

Rappel : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si X prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et si $P(X = 1) = p$.

Cours Soit Ω un univers. On note \mathcal{F} la tribu sur Ω constituée de l'ensemble des parties de Ω . Donner la définition d'une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

Exercice 1 : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On pose $X = X_1 + \dots + X_n$.

1. Expliciter, sans justification, la loi de X .
2. Donner la valeur de l'espérance de X . Prouver ce résultat.
3. Soit λ un réel. Établir l'égalité suivante :

$$E(\exp(\lambda X)) = ((1 - p) + p \exp(\lambda))^n.$$

4. Les variables aléatoires X et X_1 sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 : Igor vous propose de jouer toute la nuit au jeu suivant. À chaque partie, l'un de vous deux lance un dé honnête. Si le résultat est 1 ou 2 vous gagnez 4 euros. Si le résultat est 3 vous perdez 1 euro. Si le résultat est 4, 5 ou 6 vous perdez 2 euros. Acceptez-vous de jouer ? Justifiez aussi complètement et précisément que possible votre réponse.

Exercice 3 : Alice et Bob jouent aux fléchettes. À chaque manche, Alice gagne avec une probabilité p . La partie se déroule en trois manches gagnantes (le premier à remporter trois manches gagne, la partie se fait donc en trois, quatre ou cinq manches). Avec quelle probabilité Alice gagne-t-elle ?

Exercice 4 : On ne cherchera pas à expliciter la modélisation dans cet exercice. Les résultats numériques finaux seront donnés sous forme de fractions (si possibles irréductibles).

Vous disposez de deux pièces. L'une est équilibrée : quand on la lance, elle tombe sur pile avec une probabilité de $1/2$, sur face avec une probabilité de $1/2$. L'autre est pipée : quand on la lance, elle tombe sur pile avec une probabilité de $1/10$, sur face avec une probabilité de $9/10$.

1. Vous choisissez l'une des deux pièces au hasard et la lancez une fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur pile ?
2. Vous choisissez l'une des deux pièces au hasard et la lancez une fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur face ?
3. Vous choisissez l'une des deux pièces au hasard et la lancez deux fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe exactement une fois sur pile ?
4. Vous choisissez l'une des deux pièces au hasard et la lancez une fois. Elle tombe sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée ?

5. Vous choisissez l'une des deux pièces au hasard et la lancez deux fois. Elle tombe exactement une fois sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée ?
6. Vous choisissez l'une des deux pièces au hasard et la lancez deux fois. Elle tombe exactement une fois sur pile. Vous la lancez une troisième fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur pile ?

Exercice 5 :

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$. Donner une fonction f de $\{1, \dots, 6\}$ dans $\{0, 1\}$ telle que $f(X)$ soit une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$. (Il s'agit donc de définir convenablement $f(1), f(2), \dots, f(6)$.) Si vous disposez d'un dé honnête, vous pouvez donc simuler le résultat d'une variable aléatoire de loi Bernoulli de paramètre $1/3$ de la manière suivante : vous lancez votre dé ; vous notez x le résultat ; $f(x)$ simule le résultat d'une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/3$.
2. Comment simuler avec votre dé le résultat d'une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$? Justifiez votre réponse en vous reposant sur une modélisation, comme dans la première question.
3. Comment simuler avec votre dé le résultat d'une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $5/36$? Justifiez votre réponse en vous reposant sur une modélisation, comme dans la première question.
4. Comment simuler avec votre dé le résultat d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \dots, 5\}$? Je ne demande pas de justifications.
5. Comment simuler avec votre dé le résultat d'une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $1/5$? Je ne demande pas de justifications.
6. Comment simuler avec votre dé le résultat d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$? Je ne demande pas de justifications.