

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I

**Étude de quelques problèmes ouverts  
dans le domaine des quasicristaux  
aléatoires et déterministes**

Thèse soutenue le 20 décembre 2004

par

**Jean-Baptiste GOUÉRÉ**

en vue de l'obtention du

**Diplôme de Doctorat**

(arrêté du 30 mars 1992)

**Spécialité : Mathématiques**

Composition du jury :

Enrique ANDJEL	Professeur (Université de Provence), Président
François BACCELLI	Directeur de recherche INRIA (ENS), Rapporteur
André GOLDMAN	Professeur (Université Lyon 1), Directeur de thèse
Ilya MOLCHANOV	Professeur (Université de Berne, Suisse)
Didier PIAU	Professeur (Université Lyon 1)
Boris SOLOMYAK	Professeur (Université de Washington, USA), Rapporteur



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier André Goldman, sous la direction duquel cette thèse a été effectuée, pour m'avoir fait profiter de l'étendue de ses connaissances et de la richesse de son imagination, ainsi que pour les encouragements qu'il m'a adressés et l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

François Baccelli et Boris Solomyak ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je leur suis reconnaissant du soin qu'ils ont apporté à la lecture du texte. Je remercie également Boris Solomyak de m'avoir invité à Banff pour exposer mes résultats.

Je tiens à remercier chaleureusement Didier Piau pour sa disponibilité, pour ses remarques et suggestions sur mon travail, ainsi que pour avoir accepté de participer à mon jury.

Je remercie vivement Enrique Andjel et Ilya Molchanov d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Je tiens également à remercier tous les membres et anciens membres du laboratoire qui m'ont apporté leur aide pour la thèse ou les enseignements, ou qui ont contribué à créer au sein du laboratoire cette ambiance amicale dont j'ai tant bénéficié.

Pour conclure, je tiens à remercier tous mes proches.



## Résumé

Nous étudions dans cette thèse des questions qui trouvent leur origine dans l'étude des quasicristaux.

Le premier thème se rapporte à la diffraction. Nous nous plaçons dans un cadre stochastique et montrons que la mesure de diffraction d'un processus ponctuel stationnaire, ergodique et de carré intégrable existe toujours et coïncide avec la transformée de Fourier de l'intensité de la mesure de Palm de ce processus. Nous utilisons cette connexion pour étudier la méthode "couper et projeter" dans ce cadre aléatoire et explicitons une relation entre la mesure de diffraction du processus projeté et de celle du processus initial. A titre d'exemple, nous étudions les sous-ensembles aléatoires d'un réseau, ce qui nous permet notamment d'obtenir des ensembles dont la mesure de diffraction comprend une composante singulière explicite. Nous utilisons enfin cette connexion avec la mesure de Palm pour démontrer qu'un processus ponctuel est presque sûrement un quasicristal si et seulement si le spectre du système dynamique associé est discret. Nous démontrons également la contrepartie déterministe de ce dernier résultat : un ensemble est un quasicristal si et seulement si il est presque périodique pour la topologie de Besicovitch.

Le deuxième thème s'inspire des problèmes liés à la diffusion dans les quasicristaux. Nous introduisons un modèle d'évolution markovienne d'un système de particules dont le pas élémentaire consiste à choisir un point au hasard et à y déplacer la particule la plus proche. Dans le cas d'un nombre fini de particules sur le cercle, nous établissons l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire et prouvons la convergence vers cette distribution. Nous montrons également une propriété de répulsion entre les particules sous la distribution stationnaire en établissant un équivalent logarithmique en zéro de la queue de la loi de la distance minimale entre deux particules. Dans le cas d'un nombre infini de particules sur la droite, nous prouvons des propriétés de régularité du processus et en déduisons l'existence et l'unicité d'une distribution invariante par translations et par la dynamique.

## Mots-clés

Probabilité, quasicristaux, géométrie stochastique, mesure de Palm, presque-périodicité, analyse harmonique, mesure spectrale, théorie ergodique, système de particules en interaction, chaîne de Markov, processus de Markov, mesure stationnaire.

## Codes AMS (2000 Mathematics Subject Classification)

11K70, 37A45, 37A50, 52C23, 60D05, 60G55, 60J10, 60J25, 60K35, 82C22.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Diffraction et mesure de Palm</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Autocorrélation et diffraction . . . . .	18
1.3 Autocorrélation et mesure de Palm . . . . .	20
1.4 Mesures de diffraction périodiques . . . . .	22
1.4.1 Généralités . . . . .	22
1.4.2 Un exemple de mesure singulière . . . . .	25
1.5 Ensembles obtenus par la méthode “cut-and-project” . . . . .	27
1.5.1 Principe . . . . .	27
1.5.2 Exemple : sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	30
<b>2 Quasicristaux et presque-périodicité</b>	<b>39</b>
2.1 Abstract . . . . .	39
2.2 Introduction and statement of the main results . . . . .	39
2.3 Preliminary results . . . . .	45
2.3.1 Besicovitch topology . . . . .	45
2.3.2 Discrete measure and almost periodicity . . . . .	47
2.3.3 Autocorrelation . . . . .	51
2.4 Characterization of Patterson sets . . . . .	53
2.5 Point processes and stochastic Patterson sets . . . . .	55
2.6 Example: deformed model sets . . . . .	59
2.7 Appendix: some proofs . . . . .	60
<b>3 Système de particules avec migration</b>	<b>67</b>
3.1 Introduction . . . . .	67
3.2 Système fini de particules . . . . .	70
3.2.1 Mesure stationnaire . . . . .	70
3.2.2 Densité de la distribution stationnaire . . . . .	72
3.2.3 Système de deux particules . . . . .	75
3.2.4 Répulsion . . . . .	76
3.3 Système infini de particules . . . . .	78
3.3.1 Construction du processus . . . . .	78
3.3.2 Régularité . . . . .	84
3.3.3 Mesure invariante . . . . .	90

3.4 Appendice : simulations . . . . .	97
<b>4 Annexes</b>	<b>101</b>
4.1 Diffraction d'un processus de renouvellement . . . . .	101
4.2 Topologie et tribus sur les ensembles ponctuels . . . . .	105
4.2.1 Ensembles localement finis . . . . .	105
4.2.2 Ensemble uniformément discrets . . . . .	110
4.3 Presque périodicité . . . . .	115
4.3.1 Fonctions presque-périodiques . . . . .	115
4.3.2 Mesures presque-périodiques . . . . .	117
4.3.3 Extension . . . . .	119
4.4 Théorème ergodique uniforme . . . . .	120
<b>Problèmes ouverts</b>	<b>127</b>
<b>Publications</b>	<b>129</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>

# Introduction

## Cristaux et quasicristaux

Historiquement, les cristaux ont tout d'abord été définis comme des solides possédant des faces planes s'intersectant selon des angles spécifiques. Au début du dix-neuvième siècle, avec les travaux de René-Just Haüy et la naissance de la théorie de la cristallographie, ce point de vue macroscopique a laissé la place à un point de vue microscopique. La théorie de la cristallographie repose sur l'hypothèse selon laquelle les cristaux consistent en un empilement périodique d'une unique structure élémentaire. Cette théorie fut initialement confirmée par sa capacité à permettre d'expliquer et de calculer les angles formés par les faces d'un cristal. Elle fut unanimement adoptée après les études de diffraction des rayons X par les cristaux conduites par Max von Laue en 1912 puis par William H. et William L. Bragg. Jusqu'en 1982, tous les solides microscopiquement ordonnés qui furent étudiés se sont révélés compatibles avec cette hypothèse de périodicité microscopique. Ces deux propriétés, ordre et périodicité, étaient par conséquent considérées comme équivalentes. Cette vision des choses fut remise en cause par la découverte en 1982 par Shechtman et al. [66] d'un solide possédant d'une part un spectre de diffraction essentiellement discret - signe de l'existence d'un ordre microscopique - et d'autre part des symétries interdisant sa périodicité. La découverte de ce solide, désigné ultérieurement par le terme de quasicristal, ainsi que les découvertes similaires qui ont suivi, ont conduit à une révision de la notion de cristal, actuellement défini comme un solide possédant un spectre de diffraction essentiellement discret [56]. Les cristallographes définissent ainsi les cristaux comme des solides dont la structure microscopique est ordonnée, mais restent vagues sur la nature précise de cet ordre. Suivant la définition la plus répandue, un quasicristal est alors à son tour défini comme un cristal possédant des symétries interdisant la périodicité (voir [44] pour une discussion autour de cette définition).

Les quasicristaux ont motivé de nombreuses études, en physique comme en mathématique. Nous ne mentionnons ici que les axes de recherches ayant motivé nos propres travaux :

- A.** Compréhension du lien entre le motif de diffraction d'un solide et la structure microscopique de ce solide ;
- B.** Plus spécifiquement, compréhension de la nature de l'ordre microscopique des cristaux ;
- C.** Diffusion des atomes dans un solide.

Ces trois axes correspondent respectivement à nos trois articles [26], [24] et [25].

**A.** La formalisation mathématique de la diffraction a été précisée par Hof [33] en 1995.

Dans cette formalisation, le solide est modélisé par un sous-ensemble localement fini  $\Lambda \in \mathbb{R}^3$  représentant l'ensemble des positions des atomes. A cet ensemble  $\Lambda$  est associé une mesure d'autocorrélation  $\gamma$ . La transformée de Fourier au sens des distributions tempérées de  $\gamma$  est appelée la mesure de diffraction de  $\Lambda$ . Cette dernière mesure modélise le motif de diffraction du solide initial. Notre objectif est de préciser le lien entre un ensemble et sa mesure de diffraction. Nous nous plaçons pour cela dans un cadre stochastique : l'ensemble  $\Lambda$  est vu comme une réalisation d'un processus ponctuel stationnaire  $\chi$ . Ce cadre est physiquement naturel, ne serait-ce que pour pouvoir inclure dans la modélisation d'un solide des défauts aléatoires tels que l'absence d'un atome en un site normalement occupé où l'écart entre la position réelle d'un atome et sa position idéale. Ce cadre est par ailleurs mathématiquement naturel du fait de la définition même de la mesure d'autocorrélation qui est de nature statistique. Néanmoins, les seuls modèles stochastiques étudiés jusqu'à présent sont soit rudimentaires soit très spécifiques. En effet, essentiellement trois modèles ont été précédemment étudiés : le processus est obtenu en supprimant aléatoirement des points d'un ensemble déterministe [3, 6] ; le processus est obtenu en perturbant la position des points d'un ensemble déterministe [32] ; le processus est associé à un pavage aléatoire [3, 16, 22, 39].

Nous démontrons tout d'abord que, dès que le processus ponctuel  $\chi$  est ergodique sous l'action des translations, alors l'autocorrélation existe toujours et coïncide avec un objet classique en géométrie aléatoire, la mesure d'intensité de la mesure de Palm de  $\chi$ .

Nous considérons ensuite les sous-ensembles aléatoires de  $\mathbb{Z}^d$  obtenus en prenant les instants de passages en un point d'un processus stationnaire et ergodique  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ . Nous montrons que ces sous-ensembles admettent p.s. une autocorrélation. Nous prouvons la périodicité de leur mesure de diffraction que nous exprimons en fonction de la mesure spectrale de  $X$ . Cela nous permet de construire des exemples d'ensembles dont la mesure de diffraction comporte une composante singulière. De tels exemples existaient dans la littérature, la nouveauté de notre résultat réside dans le fait que les mesures de diffraction que l'on obtient sont explicites.

