1, \ldots, n\}$,
- $\beta \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(i, 0, 1) \mid i = 1, \ldots, n\}$.



Une tresse géométrique à 5 brins.

Tresses géométriques, II

- Deux tresses géométriques à n brins β, β' sont *isotopes* (noté $\beta \sim \beta'$) si β peut être déformée continûment en β' dans l'ensemble des tresses géométriques à n brins.

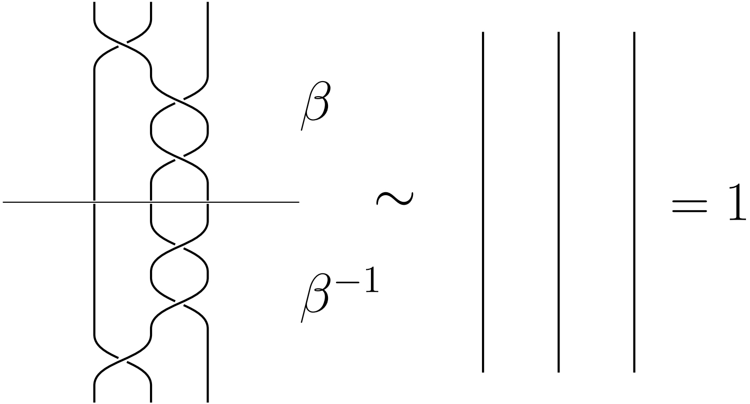


- On pose $\mathcal{B}_n = \{\text{tresses géométriques à } n \text{ brins}\}/\sim$.
- On peut définir un produit $\beta\beta'$ de deux tresses géométriques à n brins β, β' par concaténation.

Tresses géométriques, III

Proposition (Artin 1925)

Le produit de tresses géométriques est compatible avec la relation d'équivalence $\sim$. Il induit une structure de groupe sur $\mathcal{B}_n$.



Mots de tresses

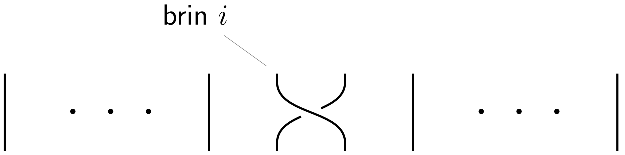
- Existe-t-il un algorithme permettant de déterminer en temps fini si deux tresses à n brins sont isotopes ?
- Posons

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ si } |i-j| = 1, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1. \end{array} \right\rangle$$

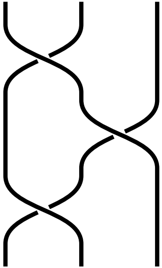
Théorème (Artin 1925)

On a $B_n \cong \mathcal{B}_n$. L'isomorphisme envoie σ_i sur la (classe d'isotopie de) la tresse où tous les brins sont verticaux sauf le $(i+1)^{\text{ème}}$ qui croise le $i^{\text{ème}}$ une seule fois (par-dessous).

$\sigma_i \mapsto$

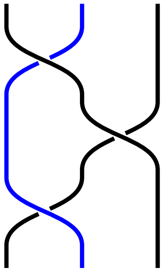


Relations de tresses



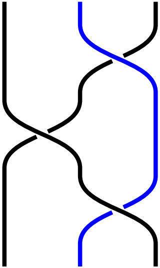
$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

Relations de tresses



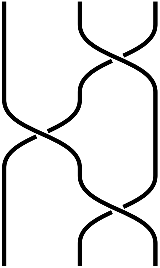
$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

Relations de tresses



$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

Relations de tresses



$$\sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

Mots de tresses, II

- Chaque élément β de B_n possède une infinité de mots en les $\sigma_i^{\pm 1}$ qui le représente. Résoudre le problème d'isotopie des tresses dans $\mathcal{B}_n$ revient ainsi à résoudre le *problème des mots* dans B_n, i.e., à exhiber un algorithme permettant en temps fini de déterminer si deux mots de tresses représentent le même élément de B_n (de façon équivalente, de déterminer si un mot en les $\sigma_i^{\pm 1}$ représente la tresse triviale).

