Probabilités et statistiques
M1 - 2009-2010 - Examen - Session 2

Exercice 1 : Pour ces deux questions indépendantes, je demande une réponse rapide en quelques lignes.

1. On considère un grand nombre d'échantillons indépendants de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée réduite. Pour chacun de ces échantillons, on teste l'hypothèse "la moyenne est nulle" avec un seuil de $\alpha = 0.05$. Quelle sera (approximativement) la proportion des échantillons pour lesquels l'hypothèse sera acceptée ?
2. Que gagne-t-on si on diminue le seuil d'un test ? Que perd-on ?

Exercice 2 : On pose

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

et on note V le vecteur $(-1, 0, 1)$.

1. Montrer que K est une matrice symétrique positive. On note dans la suite (X, Y, Z) un vecteur aléatoire gaussien d'espérance V et de matrice de covariance K.
2. Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X + Y + 1, Y - Z)$?
3. Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que $X + \lambda Y$ et X soient indépendants.
4. En déduire $E(Y|X)$.

Exercice 3 : Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $A = X(X + Y)Z^2$. Calculer :

1. $E(A|X)$.
2. $E(A|Y)$.
3. $E(A|Z)$.
4. $E(A)$.

Exercice 4 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m est un réel et σ un réel strictement positif. Pour tout $s > 0$ on pose :

$$C_n^s = \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

où

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Montrer que si $s = \sigma$ alors C_n^s suit la loi du khi-deux à $n - 1$ degrés de liberté [1]. On pourra pour cela utiliser le théorème de Cochran.

[1] La loi du khi-deux à d degrés de liberté est la loi de la somme des carrés de d v.a.i.i.d. réelles de loi gaussienne centrée réduite

2. Soit $x_1, \ldots, x_n$ un échantillon issu de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m est un réel et σ un réel strictement positif (tous deux inconnus). Décrire un test statistique permettant de déterminer si l'hypothèse $\sigma = 10$ est plausible.

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X est de carré intégrable.

1. Montrer :
$$\mathrm{var}(X) = \min_{x \in \mathbb{R}} E\big((X - x)^2\big).$$
2. On suppose que X est à valeurs dans le segment $[a, b]$. Montrer :
$$\mathrm{var}(X) \leq (b - a)^2/4.$$
3. Dans quels cas la borne précédente est-elle atteinte ?

Exercice 6 :

1. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Cauchy standard. Autrement dit, la loi de X admet pour densité la fonction définie par
$$x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}.$$
   (a) Montrer, pour tout réel t, l'égalité suivante :
$$E(\exp(itX)) = \exp(-|t|).$$
   On pourra utiliser le résultat d'inversion suivant. Si f est une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et si sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ définie par
$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(itx) dt$$
   est intégrable, alors, pour tout réel t :
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \exp(-itx) dx.$$
   (b) Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et suivant la même loi. Montrer que $X + Y$ et $2X$ ont la même loi.
2. Soient X, Y, X' et Y' quatre variables aléatoires réelles. On suppose qu'elles suivent la même loi. On suppose également que X' et Y' sont indépendantes.
   (a) Si X et Y sont indépendantes, est-ce que $X + Y$ et $X' + Y'$ ont la même loi ?
   (b) Si $X + Y$ et $X' + Y'$ ont la même loi, est-ce que X et Y sont indépendantes ?
   (c) Si X et Y sont indépendantes, est-ce que $\alpha X + \beta Y$ et $\alpha X' + \beta Y'$ ont la même loi pour tous réels α, β ?
   (d) Si $\alpha X + \beta Y$ et $\alpha X' + \beta Y'$ ont la même loi pour tous réels α, β, est-ce que X et Y sont indépendantes ?