Nous reprenons enfin la méthode “cut-and-project” qui est un procédé très populaire [50, 51] d'obtention d'ensembles presque-périodiques  $\chi'$  à partir d'ensembles périodiques  $\chi$ . Nous étudions la situation plus générale où l'ensemble  $\chi$  est un processus ponctuel. En exploitant le lien que nous avons établi entre la mesure de Palm d'un processus et sa mesure d'autocorrélation, nous donnons une expression de la mesure de diffraction de  $\chi'$  en fonction de celle de  $\chi$ . A titre d'exemple nous appliquons cette construction aux sous-ensembles aléatoires de  $\mathbb{Z}^d$ . Cela nous permet notamment de retrouver de manière naturelle les résultats précédemment obtenus sur ces ensembles dans le cadre déterministe [33, 47, 52, 62, 69] et dans le cadre stochastique [6].

**B.** Commençons par une remarque terminologique. Selon l'usage physique, un quasicristal est un cristal particulier. Dans les articles mathématiques sur le sujet, conformément au habitudes en mathématiques, les cristaux sont au contraires vu comme des quasicristaux particuliers. Pour éviter toute ambiguïté, et selon la terminologie de Lagarias [40], nous conviendrons d'appeler ensemble de Patterson tout ensemble dont la mesure de diffraction associée est discrète. Notre objectif est de caractériser ces ensembles. Ce problème a été ouvert par Hof [33]. Les travaux tendant à préciser la notion de cristal sont cependant plus anciens, et remontent aux études de Bombieri et Taylor [15, 14]. Leur formalisation

de ce problème était cependant différente.

Les ensembles de Patterson sont depuis longtemps supposés être presque-périodiques en un certain sens. Plusieurs résultats partiels visant à préciser cette relation ont été obtenus [8, 40, 41]. Dans cette thèse, nous prouvons que les ensembles de Patterson sont exactement les ensembles presque-périodiques par rapport à la topologie de Besicovitch, une topologie qui a précisément été introduite dans l'étude de la notion de presque périodicité [12].

Nous prouvons également qu'un processus ponctuel stationnaire est p.s. un ensemble de Patterson si et seulement si le spectre du système dynamique associé est discret. Ce résultat était conjecturé (des versions partielles avaient déjà été prouvées, voir [20, 42, 43, 68, 69]) et naturel : le caractère discret du spectre d'un système dynamique est notoirement relié à des questions de presque-périodicité. Notre preuve repose notamment sur le rapport que nous avons établi entre la mesure de Palm d'un processus ponctuel et sa mesure de diffraction [26]. Mentionnons que Baake et Lenz, en s'appuyant sur la connexion établie dans [26], ont donné une preuve indépendante de cette caractérisation des ensembles de Patterson en fonction du spectre du système dynamique [5].

**C.** Plusieurs modèles ont été proposés pour expliquer les mécanismes de la diffusion d'un atome dans un quasicristal : diffusion assistée par l'absence d'atomes en certains sites ; diffusion reposant sur des mécanismes spécifiques à la structure des quasicristaux [36]. Des études numériques (simulations moléculaires [31] ; simulations de Monte Carlo comme par exemple celles de [34] étudiant le mécanisme proposé par [36]), comme des études expérimentales (par exemple [13]) ont été et sont toujours effectuées. Inspiré par ces questions, nous avons introduit et étudié un modèle de diffusion très rudimentaire.

Un cristal réel peut être vu comme une réalisation imparfaite d'une structure idéale. Plusieurs défauts peuvent être observés. Notamment, en un site où un atome est présent dans la structure idéale, l'atome peut être du mauvais type, décalé par rapport à sa position idéale ou encore être simplement absent. Pour désigner ce dernier défaut, disons simplement que le site est vacant. Nous ne considérerons que ce type de défauts. Un atome peut quitter son site, le laissant alors vacant, et se déplacer vers un site vacant, qui devient alors occupé. Ce déplacement d'un atome peut alternativement se voir comme le déplacement d'un site vacant. Un modèle de diffusion de ces sites a été introduit et étudié notamment par Rice dans le cas des cristaux périodiques [59].

Faisons l'hypothèse raisonnable que la densité des sites vacants est faible. Oublions la structure idéale sous-jacente et imaginons les atomes uniformément répartis dans l'espace. Modélisons maintenant le déplacement des sites vacants par une dynamique markovienne dont le pas élémentaire est le suivant : un atome est choisi au hasard de manière uniforme, il quitte son site et rejoint le site vacant le plus proche. Nous nous sommes a priori éloignés de la réalité physique principalement pour deux raisons : le caractère uniforme du choix de l'atome - il est vraisemblable que les atomes les plus proches d'un site vacant ont plus de chance de se déplacer - et pour le choix du site vers lequel se déplace l'atome - qui pourrait être choisi de manière plus aléatoire.

Reformulons le pas élémentaire de notre dynamique en oubliant les atomes et en appelant particule un site vacant : un point de l'espace est choisi de manière uniforme, la particule la plus proche s'y déplace. Cette dynamique n'a à notre connaissance pas été étudiée.

Dans le premier cas que nous avons considéré les particules sont en nombre fini et sont distribuées sur un cercle. Les points les faisant se déplacer sont quant à eux donnés par une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur le cercle. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire (pour un nombre d'atomes fixés) ainsi que la convergence exponentielle vers cette distribution pour toute loi initiale de la chaîne de Markov. Nous établissons par ailleurs, sous la distribution stationnaire, une propriété de répulsion entre les atomes en donnant un équivalent logarithmique en zéro de la plus petite distance entre deux atomes.

Dans le deuxième cas que nous avons étudié, les particules sont en nombre infini et sont disposées sur la droite réelle. Nous nous donnons un processus de Poisson ponctuel homogène en espace et en temps. Pour tout point  $(u, t)$  de ce processus,  $t$  est interprété comme le temps auquel la particule la plus proche de  $u$  se déplace en  $u$ . Nous construisons un processus évoluant suivant cette dynamique et établissons l'existence et l'unicité d'une distribution invariante sous l'action des translations et de la dynamique (pour une densité de particules fixée). La difficulté réside dans la preuve de propriétés de régularité pour la dynamique.

# Chapitre 1

## Diffraction et mesure de Palm

### 1.1 Introduction

D'un point de vue physique, la diffraction des rayons X par un matériau permet d'étudier la structure microscopique de ce matériau. Les phénomènes d'interférences entre les rayons diffractés par les différents atomes sont en effet reliés aux positions relatives de ces atomes. Si les atomes sont disposés selon un réseau comme c'est le cas pour un cristal, alors le motif de diffraction est constitué de points lumineux isolés distribués eux aussi selon un réseau. Réciproquement, la présence de points isolés dans le motif de diffraction suggère que les atomes sont relativement ordonnés, mais la nature précise de cet ordre n'est pas comprise. Plus généralement, la compréhension du lien qui relie la nature du motif de diffraction avec la structure microscopique du matériau reste très incomplète. La découverte en 1982 par Shechtman et al. [66] des quasicristaux (arrangements non périodiques d'atomes dont le motif de diffraction comporte des points isolés) a relancé l'intérêt porté à ce problème.

Rappelons le formalisme mathématique de la diffraction (Hof [33], voir également Cowley [18] pour un point de vue physique). On se donne un ensemble  $\chi$  de points de  $\mathbb{R}^d$  (physiquement, les points sont les centres des atomes). On suppose que  $\chi$  est localement fini.

L'autocorrélation  $\gamma_R$  est définie par

$$\gamma_R := \frac{1}{|B_R|} \sum_{x,y \in \chi \cap B_R} \delta_{y-x} = \frac{1}{|B_R|} \left( \sum_{x \in \chi \cap B_R} \delta_x \right) * \left( \sum_{x \in \chi \cap B_R} \delta_{-x} \right) \quad (1.1)$$

où  $|B_R|$  désigne la mesure de Lebesgue canonique de la boule  $B_R$  centrée en l'origine et de rayon  $R > 0$  et où  $\delta_x$  est la mesure de Dirac au point  $x$ . L'autocorrélation  $\gamma_R$ , dite encore fonction de Patterson, représente les positions relatives des différents points de  $\chi \cap B_R$ . Physiquement, la transformée de Fourier de cette mesure correspond au motif de diffraction :  $\widehat{\gamma_R}(t)$  est l'intensité lumineuse diffractée dans la direction donnée par  $t$  par un matériau dont les centres des atomes sont les points de  $\chi \cap B_R$ .

Lorsqu'elle existe, la mesure limite  $\gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \gamma_R$ , prise au sens de la topologie vague, est désignée par le terme d'autocorrélation de  $\chi$ . Cette mesure est tempérée et sa transformée de Fourier  $\widehat{\gamma}$  est une mesure positive appelée mesure de diffraction de  $\chi$ . La notion de "points isolés dans le motif de diffraction" (la présence de Bragg peaks)

se traduit mathématiquement comme la non trivialité de la composante atomique de la mesure  $\widehat{\gamma}$ .

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés de diffraction des processus ponctuels de  $\mathbb{R}^d$ . Introduisons tout d'abord quelques définitions. Notons  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$  ( $\mathcal{M}_\sigma$  quand il n'y a pas de confusions possibles) l'ensemble des sous-ensembles localement finis de  $\mathbb{R}^d$ . Pour tout sous-ensemble borélien borné  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  notons  $N_A$  la fonction de  $\mathcal{M}_\sigma$  dans  $N$  définie par

$$N_A(\Lambda) = \text{card}(A \cap \Lambda). \quad (1.2)$$

Munissons  $\mathcal{M}_\sigma$  de la tribu  $\mathcal{A}$  engendrée par les applications  $N_A$  lorsque  $A$  parcourt l'ensemble des sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^d$ . Un processus ponctuel sur  $\mathbb{R}^d$  est une application mesurable  $\chi$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeur dans l'espace mesurable  $(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{A})$ . Récemment, les propriétés de diffraction de processus ponctuels particuliers ont été étudiés [3, 6, 32]. Essentiellement trois modèles ont été considérés.

(A) Dans un premier modèle, le processus ponctuel est obtenu en supprimant de manière stochastique les points d'un ensemble déterministe. Ainsi, dans [6], les auteurs considèrent un ensemble  $\Lambda$  admettant une mesure d'autocorrélation  $\gamma$  et étudient le processus ponctuel  $\chi$  défini par

$$\chi = \{x \in \Lambda : X_x = 1\}$$

où  $(X_i)_i$  est une famille de v.a.i.i.d. à valeurs dans  $\{0, 1\}$  indexée par les points de  $\Lambda$ . Notons  $p$  la probabilité que l'une de ces variables valent 1 et  $D$  la densité du processus. Sous des hypothèses techniques sur l'ensemble  $\Lambda$ , les auteurs prouvent que le processus ponctuel admet p.s. la mesure d'autocorrélation  $\gamma'$  définie par

$$\gamma' = Dp(1 - p)\delta_0 + p^2\gamma.$$

La mesure de diffraction de  $\chi$  vérifie par conséquent la relation :

$$\widehat{\gamma}' = Dp(1 - p)dx + p^2\widehat{\gamma}.$$

Ce résultat donne ainsi une relation entre la mesure de diffraction d'un modèle parfait ( $\Lambda$ ) avec la mesure de diffraction d'un modèle avec défauts ( $\chi$ ). Notons que les conditions techniques exigées sur l'ensemble  $\Lambda$  sont notamment vérifiées par les réseaux d'une part et par les ensembles modèles réguliers d'autre part [51].

Dans [3], les auteurs considèrent un modèle de défaut markovien. L'ensemble initial est ici  $\mathbb{Z}$  et la suite  $(X_i)_i$  est une chaîne de Markov à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Les auteurs fournissent des formules explicites donnant les mesures d'autocorrélation et de diffraction.