Théorème (Artin 1925, 1947)

Le groupe B_n admet une solution au problème des mots.

(idée : $B_n \cong \mathcal{B}_n$ agit sur le groupe libre $F_n = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$ par automorphismes. Cette action est fidèle. Pour $\beta \in B_n$, il suffit alors de vérifier si $\beta \cdot X_i = X_i$ pour tout i pour déterminer si $\beta = 1$).

L'approche de Garside

- Le *monoïde de tresses positif* est défini par

$$B_n^+ = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ si } |i-j| = 1, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1. \end{array} \right\rangle^+$$

- Le problème des mots est trivial dans B_n^+.

Théorème (Garside 1969)

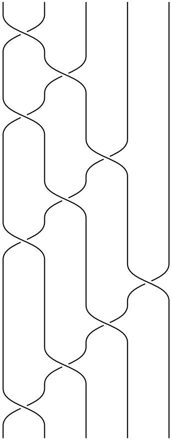
Le monoïde B_n^+ se plonge dans B_n.

(Interprétation géométrique : si deux tresses avec uniquement des croisements positifs sont isotopes, alors il existe une isotopie qui transforme l'une en l'autre sans ajouter de croisements négatifs)

- En effet, B_n^+ vérifie les *conditions de Ore* : il est simplifiable à gauche et à droite ($(ab = ac \Rightarrow b = c)$ et $(ba = ca \Rightarrow b = c)$), et toute paire d'éléments admet un multiple commun à droite/gauche. Il s'injecte donc dans son groupe de fractions, qui est de même présentation.

L'approche de Garside, II

- On peut donc écrire tout élément $\beta \in B_n$ sous la forme $x^{-1}y$ ou uv^{-1}, avec $x, y, u, v \in B_n^+$.
- En pratique : soit $\Delta = \sigma_1(\sigma_2\sigma_1)\cdots(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\cdots\sigma_2\sigma_1)$
- On se convainc que pour tout i, il existe $R(\sigma_i) \in B_n^+$ tel que $\Delta = \sigma_i R(\sigma_i)$.
- On a $\Delta\sigma_i\Delta^{-1} = \sigma_{n-i}$ pour tout i.
- Soit $\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in B_n$, avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Si $\varepsilon_{i_j} = -1$, on remplace $\sigma_{i_j}^{-1}$ par $R(\sigma_{i_j})\Delta^{-1}$. On déplace ensuite tous les Δ^{-1} à droite.



Exemple

Soit $\beta = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1} \in B_3$. On a $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1, R(\sigma_1) = \sigma_2\sigma_1$.

$\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1} \rightsquigarrow R(\sigma_1)\Delta^{-1}\sigma_2 R(\sigma_1)\Delta^{-1} \rightsquigarrow R(\sigma_1)\sigma_1^2\sigma_2\Delta^{-2}$

L'approche de Garside, III

- Grâce à la procédure ci-dessus, on peut écrire tout $\beta \in B_n$ sous la forme uv^{-1} avec $u, v \in B_n^+$. Déterminer si $\beta = 1$ revient à déterminer si $u = v$ dans B_n^+, ce qui devient trivial.
  $\rightsquigarrow$ solution alternative au problème des mots.

Définition

Soient $a, b \in B_n^+$. On dit que a divise b à gauche (ou que b est un multiple de a à droite) s'il existe c dans B_n^+ tel que $ac = b$. On définit de même la division à droite.

Théorème (Brieskorn-Saito 1972)

Le monoïde B_n^+ muni de la relation d'ordre $\leq_G$ (resp. $\leq_D$) induite par la divisibilité à gauche (resp. à droite) forme un treillis.