Mentionnons que ces résultats sont démontrés dans un cadre plus général dans lequel les v.a.  $X_i$  peuvent prendre des valeurs complexes arbitraires. Ces valeurs sont alors interprétées comme des poids attribués aux points de l'ensemble  $\Lambda$  (dans la définition de  $\gamma_R$ , chaque terme  $\delta_{y-x}$  est pondéré par la quantité  $X_y \overline{X_x}$ ).

(B) Dans un second modèle, le processus est obtenu en perturbant aléatoirement la position des points d'un ensemble déterministe. Dans [32], l'auteur étudie ainsi le processus ponctuel  $\chi$  défini par

$$\chi := \{x + X_x : x \in \Lambda\}$$

où  $\Lambda$  est un ensemble fixé admettant une autocorrélation  $\gamma$  et une densité  $D$  et où  $(X_i)_i$  est une famille de v.a.i.i.d. indexés par  $\Lambda$  et à valeurs dans l'espace ambiant. Supposons ces variables intégrables, notons  $m$  la loi de l'une d'entre elles et  $\check{m}$  la loi de son opposée. Sous des hypothèses techniques sur l'ensemble  $\Lambda$ , qui sont notamment vérifiées par les ensembles modèles réguliers [51], l'auteur obtient que  $\chi$  admet p.s. une autocorrélation  $\gamma'$  vérifiant :

$$\gamma' = \gamma * m * \check{m} + D(\delta_0 - m * \check{m}).$$

La mesure de diffraction vérifiée ainsi :

$$\widehat{\gamma}' = |\widehat{m}|^2 \widehat{\gamma} + D(1 - |\widehat{m}|^2) dx.$$

(C) Dans le troisième modèle, le processus est associé à un pavage aléatoire. Dans [3], les auteurs considèrent tout d'abord un exemple unidimensionnel où les longueurs des différents pavés (qui sont simplement ici des intervalles de  $\mathbb{R}$ ) sont données par des v.a.i.i.d. Les auteurs obtiennent, dans le cas où les variables  $X_i$  ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes, l'existence p.s. d'une mesure d'autocorrélation, ainsi que des formules explicites pour cette mesure (qui est déterministe) et pour la mesure de diffraction.

Ils étudient ensuite des modèles plus complexes de pavages du plan. Décrivons l'un d'entre eux, celui du pavage par des dominos. Un domino est un rectangle de taille  $2 \times 1$  ou  $1 \times 2$  dont les sommets ont des coordonnées entières. La mesure d'entropie maximale sur l'espace des pavages du plan par ces dominos [16] définit un pavage aléatoire du plan. En plaçant un point au centre de chaque domino, on obtient alors un processus ponctuel. En utilisant notamment les résultats de [39] et [22], les auteurs obtiennent ici encore l'existence p.s. d'une mesure d'autocorrélation et obtiennent notamment une formule explicite de la partie discrète de la mesure de diffraction.

Pour énoncer notre premier résultat, nous avons besoin d'introduire quelques définitions supplémentaires. Un processus ponctuel est intégrable (resp. de carré intégrable) si les variables aléatoires  $N_A$  définie par (1.2) sont intégrables (resp. de carré intégrables) pour tout compact  $A$ . Un processus ponctuel est dit stationnaire si sa loi est invariante sous l'action des translations de  $\mathbb{R}^d$ . L'ergodicité d'un processus ponctuel se définit également par rapport à l'action des translations de  $\mathbb{R}^d$ . La mesure de Palm  $\widetilde{P}$  d'un processus stationnaire et intégrable  $\chi$  est une mesure finie sur  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$  qui, renormalisée, s'interprète comme la loi du processus  $\chi$  conditionné par la présence d'un point à l'origine. Elle se définit par la formule

$$\widetilde{P}(F) := \frac{1}{|B|} E \left[ \sum_{x \in \phi \cap B} 1_F(\phi - x) \right], \quad F \in \mathcal{A}$$

où  $B$  est un borélien fixé de  $\mathbb{R}^d$  de mesure  $|B|$  finie et non nulle [10, 48, 55]. Cette définition est indépendante du choix de  $B$ . On en déduit classiquement la formule de Campbell [10, 48, 55], valable pour toute fonction  $f$  mesurable et positive de  $\mathcal{M}_\sigma \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$\int \sum_{x \in \phi} f(\phi - x, x) dP(\phi) = \int \int f(\phi, x) d\widetilde{P}(\phi) dx. \quad (1.3)$$

Enfin, l'intensité de la mesure de Palm  $\tilde{P}$  est une mesure  $I(\tilde{P})$  sur  $\mathbb{R}^d$  définie par

$$I(\tilde{P})(A) = \int \text{card}(\tilde{\chi} \cap A) d\tilde{P}(\tilde{\phi}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

où  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  désigne les boréliens de  $\mathbb{R}^d$ .

Nous prouvons tout d'abord le résultat général suivant :

**Théorème 1.1.1** *Considérons un processus ponctuel  $\chi$  stationnaire, ergodique et de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $\tilde{P}$  sa mesure de Palm et  $I(\tilde{P})$  l'intensité de cette mesure. Alors cette dernière mesure est localement finie et on a, pour tout borélien borné  $C$  de  $\mathbb{R}^d$ , la convergence :*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \gamma_R(C) = I(\tilde{P})(C) \quad p.s.$$

*En particulier,  $\gamma_R$  converge presque sûrement vers  $I(\tilde{P})$  pour la topologie vague.*

Ce résultat identifie ainsi la mesure d'autocorrélation d'un processus ponctuel avec un objet classique en géométrie stochastique, l'intensité de la mesure de Palm de ce processus. Si par exemple  $\chi$  est un processus de Poisson ponctuel admettant pour intensité la mesure de Lebesgue canonique, on en déduit immédiatement que  $\chi$  admet p.s. la mesure  $\delta_0 + dx$  comme mesure d'autocorrélation et comme mesure de diffraction.

Nous considérons ensuite un exemple très spécifique, celui des sous-ensembles aléatoires de  $\mathbb{Z}^d$  obtenus en prenant les instants de passages en un point d'un processus stationnaire et ergodique indexé par le réseau  $\mathbb{Z}^d$ . Plus formellement, nous considérons le processus ponctuel  $\chi$  défini par la relation

$$\chi = \{k \in \mathbb{Z}^d : X_k = 1\}$$

où  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un processus stationnaire et ergodique à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Notons  $\mu$  la mesure spectrale de ce processus, c'est-à-dire l'unique mesure positive sur  $[0, 1]^d$  telle que  $\widehat{\mu}(k) = E X_0 X_k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Nous prouvons le résultat suivant :

**Théorème 1.1.2** *Avec les notations ci-dessus nous avons :*

1. *Le processus  $\chi$  admet presque sûrement une mesure d'autocorrélation  $\gamma$ . Cette mesure vérifie*

$$\gamma := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} E(X_0 X_k) \delta_k. \quad (1.4)$$

2. *La mesure de diffraction vérifie la relation  $\widehat{\gamma} = \mu_p$  où  $\mu_p$  est la mesure  $\mathbb{Z}^d$ -périodique associée à  $\mu$  ( $\mu_p(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mu(\cdot - k)$ ).*

Ce résultat nous permet de construire des exemples d'ensembles dont la mesure de diffraction comporte une composante singulière explicite.

Nous reprenons enfin la méthode “cut-and-project” qui est un procédé très populaire [50, 51] d'obtention d'ensembles presque-périodiques  $\chi'$  à partir d'ensembles périodiques  $\chi$ . Nous étudions la situation plus générale où l'ensemble  $\chi$  est un processus ponctuel. Plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^d$  et donnons-nous deux sous-espaces supplémentaires  $E$  et  $F$ . Notons

$p_E$  (resp.  $p_F$ ) la projection sur  $E$  parallèlement à  $F$  (resp. sur  $F$  parallèlement à  $E$ ). Convenons également de noter  $x_E$  et  $x_F$  les projections d'un point  $x$  de  $\mathbb{R}^d$  sur  $E$  et  $F$ . Notons  $x_E^\perp$  et  $x_F^\perp$  les projections orthogonales de  $x$  sur  $E$  et  $F$ . Considérons un borélien borné  $W$  de  $F$ . Soit  $\phi$  un processus ponctuel stationnaire et de carré intégrable dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous le supposons ergodique sous l'action des translations  $(T_t)_{t \in E}$  à vecteur dans  $E$ . Nous définissons un nouveau processus ponctuel  $\chi$  dans  $E$  par  $\chi = \pi(\phi)$  où  $\pi$  est l'application de  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{M}_\sigma(E)$  définie par

$$\pi(\phi) = p_E(\phi \cap (E \times W)). \quad (1.5)$$

Nous faisons également l'hypothèse suivante :

Deux points distincts de  $\phi \cap (E \times W)$  ont une image distincte par  $p_E$  (p.s.). (1.6)

**Théorème 1.1.3** *Notons  $\lambda$  la restriction à  $W$  de la mesure de Lebesgue canonique sur  $F$  et désignons par  $\tilde{Q}$  la mesure de Palm de  $\phi$ . Soit  $C_E$  (resp.  $C_F$ ) un borélien de mesure 1 de  $E$  (resp.  $F$ ). Notons  $\alpha$  le volume de  $C_E + C_F$ . Alors :*

1. *Le processus  $\chi$  est stationnaire, ergodique et de carré intégrable.*
2. *La mesure de Palm de  $\chi$  coïncide avec l'image de la mesure  $\alpha\lambda \otimes \tilde{Q}$  par l'application*

$$f : \begin{cases} W \times \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow \mathcal{M}_\sigma(E) \\ (w, \tilde{\phi}) & \longmapsto p_E((w + \tilde{\phi}) \cap (E \times W)) = \pi(w + \tilde{\phi}). \end{cases} \quad (1.7)$$

3. *L'intensité de la mesure de Palm est la mesure  $\gamma$  sur  $E$  définie par*

$$\gamma(C) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} I(\tilde{Q})(dx) \psi(p_F(x)) 1_C(p_E(x)), \quad C \in \mathcal{B}(E), \quad (1.8)$$

où  $\psi$  est la fonction de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\psi(x) = 1_W * 1_{-W}(x). \quad (1.9)$$

4. *La transformée de Fourier de  $\gamma$  est de la forme*

$$\widehat{\gamma}(C) = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{I(\tilde{Q})}(dx) \widehat{\psi}(x_F^\perp) 1_C(x_E^\perp), \quad C \in \mathcal{B}(E), \quad (1.10)$$

où  $\widehat{I(\tilde{Q})}$  est la transformée de Fourier de  $I(\tilde{Q})$ .

**Remarque :** Quitte à adopter le formalisme des processus ponctuels marqués (qui autorise la “présence” de plusieurs points au même endroit), il est possible d'éviter le recours à l'hypothèse (1.6). Cela ne modifie ni la preuve ni le résultat.

Via le théorème 1.1.1, on en déduit immédiatement une relation entre la mesure de diffraction de  $\chi$  et celle de  $\phi$ .

**Théorème 1.1.4** *Le processus  $\chi$  admet p.s. la mesure d'autocorrélation définie par (1.8) et la mesure de diffraction définie par (1.10). □*

A titre d'exemple, nous appliquons ce résultat en prenant pour processus  $\chi$  une version  $\mathbb{R}^d$  stationnaire des sous-ensembles aléatoires de  $\mathbb{Z}^d$  considérés précédemment. Autrement dit,  $\chi$  est de la forme  $U + \xi$  où  $\xi$  est un sous-ensemble aléatoire stationnaire et ergodique de  $\mathbb{Z}^d$  et  $U$  est une variable indépendante uniformément distribuée sur  $[0, 1]^d$ . Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant, dans lequel  $S^{d-1}$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ .

**Théorème 1.1.5** *Il existe un sous-ensemble négligeable  $S \subset S^{d-1}$  tel que, si  $E$  contient un vecteur de  $S^{d-1} \setminus S$ , les propriétés suivantes sont vérifiées. Le processus  $\chi$  considéré ci-dessus est stationnaire ergodique et de carré intégrable. Il admet presque sûrement une autocorrélation s'exprimant, avec les notations des théorèmes 1.1.3 et 1.1.2, par*

$$\gamma(C) = \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\mu}(k) \psi(p_F(k)) 1_C(p_E(k))$$

et une mesure de diffraction vérifiant

$$\widehat{\gamma}(C) = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(x_F^\perp) 1_C(x_E^\perp) \mu_p(dx), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Nous prouvons que, sous certaines hypothèses, il est possible de choisir pour  $S$  le sous-ensemble de  $S^{d-1}$  constitué des vecteurs dont les coordonnées sont liées sur  $\mathbb{Q}$ . C'est le cas notamment lorsque la famille de v.a.  $(X_k)_k$  définissant  $\xi$  est une famille de v.a.i.i.d. Cela nous permet de retrouver les résultats de [6]. Dans le cas où  $\xi$  est déterministe et vaut  $\mathbb{Z}^d$ , cela permet de retrouver de manière naturelle les propriétés classiques de diffraction des ensembles modèles [33, 47, 52, 62, 69].

## 1.2 Autocorrélation et diffraction

Nous démontrons dans cette section quelques lemmes simples et généraux sur les mesures d'autocorrélation et de diffraction d'un ensemble localement fini  $\chi$ . Ces résultats sont démontrés dans la littérature sur le sujet, mais uniquement dans le cas où le cardinal de  $\chi \cap B$  est borné uniformément en  $B$  lorsque  $B$  parcourt l'ensemble des boules de rayon 1 de  $\mathbb{R}^d$ .

**Lemme 1.2.1** *Une mesure d'autocorrélation est tempérée.*

**Preuve :** Soit  $\mu$  une mesure positive et finie sur  $\mathbb{R}^d$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables positives. Définissons  $\check{g}$  par  $\check{g}(x) = g(-x)$ . Remarquons

$$\begin{aligned} \mu * \check{\mu}(f * \check{g}) &= \int f(x - y + z) g(z) dz d\mu(x) d\mu(y) \\ &= \int \left[ \int f(x + z) d\mu(x) \right] \left[ \int g(y + z) d\mu(y) \right] dz. \end{aligned} \quad (1.11)$$

On en déduit, par l'inégalité de Schwarz, la relation

$$\mu * \check{\mu}(f * \check{g}) \leq [\mu * \check{\mu}(f * \check{f}) \mu * \check{\mu}(g * \check{g})]^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons maintenant que  $g = f_a$  où  $f_a$  est définie par  $f_a(x) = f(x - a)$ . On a alors, en remarquant  $f_a * \check{f}_a = f * \check{f}$ ,

$$\mu * \check{\mu}(f * \check{f}_a) \leq \mu * \check{\mu}(f * \check{f}).$$

En appliquant ce qui précède aux mesures d'autocorrélations  $\gamma_R$  associées à  $\chi$  et en faisant tendre  $R$  vers l'infini on obtient, pour  $f$  continue positive et à support compact,

$$\gamma(f * \check{f}_a) \leq \gamma(f * \check{f}). \quad (1.12)$$

Soit maintenant  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ . Il existe une fonction continue positive à support compact  $f$  telle que  $1_K \leq f * \check{f}$ . Remarquons qu'alors  $1_{K-a}$  est majorée par  $f * \check{f}_a$  car  $f * \check{f}_a(x) = f * \check{f}(x + a)$ . On déduit ainsi de (1.12) la relation

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^d} \gamma(K - a) \leq \gamma(f * \check{f}) < \infty.$$

La mesure  $\gamma$  est donc en particulier tempérée.  $\square$

Ce lemme permet de définir la mesure de diffraction de  $\chi$  comme la transformée de Fourier au sens des distributions tempérées de la mesure d'autocorrélation  $\gamma$ . Le lemme suivant montre que l'on obtient ainsi une mesure positive.

**Lemme 1.2.2** *La transformée de Fourier d'une mesure d'autocorrélation est une mesure positive.*

**Preuve :** Soit  $f$  une fonction continue et à support compact. Pour tout  $R > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \mu_R * \check{\mu}_R(f * \check{f}) &= \int f(x - y + z) \overline{f}(z) dz d\mu_R(x) d\mu_R(y) \\ &= \int \left| \int f(x + z) d\mu_R(x) \right|^2 dz, \end{aligned}$$

où  $\mu_R$  est la mesure positive et finie définie par

$$\mu_R = \sum_{x \in \chi \cap B_R} \delta_x.$$

En passant à la limite on obtient  $\gamma(f * \check{f}) \geq 0$ . On déduit alors le lemme du théorème de Bochner [58].  $\square$

Terminons cette section par un lemme utile quand il s'agit d'établir l'existence et l'expression d'une autocorrélation. Soit  $C$  un borélien borné de  $\mathbb{R}^d$ . Posons

$$\begin{aligned} a_R &= |B_R| \gamma_R(C) \\ &= \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi \cap B_R - x) \cap C]. \end{aligned}$$

Introduisons également

$$b_R = \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi - x) \cap C].$$

**Lemme 1.2.3** *Gardons les notations ci-dessus. Soit  $\lambda$  un réel. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

$$\frac{1}{|B_R|}a_R \rightarrow \lambda \text{ quand } R \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

et

$$\frac{1}{|B_R|}b_R \rightarrow \lambda \text{ quand } R \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

**Preuve :** Comme  $C$  est borné, il existe  $M > 0$  tel que  $C$  soit inclus dans la boule  $B_M$  centrée à l'origine et de rayon  $M$ . Soit  $R$  un réel positif. Montrons la majoration

$$b_R \leq a_{R+M}. \quad (1.15)$$

Rappelons

$$b_R = \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[\chi \cap (C + x)].$$

Si  $x$  appartient à  $B_R$  alors  $C + x$  est inclus dans  $B_{R+M}$ . Par conséquent

$$b_R = \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi \cap B_{R+M}) \cap (C + x)]$$

puis

$$b_R \leq \sum_{x \in \chi \cap B_{R+M}} \text{card}[(\chi \cap B_{R+M}) \cap (C + x)].$$

On reconnaît (1.15). Cette relation entraîne les majorations suivantes (pour  $R \geq M$ ) :

$$0 \leq b_R - a_R \leq a_{R+M} - a_R \text{ et } 0 \leq b_R - a_R \leq b_R - b_{R-M}.$$

De ces relations découle le lemme. □

### 1.3 Autocorrélation et mesure de Palm

Nous prouvons dans cette section le théorème 1.1.1. Nous commençons par rappeler le résultat classique suivant.

**Lemme 1.3.1** *Un processus ponctuel stationnaire intégrable  $\chi$  est de carré intégrable si et seulement si l'intensité  $I(\tilde{P})$  de sa mesure de Palm est localement finie.*

**Preuve :** Notons  $B_R$  la boule de rayon  $R$  centrée à l'origine. Soit  $S > 0$ . Par définition de l'intensité de la mesure de Palm, on a la relation

$$|B_S| I(\tilde{P})(B_R) = E \sum_{x \in \chi \cap B_S} \text{card}[(\chi - x) \cap B_R]$$

où  $|B_S|$  désigne la mesure de Lebesgue de  $B_S$ . Mais pour  $R \geq S$  et pour  $x \in B_S$ , nous avons l'encadrement suivant

$$\text{card}[\chi \cap B_{R-S}] \leq \text{card}[(\chi - x) \cap B_R] \leq \text{card}[\chi \cap B_{R+S}].$$

On en déduit

$$\text{card}[\chi \cap B_S] \text{card}[\chi \cap B_{R-S}] \leq \sum_{x \in \chi \cap B_S} \text{card}[(\chi - x) \cap B_R] \leq \text{card}[\chi \cap B_S] \text{card}[\chi \cap B_{R+S}]$$

puis

$$E \text{card}[\chi \cap B_S] \text{card}[\chi \cap B_{R-S}] \leq |B_S| I(\tilde{P})(B_R) \leq E \text{card}[\chi \cap B_S] \text{card}[\chi \cap B_{R+S}].$$

De cette dernière relation découle le lemme.  $\square$

**Preuve du théorème 1.1.1 :** Elle repose sur le théorème ergodique de Wiener [72]. Soit  $C$  un borélien borné de  $\mathbb{R}^d$ . Posons

$$\begin{aligned} a_R &= |B_R| \gamma_R(C) \\ &= \sum_{x,y \in \chi \cap B_R} 1_C(x-y) \\ &= \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi \cap B_R - x) \cap C]. \end{aligned}$$

Il s'agit d'établir que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} a_R = I(\tilde{P})(C) \quad p.s. \quad (1.16)$$

Remarquons que, d'après le lemme 1.2.3, il suffit pour cela de prouver que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} b_R = I(\tilde{P})(C) \quad p.s. \quad (1.17)$$

où

$$b_R = \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi - x) \cap C].$$

Posons

$$X_t = \sum_{x \in \chi \cap (t + [0,1]^d)} \text{card}[(\chi - x) \cap C].$$

Remarquons la relation  $X_t = X_0 \circ T_t$ . Par définition de l'intensité de la mesure de Palm,  $E(X_0) = I(\tilde{P})(C)$ . D'après le lemme 1.3.1,  $X_0$  est intégrable. Le théorème ergodique de Wiener entraîne alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} X_t dt = I(\tilde{P})(C) \quad p.s. \quad (1.18)$$

Pour conclure, il suffit de montrer que (1.18) entraîne (1.17). Notons que

$$\begin{aligned} \int_{B_S} X_t dt &= \sum_{x \in \chi} \int_{B_S} 1_{[0,1]^d}(x-t) \text{card}[(\chi - x) \cap C] dt \\ &= \sum_{x \in \chi} |B_S \cap (x - [0,1]^d)| \text{card}[(\chi - x) \cap C]. \end{aligned}$$

puis que

1.  $0 \leq |B_S \cap (x - [0, 1]^d)| \leq 1$  ;
2.  $|B_S \cap (x - [0, 1]^d)| = 0$  pour  $\|x\| > S + \sqrt{d}$  ;
3.  $|B_S \cap (x - [0, 1]^d)| = 1$  pour  $\|x\| \leq S - \sqrt{d}$ .

On en déduit l'encadrement (pour  $R \geq S$ )

$$\int_{B_{R-\sqrt{d}}} X_t dt \leq \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}((\chi - x) \cap C) \leq \int_{B_{R+\sqrt{d}}} X_t dt.$$

En divisant par  $|B_R|$  et en passant à la limite on obtient alors que (1.18) entraîne (1.17).

□

## Exemple du processus de Poisson homogène

Considérons un processus de Poisson ponctuel  $\chi$  sur  $\mathbb{R}^d$  admettant pour mesure d'intensité la mesure de Lebesgue canonique. Il est bien connu que ce processus est stationnaire et ergodique (il est même mélangeant). On vérifie qu'il est carré intégrable. Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème 1.1.1.

On dispose par ailleurs du lemme suivant (Møller [48]) :

**Lemme 1.3.2** *La mesure de Palm d'un processus de Poisson ponctuel  $\chi$  admettant pour intensité la mesure de Lebesgue coïncide avec la loi du processus  $\chi_0 := \chi \cup \{0\}$ .*

Comme  $I(\chi_0) = dx + \delta_0$ , on obtient, grâce au théorème 1.1.1 et à la discussion qui précède, le résultat suivant :

**Proposition 1.3.3** *Soit  $\chi$  un processus de Poisson ponctuel dans  $\mathbb{R}^d$  admettant pour intensité la mesure de Lebesgue. Alors  $\chi$  admet presque sûrement la mesure d'autocorrélation  $\delta_0 + dx$ . La mesure de diffraction est donc elle aussi presque sûrement  $\delta_0 + dx$ .*

## 1.4 Mesures de diffraction périodiques

Nous nous intéressons dans cette section aux mesures périodiques pour lesquelles il existe un ensemble localement fini dont elles sont la mesure de diffraction.