- On peut ainsi représenter tout élément $\beta \in B_n$ sous la forme d'une unique fraction xy^{-1} *irréductible*, i.e., où x et y sont sans facteur commun à droite.

Quelques propriétés de Δ

- L'élément Δ est le ppcm (à droite ou à gauche) des générateurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$.
- Les diviseurs à gauche de Δ coïncident avec ses diviseurs à droite. Ce sont les *tresses positives simples*, i.e., les tresses qu'on peut représenter par une tresse géométrique où tous les croisements sont positifs, et où deux brins distincts se croisent au plus une fois. Elles engendrent B_n et sont en bijection avec les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On appelle un élément Δ d'un monoïde avec ces propriétés un *élément de Garside*.
- En remplaçant le système de générateurs $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ par $\mathrm{Div}(\Delta)$, on obtient (par le même type de mécanismes) des solutions plus efficaces au problème des mots.

Centre et absence de torsion

Théorème (Chow 1948, Garside 1969)

On a $Z(B_n) = \langle \Delta^2 \rangle \cong \mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$.

- On peut étendre l'ordre $\leq_G$ (ou $\leq_D$) à B_n en imposant $x \leq_G y \Leftrightarrow x^{-1}y \in B_n^+$ (ou $x \leq_D y \Leftrightarrow yx^{-1} \in B_n^+$). On obtient ainsi une structure de treillis sur B_n.

Théorème (Fox-Neuwirth 1962)

Le groupe B_n est sans torsion.

Démonstration.

Soit $\beta \in B_n$. Supposons que $\beta^m = 1$ pour un $m > 0$. Considérons le ppcm P (à droite) de $\{1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{m-1}\}$. Alors βP est le ppcm de $\{\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots, \underbrace{\beta^m}_{=1}\}$ et donc

$\beta P = P$, ce qui force $\beta = 1$. $\square$

Généralisation : les groupes d'Artin

- Soit Γ un graphe simple d'ensemble de sommets S, où toute arête (s,t) est étiquetée par un élément $m_{st} = m_{ts}$ de $\mathbb{Z}_{\geq 3} \cup \{+\infty\}$. Si s et t ne sont pas reliés par une arête on pose $m_{st} = 2$. On définit le groupe

$$W_\Gamma = \left\langle s \in S \;\middle|\; \begin{array}{c} s^2 = 1 \ \forall s \in S, \\ \underbrace{sts\cdots}_{m_{st} \text{ facteurs}} = \underbrace{tst\cdots}_{m_{ts} \text{ facteurs}} \ \forall s \neq t \in S \end{array} \right\rangle,$$

où il est entendu qu'aucune relation n'est imposée entre s et t si $m_{st} = m_{ts} = +\infty$. C'est un *groupe de Coxeter*.

Exemples

1. Si $|S| = 2$, alors W_Γ est un groupe diédral.
2. Si $\Gamma = s_1 \overset{3}{\text{---}} s_2 \overset{3}{\text{---}} \cdots \overset{3}{\text{---}} s_{n-1}$, alors $W_\Gamma \cong \mathfrak{S}_n$ ($s_i \mapsto (i, i+1)$). La présentation obtenue est la prés. d'Artin de B_n avec les relations $\sigma_i^2 = 1$ en plus.

Généralisation : les groupes d'Artin, II

- Soit (W, S) un système de Coxeter. Le *groupe d'Artin* associé à (W, S) est le groupe B_W engendré par une copie $\mathbf{S}$ de S de présentation

$$B_W = \left\langle \mathbf{s} \in \mathbf{S} \;\middle|\; \underbrace{\mathbf{sts}\cdots}_{m_{st} \text{ facteurs}} = \underbrace{\mathbf{tst}\cdots}_{m_{ts} \text{ facteurs}} \;\forall \mathbf{s} \neq \mathbf{t} \in \mathbf{S} \right\rangle$$