### 1.4.1 Généralités

Nous prouvons notamment dans cette sous-section le théorème 1.1.2. Soit  $\mu$  une mesure positive bornée sur  $\mathbb{R}^d$ . On lui associe une mesure  $\mathbb{Z}^d$ -périodique  $\mu_p$  par

$$\mu_p = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} T_k \mu \tag{1.19}$$

où  $T_k \mu$  désigne l'image de  $\mu$  par la translation de vecteur  $k$ . Cette mesure est positive  $\mathbb{Z}^d$ -périodique et tempérée. Remarquons que l'on obtient ainsi toutes les mesures de ce type. Le lemme suivant décrit les transformées de Fourier de ces mesures.

**Lemme 1.4.1** Soit  $\mu$  une mesure positive et bornée sur  $\mathbb{R}^d$ . La transformée de Fourier de la mesure  $\mu_p$  associée à  $\mu$  par (1.19) est donnée par

$$\widehat{\mu}_p = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\mu}(k) \delta_k.$$

**Preuve :** Soit  $\nu$  la mesure définie par  $\nu(A) = \mu_p(A \cap [0, 1]^d)$ . Cette mesure est positive, a la même masse que  $\mu$ , possède les mêmes coefficients de Fourier et vérifie  $\nu_p = \mu_p$ . Elle est de plus à support borné. Il est donc légitime de supposer dans la suite que  $\mu$  est à support borné. Soit  $f$  une fonction de Schwartz.

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_p(f) &= \mu_p(\widehat{f}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int \widehat{f} d(T_k \mu) \end{aligned}$$

où  $T_k \mu$  désigne l'image de  $\mu$  par la translation de vecteur  $k$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_p(f) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int f(x) \widehat{T_k \mu}(x) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int f(x) e^{-2\pi i (k \cdot x)} \widehat{\mu}(x) dx. \end{aligned}$$

La mesure  $\mu$  étant à support borné,  $\widehat{\mu}$  est  $C^\infty$  et toutes ses dérivées partielles sont bornées. On en déduit que le produit  $f\widehat{\mu}$  est une fonction de Schwartz. La formule de Poisson nous donne alors

$$\widehat{\mu}_p(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \widehat{\mu}(k).$$

Le lemme est ainsi démontré. □

**Preuve du théorème 1.1.2 :** La première partie découle du théorème de Birkhoff. Il suffit de prouver, pour tout borélien borné  $C$  de  $\mathbb{R}^d$  la convergence p.s. suivante :

$$\frac{1}{|B_R|} \sum_{x, y \in \chi \cap B_R} 1_C(y - x) \rightarrow \gamma(C), \quad R \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

où  $\gamma$  est la mesure définie par (1.4). Mais d'après le lemme 1.2.3, (1.20) est équivalente à

$$\frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi - x) \cap C] \rightarrow \gamma(C), \quad R \rightarrow \infty.$$

Comme

$$\sum_{x \in \chi \cap B_R} \text{card}[(\chi - x) \cap C] = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d \cap B_R} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \cap C} X_x X_{x+k}$$

le résultat se déduit du théorème de Birkhoff.

La seconde partie découle du lemme 1.4.1 qui donne  $\widehat{\mu}_p = \gamma$  et donc  $\widehat{\gamma} = \check{\mu}_p = \mu_p$ . □

Pour la section 1.5.2 nous aurons besoin d'un processus stationnaire sous l'action des translations de  $\mathbb{R}^d$ . A cet effet, introduisons  $U$  une variable aléatoire indépendante de

$X$  et de loi uniforme sur  $[0, 1]^d$ . On définit un nouveau processus ponctuel  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^d$  par  $\varphi = f(U, X)$  où  $f$  est la fonction de  $[0, 1]^d \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  dans  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$  définie par

$$f(u, x) = u + \{k \in \mathbb{Z}^d : x_k = 1\}. \quad (1.21)$$

Le théorème 1.1.2 s'applique au processus  $f(0, X)$ . Comme  $f(U, X) = U + f(0, X)$ , les résultats de ce théorème 1.1.2 s'appliquent également au processus  $\varphi$ . On peut retrouver ce résultat en combinant le lemme suivant au lemme 1.4.1 et au théorème 1.1.1.

**Lemme 1.4.2** *Le processus  $\varphi$  est ergodique et stationnaire. Sa mesure de Palm est la mesure image de  $f(0, X)$  sur l'événement  $\{X_0 = 1\}$  ( $f$  est définie par (1.21)).*

**Preuve :** Remarquons, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}^d$ , la relation

$$f(U, (X_k)) - t = f(\{U - t\}, (X_{k-\lfloor U-t \rfloor})) \quad (1.22)$$

où  $\{a_1, \dots, a_d\}$  désigne le vecteur formé des parties fractionnaires des  $a_j$  et  $\lfloor a_1, \dots, a_d \rfloor$  celui formé des parties entières des  $a_j$ . Notons  $\mathcal{D}$  la tribu produite sur  $D = [0, 1]^d \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Considérons l'action de  $\mathbb{R}^d$  sur  $D$  définie par

$$T_t(U, X) = (\{U - t\}, (X_{k-\lfloor U-t \rfloor})). \quad (1.23)$$

D'après (1.22), la preuve de la stationnarité et de l'ergodicité de  $\varphi$  se ramène à celle des propriétés analogues de  $(U, X)$  sous l'action (1.23).

Soient  $A$  un borélien de  $[0, 1]^d$  et  $B$  un ensemble mesurable de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}^d$ . Alors, en décomposant suivant les valeurs de  $\lfloor U - t \rfloor$ , on obtient

$$\begin{aligned} P(T_t(U, X) \in A \times B) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} P(\lfloor U - t \rfloor = l, \{U - t\} \in A \text{ et } (X_{k-l})_k \in B) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} P(\lfloor U - t \rfloor = l \text{ et } \{U - t\} \in A) P(X \in B) \\ &= P(U \in A) P(X \in B) \\ &= P((U, X) \in A \times B), \end{aligned}$$

ce qui montre la stationnarité.

Prouvons l'ergodicité. Considérons pour cela une fonction mesurable positive  $g$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad g \circ T_t = g \text{ p.s.}$$

Il s'agit de montrer que  $g$  est égale p.s. à une constante. Pour tout  $l \in \mathbb{Z}^d$ , on a  $g \circ T_l = g$  presque sûrement. Par Fubini, on a donc pour presque tout  $u \in [0, 1]^d$  :

$$g(u, (x_{k-l})_k) = g(u, (x_k)_k) \text{ pour presque tout } (x_k)_k.$$

De l'ergodicité de  $X$ , on déduit alors l'existence d'une fonction mesurable positive  $h$  de  $[0, 1]^d$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g(U, X) = h(U)$  presque sûrement. Cette dernière fonction vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad h(\{u - t\}) = h(u) \text{ p.s. en } u.$$

La fonction  $h$  est donc p.s. constante. On en déduit l'ergodicité recherchée.

Il reste à déterminer la mesure de Palm de  $\chi$ . Considérons pour cela un élément  $F$  de la tribu de  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$ . La mesure de Palm de  $\chi$  appliquée à  $F$  vaut

$$\begin{aligned}\tilde{P}(F) &= E \sum_{x \in \chi \cap [0,1]^d} 1_F(\chi - x) \\ &= E X_0 1_F[f(0, X)].\end{aligned}$$

Cela conclut la preuve de la proposition.  $\square$

### 1.4.2 Un exemple de mesure singulière

Décrivons un procédé de construction de processus stationnaire et ergodique à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Partons d'une probabilité symétrique  $\nu$  sur  $\mathbb{R}$ . On peut construire un processus gaussien réel  $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  centré et de covariance  $E(Y_n Y_{n+k}) = \widehat{\nu}(k)$ . Ce processus est stationnaire. Il est ergodique si la mesure  $\nu$  est sans atomes, ce que nous supposons dans la suite ([17, Ch.14 §2 Th.1]). Définissons alors le processus  $(X_k)_k$  par  $X_k = 1_{\mathbb{R}_+}(Y_k)$ . Ce processus est également stationnaire ergodique. Cherchons à exprimer sa mesure spectrale  $\mu$  en fonction de  $\nu$ .

$$E(X_0 X_k) = P(Y_0 \geq 0 \text{ et } Y_k \geq 0).$$

Posons  $\theta = \arcsin(E(Y_0 Y_k))$ . Considérons  $A$  et  $B$  deux gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Le couple  $(A, \sin \theta A + \cos \theta B)$  a alors même loi que  $(Y_0, Y_k)$ . Ainsi

$$\begin{aligned}E(X_0 X_k) &= P(A \geq 0 \text{ et } \sin \theta A + \cos \theta B \geq 0) \\ &= P(\arg(A + iB) \in [-\theta, \pi/2]) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

On a  $E(X_0 X_k) = f(\widehat{\nu}(k))$  où  $f$  est définie sur  $[-1, 1]$  par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \arcsin(x) + \frac{1}{4}. \quad (1.24)$$

Remarquons que cette fonction est développable en série entière sur  $[-1, 1]$  et que tous ses coefficients sont positifs. Ecrivons

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k.$$

Il est alors légitime (du fait de la positivité des coefficients) de poser

$$f(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \nu^{*k}.$$

On obtient une mesure positive de masse finie (en effet  $f(\nu)(\mathbb{R}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = f(1)$ ). Les coefficients de Fourier de cette mesure sont donc bien définies et valent

$$\begin{aligned}\widehat{f(\nu)}(n) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \widehat{\nu}^{*k}(n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (\widehat{\nu}(n))^k \\ &= E(X_0 X_n).\end{aligned}$$

La mesure  $f(\nu)$  est donc une mesure spectrale de  $X$  au sens où c'est une mesure positive telle que  $\widehat{f(\nu)}(n) = E(X_0 X_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

En combinant avec le théorème 1.1.2 on obtient donc le résultat suivant :

**Proposition 1.4.3** *Soit  $\nu$  une probabilité symétrique et sans atomes sur  $\mathbb{R}$ . On définit  $\mu$  par  $\mu = f(\nu)$  où  $f$  est définie sur  $[-1, 1]$  par (1.24). Il existe alors un processus ponctuel admettant presque sûrement la mesure de diffraction  $\mu_p$  où  $\mu_p$  est associée à  $\mu$  par (1.19).*

Donnons un exemple où la mesure de diffraction admet une composante continue singulière. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi  $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs dont la somme converge. On dispose alors de la convergence presque sûre de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X_n$ . Notons  $\nu$  la loi de cette somme. C'est une loi symétrique, nous sommes donc dans les conditions d'applications de la proposition 1.4.3 dès que  $\nu$  est sans atomes. Nous allons montrer que pour certaines suites  $(a_n)$ , la mesure  $f(\nu)$  se décompose sous la forme  $f(\nu) = \frac{1}{4}\delta_0 + m$  où  $m$  est une mesure continue singulière. Ce sera une conséquence immédiate du lemme suivant.