- Le *monoïde d'Artin* (ou monoïde positif) B_W^+ est

$$B_W^+ = \left\langle \mathbf{s} \in \mathbf{S} \;\middle|\; \underbrace{\mathbf{sts}\cdots}_{m_{st} \text{ facteurs}} = \underbrace{\mathbf{tst}\cdots}_{m_{ts} \text{ facteurs}} \;\forall \mathbf{s} \neq \mathbf{t} \in \mathbf{S} \right\rangle^+$$

Exemple

1. On a $B_{\mathfrak{S}_n} \cong B_n$.
2. Lorsque (W, S) est universel, i.e., lorsque $m_{st} = \infty$ $\forall s \neq t \in S$, alors B_W est isomorphe au groupe libre à $|S|$ générateurs.

Conjectures et questions (algébriques)

Conjecture

Tout groupe d'Artin B_W admet une solution au problème des mots.

Conjecture

Tout groupe d'Artin B_W est sans torsion.

Conjecture

Tout groupe d'Artin B_W avec $W = W_\Gamma$ infini et irréductible (i.e., W est infini et Γ est connexe) possède un centre trivial.

Question

Tout groupe d'Artin B_W est-il linéaire ?

Conjecture (Rouquier, 2004)

Tout groupe d'Artin est 2-linéaire.

Liens entre les conjectures

- Il existe des liens entre ces conjectures. La 2-linéarité implique une solution au problème des mots, tout comme la linéarité (sous de bonnes hypothèses sur le corps de base).
- L'absence de torsion et la conjecture sur le centre sont un corollaire d'une autre conjecture, la conjecture du $K(\pi, 1)$.
- En type sphérique, i.e., lorsque W est fini, toutes ces conjectures et questions sont résolues. Toutes peuvent s'obtenir par une généralisation de l'approche et des techniques de Garside...

Axiomatisation : les monoïdes de Garside

Définition (Dehornoy-Paris 1999)

Un monoïde M est un monoïde de Garside si

1. *M est simplifiable à gauche et à droite,*
2. *Il existe une fonction $\lambda : M \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ telle que $\forall a, b \in M$, $\lambda(ab) \geq \lambda(a) + \lambda(b)$ et $a \neq 1 \Rightarrow \lambda(a) \neq 0$.*
3. *Les ordres partiels $\leq_G$, $\leq_D$ induits par la divisibilité à gauche et à droite munissent M de structures de treillis.*
4. *Il existe un élément $\Delta \in M$ tel que l'ensemble $\mathrm{Div}(\Delta)$ des diviseurs à gauche de Δ coïncide avec l'ensemble des diviseurs de Δ à droite, et $\mathrm{Div}(\Delta)$ engendre M.*
5. *L'ensemble $\mathrm{Div}(\Delta)$ est fini.*

- $((1)$ et $(3)) \Rightarrow M$ s'injecte dans le groupe $G(M)$ de même présentation (conditions de Ore).
- $(2) \Rightarrow \forall a \in M, \sup\{k \in \mathbb{N} \mid a = a_1 a_2 \cdots a_k, a_i \neq 1\} < \infty$

Groupes de Garside

Définition

Un groupe G est un groupe de Garside s'il existe un monoïde de Garside M tel que $G \cong G(M)$.

Théorème

Un groupe de Garside possède une solution au problème des mots et est sans torsion.

Proposition

Il existe une puissance de Δ qui est centrale dans $G(M)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathrm{Div}(\Delta)$. Alors $x\Delta^{-1} = (\Delta x^{-1})^{-1} \in \mathrm{Div}(\Delta)^{-1}$, et donc $\Delta x \Delta^{-1} \in \mathrm{Div}(\Delta)$. Ainsi la conjugaison par Δ dans $G(M)$ préserve $\mathrm{Div}(\Delta)$, qui est fini. Il existe donc une puissance k telle que la conjugaison par Δ^k agisse par l'identité sur $\mathrm{Div}(\Delta)$, qui engendre M (et donc $G(M)$). $\square$

Exemples

- Le groupe $\mathbb{Z}^n$ est de Garside, avec $M = \mathbb{N}^n$ et $\Delta = (1, 1, \ldots, 1)$. On écrit $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ comme fraction irréductible $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$ en posant $\alpha^+ = (\max\{a_i, 0\})_{i=1,\ldots,n}$ et $\alpha^- = (\min\{a_i, 0\})_{i=1,\ldots,n}$
- Le groupe B_n est de Garside, avec $M = B_n^+$ et Δ défini précédemment.
- (Birman-Ko-Lee, Bessis) Il existe un monoïde de Garside alternatif pour B_n, le *monoïde de Birman-Ko-Lee*, ou *monoïde dual*. Il est engendré par une copie de l'ensemble des transpositions de $\mathfrak{S}_n$.
- (Dehornoy-Paris) Le monoïde $M = \langle\, x, y \mid x^n = y^m \,\rangle$, où $m, n \geq 1$, est un monoïde de Garside, avec $\Delta = x^n = y^m$ (central). On a $\mathrm{Div}(\Delta) = \{1, x, \ldots, x^{n-1}, y, \ldots, y^{m-1}, \Delta\}$. Le groupe $G(M)$ est un groupe de noeud torique lorsque n et m sont premiers entre eux.

Les groupes d'Artin de type sphérique

- Un groupe d'Artin est de *type sphérique* s'il est associé à un système de Coxeter (W, S) où W est fini.
- Dans le cas de B_n, le groupe de Coxeter associé est $\mathfrak{S}_n$. La restriction de la projection $B_n \to \mathfrak{S}_n$ aux diviseurs de Δ est une bijection.
- Les treillis $(\mathrm{Div}(\Delta), \leq_G)$ et $(\mathrm{Div}(\Delta), \leq_D)$ correspondent à deux structures d'ensemble partiellement ordonné bien connues sur $\mathfrak{S}_n$, qui se généralisent à tout groupe de Coxeter : l'ordre de Bruhat faible à gauche et à droite.
- L'image de Δ dans $\mathfrak{S}_n$ est le plus long élément w_0 de $\mathfrak{S}_n$. Tout groupe de Coxeter *fini* possède un plus long élément pour la longueur par rapport à S.
- Moralité : la structure de Garside donnée par B_n^+ "relève" à $B_W^+ = B_n^+$ certaines propriétés combinatoires du groupe de Coxeter $W = \mathfrak{S}_n$.

Les groupes d'Artin de type sphérique, II

Théorème (Brieskorn-Saito 1972, Deligne 1972)

Soit (W, S) un système de Coxeter avec W fini. Alors B_W^+ est un monoïde de Garside, d'élément de Garside $\Delta = \mathbf{w_0}$. En particulier le problème des mots admet une solution dans B_W. De plus, le centre de B_W est cyclique infini engendré par une puissance de Δ.

- Les conjectures mentionnées plus haut sont connues pour certaines familles de groupes d'Artin, mais aucune n'est résolue en toute généralité.

Quid des groupes d'Artin généraux ?

Théorème (Paris, 2002)

Soit (W, S) un système de Coxeter arbitraire. Alors B_W^+ s'injecte dans B_W.

- L'approche de Garside ne se généralise pas en tant que telle à B_W où W est arbitraire (pas d'élément le plus long dans W, pas d'élément de Garside dans B_W^+).
- Le monoïde alternatif de Birman, Ko et Lee pour B_n peut être défini pour un système de Coxeter arbitraire. Il est de Garside lorsque W est fini par les travaux de Bessis (et même lorsque W est un groupe de réflexions complexe bien engendré), et de quasi-Garside pour certains groupes non sphériques : certains W affines (Digne), et les groupes universels (Bessis). Qu'en est-il en général ?

Merci de votre attention !