**Lemme 1.4.4** *Soit  $\nu$  la loi de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X_n$  comme décrit ci-dessus. Soit  $k$  un entier strictement positif. Pour que  $\nu^{*k}$  soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, il est suffisant que soit réalisée la condition*

$$\inf_{N \in \mathbb{N}} (2k+1)^N k \sum_{n \geq N} a_n = 0. \quad (1.25)$$

*Pour que  $\nu^{*k}$  soit sans atomes, il est suffisant que  $\nu$  le soit. Cette dernière propriété est réalisée sous la condition*

$$\exists N : n \geq N \Rightarrow a_n > \sum_{l > n} a_l. \quad (1.26)$$

**Preuve :** Soit  $(Z_n)_n$  une famille i.i.d de variables aléatoires ayant même loi que la somme de  $k$  variables indépendantes de loi  $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ . La mesure  $\nu^{*k}$  est alors la loi de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Z_n$ . Les variables  $Z_n$  sont à valeur dans  $\{-k, \dots, k\}$ . Dans la suite de cette preuve, quand nous écrirons  $z_n$ , nous supposerons toujours que c'est un entier de  $\{-k, \dots, k\}$ . Supposons que (1.25) est réalisée. Soit  $N$  un entier naturel. Fixons  $z_0, \dots, z_{N-1}$ . La fonction  $(z_n)_{n \geq N} \mapsto \sum_{n \geq N} a_n z_n$  prend ses valeurs dans un intervalle de longueur  $2k \sum_{n \geq N} a_n$ . On en déduit que la fonction  $(z_n)_n \mapsto \sum_n a_n z_n$  prend ses valeurs dans un ensemble de mesure au plus  $(2k+1)^N 2k \sum_{n \geq N} a_n$ . La condition (1.25) montre donc que la mesure  $\nu^{*k}$  est singulière.

Supposons maintenant que (1.26) est vérifiée pour un certain  $N$  et montrons que  $\nu$  est continue ( $k = 1$ ). La fonction  $(z_n)_{n \geq N} \mapsto \sum_{n \geq N} a_n z_n$  est injective. Pour un  $x$  fixé, la fonction  $(z_n)_n \mapsto \sum_n a_n z_n$  prend donc au plus  $2^N$  fois la valeur  $x$ . On en déduit que  $\nu(\{x\}) = 0$ . La mesure est sans atomes. Il découle enfin immédiatement du théorème de Fubini que la convolée de mesures sans atomes l'est encore, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Un exemple de suite  $(a_n)$  vérifiant les conditions (1.26) et (1.25) pour tout  $k \geq 1$  est fourni par la suite définie par  $a_n = \frac{1}{n^n}$  (pour  $N \geq 2$ , on a l'inégalité  $\sum_{n \geq N} a_n \leq \frac{2}{N^N}$ ).

Si  $\nu$  est telle que les  $\nu^k$  sont purement singulières pour  $k \geq 1$ , alors la mesure  $\arcsin(\nu)$  l'est également, car c'est une somme de mesures purement singulières. La mesure  $f(\nu)$  ( $f$  définie par (1.24)) se décompose donc sous la forme  $f(\nu) = \frac{1}{4}\delta_0 + m$  où  $m$  est une mesure purement singulière. Il existe alors, d'après la proposition 1.4.3 et d'après ce qui précède un processus ponctuel admettant une mesure de diffraction de la forme  $\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k + (\check{m})_p$  où  $(\check{m})_p$  est une mesure purement singulière 1-périodique.

## 1.5 Ensembles obtenus par la méthode “cut-and-project”

### 1.5.1 Principe

La preuve du théorème 1.1.3 découle des lemmes suivants.

**Lemme 1.5.1** *Le processus  $\chi$  est stationnaire et ergodique.*

**Preuve :** Rappelons que l'application  $\pi$  est définie par (1.5). On remarque, pour tout  $t \in E$ , la relation

$$\pi(\phi - t) = \pi(\phi) - t.$$

La stationnarité et l'ergodicité de  $\chi$  découlent donc des propriétés analogues de  $(\chi, (T_t)_{t \in E})$ .  $\square$

**Lemme 1.5.2** *Le processus  $\chi$  est de carré intégrable.*

**Preuve :** Fixons un compact  $K$  de  $E$ . Il s'agit de montrer que l'application qui à  $\chi$  associe  $\text{card}(\chi \cap K)$  est de carré intégrable. De par la définition de  $\chi$ , il s'agit donc de montrer que  $\phi \mapsto \text{card}(\phi \cap K \times W)$  est de carré intégrable. Mais cela fait partie des hypothèses faites sur le processus  $\phi$ .  $\square$

**Lemme 1.5.3** *Conservons les notations du théorème 1.1.3. La mesure de Palm de  $\chi$  est l'image de  $\alpha\lambda \otimes \tilde{Q}$  par l'application  $f$  de  $W \times \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^d)$  dans  $\mathcal{M}_\sigma(E)$  définie par (1.7).*

**Preuve :** Soit  $A$  un élément de la tribu de  $\mathcal{M}_\sigma(E)$ . Désignons par  $B$  le cube unité  $[0, 1]^k$  de  $E$ . Rappelons que  $\phi$  est le processus ponctuel dans  $\mathbb{R}^d$  qui nous a servi à définir  $\chi$ . On a

$$\begin{aligned} \tilde{P}(A) &= E \left( \sum_{x \in \chi \cap B} 1_A(\chi - x) \right) \\ &= E \left( \sum_{x \in \phi \cap B \times W} 1_A \left[ p_E(\phi \cap E \times W) - x_E \right] \right). \end{aligned}$$

Remarquons que  $p_E(\phi \cap E \times W) - x_E = p_E((\phi - x_E) \cap E \times W) = p_E((\phi - x + x_F) \cap E \times W)$ . On en déduit par la formule de Campbell (1.3)

$$\tilde{P}(A) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \int d\tilde{Q}(\phi) 1_{B \times W}(x) 1_A \left[ p_E((\phi + x_F) \cap E \times W) \right]$$

puis

$$\tilde{P}(A) = \int_F d\nu(x_F) \int d\tilde{Q}(\phi) 1_A \left[ p_E((\phi + x_F) \cap E \times W) \right]$$

où  $\nu$  est la mesure image de  $1_{B \times W}(x)dx$  par  $p_F$  c'est-à-dire la mesure sur  $W$  définie, pour un borélien  $C$  de  $W$ , par

$$\begin{aligned} \nu(C) &= \int_{\mathbb{R}^d} dx 1_{B \times W}(x) 1_C(x_F) \\ &= |B \times C| \\ &= \alpha \lambda(C). \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.5.4** *L'intensité de la mesure de Palm est donnée par la formule (1.8)*

**Preuve :** Soit  $C$  un borélien de  $E$ . D'après le lemme 1.5.3 on a

$$I(\tilde{P})(C) = \alpha \int_W dw \int d\tilde{Q}(\phi) \text{card} \left[ C \cap p_E((\phi + w) \cap E \times W) \right].$$

Mais  $\text{card} \left[ C \cap p_E((\phi + w) \cap E \times W) \right] = \text{card} \left[ C \times W \cap (\phi + w) \right] = \text{card} \left[ C \times (W - w) \cap \phi \right]$ .  
Par conséquent

$$I(\tilde{P})(C) = \alpha \int_W dw I(\tilde{Q}) \left[ C \times (W - w) \right].$$

Comme  $I(\tilde{Q})$  est une mesure  $\sigma$ -finie (grâce au lemme (1.3.1)), on peut également écrire

$$\begin{aligned} I(\tilde{P})(C) &= \alpha \int_W dw \int_{\mathbb{R}^d} I(\tilde{Q})(dx) 1_C(x_E) 1_W(x_F + w) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} I(\tilde{Q})(dx) 1_C(x_E) \psi(x_F) \end{aligned}$$

où  $\psi$  est la fonction définie en (1.9). □

**Lemme 1.5.5** *La fonction  $\psi$  est continue.*

**Preuve :** Soit  $(f_n)_n$  une suite d'applications continues et à support compact de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant vers  $1_W$  en norme  $L^1$ . La suite  $(f_n * 1_{-W})_n$  est une suite d'applications continues qui convergent uniformément vers  $\psi$ . Cela prouve le lemme. □

**Lemme 1.5.6** *La transformée de Fourier de  $I(\tilde{P})$  est la mesure définie par (1.10).*

**Preuve :** Remarquons que, d'après le théorème 1.1.1,  $I(\tilde{Q})$  est une mesure d'autocorrélation. C'est donc en particulier une mesure tempérée (lemme 1.2.1) et sa transformée de Fourier est une mesure positive (lemme 1.2.2). Comme  $\widehat{\psi} = |\widehat{1_W}|^2$  est une fonction positive, la relation (1.10) définit une mesure positive. La relation (1.8) définie par ailleurs

une mesure tempérée par le théorème 1.1.1 (qui prouve que c'est une mesure d'auto-corrélation) et le lemme 1.2.1. Considérons une fonction de Schwartz  $f$  à valeurs réelles positives. Il s'agit de montrer l'égalité

$$\int I(\tilde{Q})(dx)\psi(x_F)\hat{f}(x_E) = \alpha \int \widehat{I(\tilde{Q})}(dx)\widehat{\psi}(x_F^\perp)\hat{f}(x_E^\perp).$$

En effet, comme toute fonction de Schwartz réelle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions de Schwartz positives, cela suffit pour prouver le lemme. Notons  $\rho$  la densité de la mesure de Gauss canonique sur  $F$ . Pour tout  $\lambda > 0$  on note  $\rho_\lambda$  la fonction de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\rho_\lambda(y) = \frac{1}{\lambda^l} \rho\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

où  $l$  désigne la dimension de  $F$ .

Remarquons que la fonction  $x \mapsto \psi * \rho_\lambda(x_F)\hat{f}(x_E)$  est une fonction de Schwartz admettant pour transformée de Fourier inverse la fonction  $x \mapsto \alpha\widehat{\psi}(x_F^\perp)\widehat{\rho_\lambda}(x_F^\perp)\hat{f}(x_E^\perp)$ . On obtient donc

$$\int I(\tilde{Q})(dx)\psi * \rho_\lambda(x_F)\hat{f}(x_E) = \alpha \int \widehat{I(\tilde{Q})}(dx)\widehat{\psi}(x_F^\perp)\widehat{\rho_\lambda}(x_F^\perp)\hat{f}(x_E^\perp).$$

Il suffit pour conclure de passer à la limite quand  $\lambda$  tend vers 0.

A droite, on exploite la positivité de  $\widehat{\psi}$  ( $\widehat{\psi} = |\widehat{1_W}|^2$ ). Fixons  $y$  dans  $E$ . L'application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\lambda \mapsto \widehat{\rho_\lambda}(y) = \widehat{\rho}(\lambda y)$  est décroissante, continue et vaut 1 en 0. Comme  $\widehat{\psi}f$  est positive, on déduit du théorème de convergence monotone la convergence du membre de droite vers

$$\alpha \int \widehat{I(\tilde{Q})}(dx)\widehat{\psi}(x_F^\perp)\hat{f}(x_E^\perp).$$

A gauche, la continuité de  $\psi$  (lemme 1.5.5) entraîne classiquement la convergence simple de  $\psi * \rho_\lambda$  vers  $\psi$ . Il suffit pour conclure de dominer  $\psi * \rho_\lambda$  par une fonction qui décroît suffisamment bien à l'infini. Soit  $M > 0$  tel que le support de  $\psi$  soit inclus dans la boule  $B_M$  centrée en l'origine et de rayon  $M$ . On a

$$\begin{aligned} \psi * \rho_\lambda(y) &\leq \frac{\|\psi\|_\infty}{(2\pi)^{l/2}} \int_{B_M} \frac{1}{\lambda^l} e^{-\frac{1}{2\lambda^2}\|y-t\|^2} dt \\ &\leq c h(\lambda, \max\{\|y\| - M, 0\}). \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante et où  $h$  est définie par

$$h(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda^l} e^{-\frac{a^2}{2\lambda^2}}.$$

Restreignons nous aux  $\lambda$  inférieurs à 1. On a

$$\frac{\partial \ln h}{\partial \lambda}(\lambda, a) = -\frac{l}{\lambda} + \frac{a^2}{\lambda^3}.$$

Ainsi,  $a \geq \sqrt{l}$  entraîne la croissance de  $h$  en  $\lambda$  ( $\lambda \leq 1$ ). On a donc  $\psi * \rho_\lambda(y) \leq c h(1, \|y\| - M)$  dès que  $\|y\| > M + \sqrt{l}$ . Par ailleurs, on a toujours  $\psi * \rho_\lambda(y) \leq \|\psi\|_\infty$ . Soit alors  $b$  la fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

1.  $b(y) = c h(1, \|y\| - M)$  si  $\|y\| > M + \sqrt{l}$ ;
2.  $b(y) = \|\psi\|_\infty$  sinon.

D'après ce qui précède, cette fonction domine  $\psi * \rho_\lambda$ .

Comme  $\int I(\tilde{Q})(dx)b(x_F)|\hat{f}(x_E)|$  est fini, on obtient par convergence dominée la convergence du membre de gauche vers  $\int I(\tilde{Q})(dx)\psi(x_F)\hat{f}(x_E)$ . Cela conclut le lemme.  $\square$

### 1.5.2 Exemple : sous-ensembles aléatoires de $\mathbb{Z}^d$

Nous prouvons dans cette sous-section une version du théorème 1.1.5 légèrement plus précise que celle énoncée dans l'introduction.

Nous reprenons la même construction que dans la section 1.4 dont nous exploitons les résultats. Soit  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  un processus stationnaire et ergodique à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Soit  $U$  une variable aléatoire indépendante et de loi uniforme sur  $[0, 1]^d$ . Nous définissons un processus ponctuel  $\chi$  par  $\chi = f(U, X)$  où  $f$  est définie par (1.21).

Notre objectif est d'appliquer la construction “cut-and-project” à ce processus, généralisant ainsi le résultat obtenu pour  $X$  i.i.d dans [6]. La seule difficulté restante réside dans l'hypothèse d'ergodicité suivant un certain sous-espace. Cela impose des conditions sur le sous-espace  $E$  (pour un processus  $X$  donné). Nous allons montrer (proposition 1.5.8), l'existence de vecteurs  $v$  pour lesquels  $\chi$  est ergodique sous l'action des translations de  $\mathbb{R}v$ . Si  $E$  contient un tel vecteur  $v$ , le processus est alors a fortiori ergodique sous l'action des translations de  $E$ .

Décrivons une classe de processus  $X$  pour lesquels nous pouvons expliciter les vecteurs  $v$  qui conviennent. Pour tout ensemble fini  $I \subset \mathbb{Z}^d$ , nous définissons le processus stationnaire  $Y^I$  par

$$Y_n^I = \prod_{i \in I} X_{n+i}. \quad (1.27)$$

Notons  $\mu_I$  la mesure spectrale de  $Y^I$ , c'est-à-dire l'unique mesure positive sur  $[0, 1]^d$  telle que  $\widehat{\mu}_I(k) = EY_0^I Y_k^I$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Nos résultats sont plus précis pour les processus vérifiant la propriété suivante :

Pour tout  $I$ ,  $\mu_I$  est le produit direct de mesures positives

$$\text{et finies sur } [0, 1[ \text{ sans atomes sur } ]0, 1[. \quad (1.28)$$

Le lemme suivant fournit des exemples.

**Lemme 1.5.7** *Considérons  $d$  processus stationnaires, ergodiques et indépendants  $(A_n^i)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeur dans  $\{0, 1\}$ . Définissons un processus  $X$  indexé par  $\mathbb{Z}^d$  en posant  $X_{n_1, \dots, n_d} = A_{n_1}^1 \dots A_{n_d}^d$ . Ce processus est stationnaire et ergodique. Si les processus  $A^i$  sont faiblement mélangeants, alors  $X$  vérifie la propriété (1.28).*

**Remarque :** Les processus construits en 1.4.2 sont faiblement mélangeants car les processus gaussiens à partir desquels ils sont construits le sont ([17, Ch.14 §2 Th.1]).

**Preuve :** Il est clair que  $X$  ainsi construit est stationnaire et ergodique (comme dans le lemme 1.4.2). Il suffit par ailleurs de vérifier la propriété (1.28) pour les ensembles de la forme  $I = I^1 \times \dots \times I^d$  où les  $I^i$  sont des sous-ensembles finis de  $\mathbb{Z}$  (quitte à augmenter  $I$  sans

changer  $Y^I$ ). La mesure spectrale de  $Y^I$  est alors le produit direct des mesures spectrales des  $A^{i,I_i}$  définis par  $A_n^{i,I_i} = \prod_{k \in I_i} A_{n+k}^i$ . Or, si les  $A^i$  sont faiblement mélangeant, les  $A^{i,I_i}$  le sont également. Leur mesure spectrale n'a donc dans ce pas d'atome en dehors de 0 ([17, Ch.1 §7 Th.2]).  $\square$

**Proposition 1.5.8** *Il existe un ensemble  $S$  négligeable de  $S^{d-1}$  tel que  $\chi$  est ergodique suivant la direction  $\mathbb{R}v$  pour  $v \in S^{d-1} \setminus S$ . Cet ensemble est dénombrable si  $d = 2$ . Si  $X$  vérifie la propriété (1.28), on peut prendre pour  $S$  l'ensemble des vecteurs unitaires dont les coordonnées sont liées sur  $\mathbb{Q}$ .*

Avant de prouver cette proposition, énonçons quelques conséquences. Notons  $\mu$  la mesure spectrale de  $X$ . Soient  $E$  et  $F$  deux sous-espaces supplémentaires de  $\mathbb{R}^d$ . Fixons un sous-ensemble borélien borné  $W \subset F$ . Construisons un processus ponctuel  $\phi$  par  $\phi = \pi(\chi)$  où  $\pi$  est définie par (1.5).

**Théorème 1.5.9** *Supposons que  $E$  contient un vecteur de  $S^{d-1} \setminus S$  où  $S$  est un ensemble donné par la proposition 1.5.8. Le processus  $\phi$  est alors stationnaire ergodique et de carré intégrable. Il admet presque sûrement (avec les notations de la section 1.5) l'autocorrélation défini pour tout borélien  $C$  de  $\mathbb{R}^d$  par*

$$\gamma = \alpha \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\mu}(k) \psi(k_F) 1_C(k_E)$$

et la mesure de diffraction définie par

$$\mu(C) = \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(x_F^\perp) 1_C(x_E^\perp) \mu_p(dx).$$

**Preuve :** Elle découle de la proposition 1.5.8 et des théorèmes 1.1.3, 1.1.1 et 1.1.2.  $\square$

Si on prend pour  $X$  le processus constant égale à 1, le processus  $\chi$  est (à translations près) le réseau déterministe  $\mathbb{Z}^d$ . On peut prendre pour  $S$  l'ensemble des vecteurs unitaires libres sur  $\mathbb{Q}$ . On retrouve alors avec le théorème 1.5.9 les résultats classiques sur les “model-sets” [33, 47, 69, 62, 52].

Il nous reste à prouver la proposition 1.5.8. Cette preuve découle des lemmes suivants.

**Lemme 1.5.10** *Soient  $\mu$  une mesure positive et finie sur  $[0, 1]^d$  et  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $\tilde{\mu}$  la mesure définie pour tout borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  par  $\tilde{\mu}(A) = \mu(A \setminus \{0\})$ . Alors*

$$\tilde{\mu}(\{u : u \cdot v \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]\}) \leq (\tilde{\mu})_p(v^\perp)$$

où  $(\tilde{\mu})_p$  est la mesure associée à  $\tilde{\mu}$  par (1.19).

**Preuve :** Remarquons

$$\{u : u \cdot v \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{u : (u - k) \cdot v = 0\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(\{u : u \cdot v \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]\}) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mu}(\{u \in [0, 1]^d : (u - k) \cdot v = 0\}) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{\mu})_p(\{u \in [0, 1]^d - k : u \cdot v = 0\}) \\
&\leq (\tilde{\mu})_p(v^\perp)
\end{aligned}$$

ce qui établit le lemme.  $\square$

**Lemme 1.5.11** *On considère  $d$  fonctions bornées  $\phi_1, \dots, \phi_d$  de périodes respectives  $1/v_1, \dots, 1/v_d$  où les  $v_k$  sont des réels non nuls. Soit  $\lambda$  un réel. Alors la limite suivante existe :*

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T, T]} e^{i2\pi\lambda t} \prod_{k \in \{1, \dots, d\}} \phi_k(t) dt \longrightarrow m. \quad (1.29)$$

De plus,  $m = 0$  dès que  $\lambda \notin \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]$ .

**Preuve :** Soit  $M$  tel que  $\|\phi_k\|_\infty \leq M$  pour tout  $k$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . En convolant les  $\phi_k$  avec une fonction convenable on obtient des fonctions  $\tilde{\phi}_k$  continues de période  $1/v_k$  telles que  $\|\tilde{\phi}_k\|_\infty \leq M$  et

$$\int_{[0, 1/v_k]} |\phi_k - \tilde{\phi}_k| \leq \varepsilon.$$

On se donne alors pour chaque  $k$  un polynôme trigonométrique  $P_k = \sum_l a_{k,l} e^{i2\pi v_k l \cdot}$  tel que  $\|P_k - \tilde{\phi}_k\|_\infty \leq \inf\{\varepsilon v_k, 1\}$ . Ces polynômes vérifient, pour tout  $k$ ,

1.  $\int_{[0, 1/v_k]} |\phi_k - P_k| \leq 2\varepsilon$
2.  $\|P_k\|_\infty \leq M + 1$ .

En développant, on constate que la fonction  $t \mapsto e^{i2\pi\lambda t} \prod_{k \in \{1, \dots, d\}} P_k(t)$  est une somme d'exponentielles :

$$e^{i2\pi\lambda t} \prod_{k \in \{1, \dots, d\}} P_k(t) = \sum_{l_1, \dots, l_d} a_{1, l_1} \dots a_{d, l_d} \exp \left[ i2\pi t(\lambda + v_1 l_1 + \dots + v_d l_d) \right]. \quad (1.30)$$

On en déduit l'existence de la limite suivante :

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T, T]} e^{i2\pi\lambda t} \prod_{k \in \{1, \dots, d\}} P_k(t) dt \longrightarrow A_\varepsilon. \quad (1.31)$$

Par ailleurs, en exploitant le fait que les  $\phi_k$  et les  $P_k$  sont bornés par  $M + 1$ , on obtient

$$\left| \prod_k P_k - \prod_k \phi_k \right| \leq (M + 1)^{d-1} \sum_k |P_k - \phi_k|.$$

On a donc

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{[-T, T]} e^{i2\pi\lambda t} \left( \prod_k P_k(t) - \prod_k \phi_k(t) \right) dt \right| \leq (M + 1)^{d-1} \sum_k \frac{1}{2T} \int_{[-T, T]} |P_k - \phi_k|$$

dont on déduit

$$\overline{\lim} \left| \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi\lambda t} \left( \prod_k P_k(t) - \prod_k \phi_k(t) \right) dt \right| \leq 2d(M+1)^{d-1}\varepsilon. \quad (1.32)$$

En combinant (1.31) et (1.32) on obtient la convergence (1.29). Enfin, dans le cas où  $\lambda \notin \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]$ , aucune des exponentielles qui interviennent dans la somme (1.30) n'est constante. On a donc (pour tout  $\varepsilon$ ),  $A_\varepsilon = 0$ . On en déduit que le  $m$  qui intervient dans (1.29) est nul.  $\square$

**Lemme 1.5.12** *Pour tout sous-ensemble fini  $I$  de  $\mathbb{Z}^d$ , on note  $\mu_I$  la mesure spectrale du processus stationnaire  $(Y_k^I)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  défini par (1.27). Soit  $v$  un vecteur non nul. Le processus  $\chi$  est ergodique selon  $\mathbb{R}v$  dès que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. Pour tout  $I$ ,  $(\tilde{\mu}_I)_p(v^\perp) = 0$  où  $(\tilde{\mu}_I)_p$  est associée à  $\mu_I$  comme dans le lemme 1.5.10.
2. les coordonnées de  $v$  sont libres sur  $\mathbb{Q}$ .

**Preuve :** Soit  $v$  un vecteur vérifiant les deux conditions du lemme. Notons  $\mathcal{D}$  la tribu produite sur  $D = [0, 1]^d \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Considérons l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $D$  définie par

$$T_t(U, X) = (\{U - tv\}, (X_{k-\lfloor U - tv \rfloor})) .$$

D'après (1.22), il suffit de montrer que  $(U, X)$  est ergodique sous cette action. Considérons l'ensemble  $\mathcal{P}$  des  $A \times B$  où  $A$  est un borélien de  $[0, 1]^d$  et  $B$  est de la forme  $\{X : \cap_{i \in I} X_i = 1\}$  pour un ensemble fini  $I \subset \mathbb{Z}^d$ . L'ensemble  $\mathcal{P}$  est stable par intersection et génère la tribu  $\mathcal{D}$ . On en déduit qu'il suffit d'établir

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} 1_F \circ T_t dt \xrightarrow{L^1} P(F) \quad (1.33)$$

pour tout  $F$  de  $\mathcal{P}$ . En effet, si on prouve cette relation, on aura aussi

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} 1_F \circ T_t 1_G dt \xrightarrow{L^1} P(F)1_G$$

et donc  $\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} P(T_t F \cap G) dt \rightarrow P(F)P(G)$  pour tout  $G$  de  $\mathcal{D}$ . Par un argument d'engendrement on montre alors que cette dernière propriété est vérifiée pour tout  $F$  de  $\mathcal{D}$  et on conclut en l'appliquant à  $F = G$  un ensemble invariant par le flot. Montrons donc (1.33). Cette relation se réécrit (avec  $F = A \times B$ ) :

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} 1_A(\{U - tv\}) \prod_{i \in I} X_{i-\lfloor U - tv \rfloor} dt \xrightarrow{L^1} |A|P\left(\bigcap_{i \in I} X_i = 1\right).$$

En écrivant  $1_A$  comme limite (au sens  $L^1$ ) de polynômes trigonométriques, on obtient qu'il suffit d'établir, pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}^d$ ,

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi k \cdot (U - tv)} \prod_{i \in I} X_{i-\lfloor U - tv \rfloor} dt \xrightarrow{L^1} a_k \quad (1.34)$$

où  $a_0 = P(\bigcap_{k \in I} X_k = 1)$  et  $a_k = 0$  si  $k$  est non nul. Introduisons un nouveau processus stationnaire  $(Y_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  défini par (1.27). Le problème devient maintenant de montrer

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} Y_{-[U-tv]} dt \xrightarrow{L^1} a_k \quad (1.35)$$

Exploitons pour cela la représentation intégrale ([67, Ch. VI §3. Th.1]) de  $Y$  :  $Y_k = \int e^{i2\pi k \cdot u} \mathbb{Y}(du)$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} Y_{-[U-tv]} dt &= \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} \left[ e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} \int e^{-i2\pi [U-tv] \cdot u} \mathbb{Y}(du) \right] dt \\ &= \int \left[ \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} e^{-i2\pi [U-tv] \cdot u} dt \right] \mathbb{Y}(du) \\ &= \int \left[ \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} \phi(t) dt \right] \mathbb{Y}(du). \end{aligned} \quad (1.36)$$

où  $\phi$  est la fonction définie par  $\phi(t) = e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} e^{-i2\pi [U-tv] \cdot u}$ . On a

$$\phi(t) = e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} e^{-i2\pi (U-tv) \cdot u} e^{i2\pi \{U-tv\} \cdot u}$$

où  $\{a_1, \dots, a_d\}$  désigne le vecteur formé des parties fractionnaires des  $a_j$ . Remarquons la décomposition

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{i2\pi((k-u) \cdot U)} e^{i2\pi((u-k) \cdot v)t} \prod_{j=1..d} e^{i2\pi(\{U_j - tv_j\} u_j)} \\ &= c \varphi(t) \prod_{j=1..d} \psi_j(t) \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante,  $\varphi$  est soit une constante soit une exponentielle de période  $\frac{1}{(u-k) \cdot v}$ , et où les  $\psi_j$  sont des fonctions bornées et périodiques de périodes  $\frac{1}{v_j}$ . On en déduit grâce au lemme 1.5.11 la convergence simple suivante :

$$\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} \phi(t) \rightarrow m(u).$$

Comme  $|\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} \phi(t)| \leq 1$ , la convergence a également lieu dans  $L^2(\mu_I)$ . Remarquons que  $m(u)$  est nulle dès que  $(u - k) \cdot v \notin \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]$  (grâce au lemme 1.5.11) c'est-à-dire dès que  $u \cdot v \notin \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_d]$ . D'après le lemme 1.5.10 et la première hypothèse du lemme, on a donc  $m(u) = 0$   $\mu_I$ -p.s. en dehors de 0. Ainsi  $\int m(u) \mathbb{Y}(u) = m(0) \mathbb{Y}\{0\}$  (p.s. en X). Comme  $X$  est ergodique,  $Y$  l'est aussi. Par conséquent,  $\mathbb{Y}\{0\} = EY$  ([67, Ch. VI §3. Th.4]). Déterminons maintenant  $m(0)$ . Quand  $u = 0$ ,  $\phi(t) = e^{i2\pi(k \cdot U)} e^{-i2\pi(k \cdot v)t}$ . D'après l'hypothèse 2 du lemme,  $k \cdot v$  est nul si et seulement si  $k$  est nul. On en déduit  $m(0) = 1$  si  $k = 0$  et  $m(0) = 0$  sinon. Ainsi  $\int m(u) \mathbb{Y}(u) = a_k$ . On a donc

$$E_Y \left| \int \left[ \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} \phi \right] \mathbb{Y}(du) - a_k \right|^2 \rightarrow 0$$

c'est-à-dire (d'après (1.36))

$$E_Y \left| \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} Y_{-[U-tv]} dt - a_k \right|^2 \rightarrow 0.$$

On en déduit

$$E_Y \left| \frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} e^{i2\pi k \cdot (U-tv)} Y_{-[U-tv]} dt - a_k \right| \rightarrow 0$$

puis (1.35) par convergence dominée.  $\square$

Il reste maintenant à déterminer pour quels vecteurs unitaires  $v$  la première relation du lemme 1.5.12 est réalisée.

**Lemme 1.5.13** *Soit  $\mu$  une mesure positive et finie sur  $[0, 1]^d$ . On lui associe la mesure  $(\tilde{\mu})_p$  comme dans le lemme 1.5.10. Alors, il existe un ensemble  $S$  négligeable de  $S^{d-1}$  tel que, pour tout  $v \in S^{d-1} \setminus S$ ,*

$$(\tilde{\mu})_p(v^\perp) = 0.$$

*Si  $d = 2$  alors  $S$  est dénombrable.*

**Preuve :** Soit  $\nu$  une mesure positive finie et sans atome en 0. Définissons par récurrence les ensembles  $C_0, \dots, C_{d-1}$  : si  $C_0, \dots, C_{k-1}$  sont construits, on définit  $C_k$  comme l'ensemble des espaces vectoriels  $V^k$  de  $\mathbb{R}^d$  de dimension  $k$  tels que

1.  $V^k$  ne contient aucun espace  $V^j$  de  $C_j$  pour  $j \leq k-1$ .
2.  $\nu(V^k) > 0$ .

Remarquons que  $C_0 = \emptyset$ , car  $\nu\{0\} = 0$ . Nous ne l'avons introduit que pour simplifier la discussion. Les  $C_k$  ainsi construits, on dispose de la propriété suivante. Si un espace  $V$  de dimension  $k \leq d-1$  ne contient aucun espace  $V^j$  de  $C_j$  pour  $j \leq k$  alors  $\nu(V) = 0$ . En effet,  $V$  vérifie la propriété 1 de  $C_k$  sans appartenir à  $C_k$  (sinon il se contiendrait lui-même). Il ne peut donc pas vérifier la deuxième propriété de  $C_k$ . On a donc  $\nu(V) = 0$ .

Notons  $S$  l'ensemble des vecteurs de  $S^{n-1}$  qui sont orthogonaux à un élément d'un  $C_k$  :

$$S = \{v \in S^{d-1} \mid \exists k \leq d-1 \exists V \in C_k : V \subset v^\perp\}.$$

D'après la propriété qui vient d'être signalée, si  $v \in S^{n-1} \setminus S$ , on a  $\nu(v^\perp) = 0$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, d-1\}$ . Montrons que  $C_k$  est dénombrable. Considérons pour cela  $p$  éléments  $V_1^k, \dots, V_p^k$  de  $C_k$ . Étudions l'intersection  $W = V_1^k \cap V_2^k$ . C'est un sous-espace vectoriel de dimension  $a \leq k-1$  qui ne peut contenir aucun sous-espace d'un  $C_j$  pour  $j \leq a$  (sinon  $V_1^k$  le contiendrait aussi). D'après la propriété ci-dessus,  $W$  est donc de mesure nulle pour  $\nu$ . Il en va de même pour toute intersection de deux éléments de  $C_k$ . On en déduit l'égalité

$$\nu \left( \bigcup_{i \in \{1, \dots, p\}} V_i^k \right) = \sum_{i \in \{1, \dots, p\}} \nu(V_i^k).$$

En particulier

$$\sum_{i \in \{1, \dots, p\}} \nu(V_i^k) \leq \nu(\mathbb{R}^d).$$

Comme  $\nu$  est de masse fini, on en déduit que  $C_k$  est dénombrable. Comme

$$S = \bigcup_{k \in \{1, \dots, d-1\}} \bigcup_{V^k \in C_k} S^{n-1} \cap (V^k)^\perp$$

on en déduit que  $S$  est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue) et même dénombrable si  $d = 2$ .

Pour conclure, définissons pour tout  $n \geq 1$  la mesure  $\nu_n$ , restriction de  $(\tilde{\mu})_p$  à la boule centrée en l'origine et de rayon  $n$ . Ce qui précède s'applique à  $\nu_n$ . On obtient donc un ensemble  $S_n$  négligeable ou dénombrable si  $d = 2$ , tel que  $\nu_n(v^\perp) = 0$  pour tout vecteur  $v \in S^{d-1} \setminus S_n$ . Comme  $\nu_n(v^\perp)$  converge vers  $(\tilde{\mu})_p(v^\perp)$ , on conclut la preuve du lemme en posant  $S = \bigcup_n S_n$ .  $\square$

**Lemme 1.5.14** *Soit  $\mu_1, \dots, \mu_d$  des mesures positives sur  $[0, 1[$ , finies et sans atomes, excepté éventuellement en 0. On pose  $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_d$ . On lui associe  $(\tilde{\mu})_p$  comme dans le lemme 1.5.10. Alors pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^d$  dont les coordonnées sont libres sur  $\mathbb{Q}$ , on a*

$$(\tilde{\mu})_p(v^\perp) = 0.$$

**Preuve :** Notons  $H = v^\perp$  et  $\tilde{H} = H \setminus \mathbb{Z}^d$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu})_p(v^\perp) &= \mu_p(\tilde{H}) \\ &= \int (\mu_1)_p(dt_1) \cdots \int (\mu_{d-1})_p(dt_{d-1}) \int (\mu_d)_p(dt_d) 1_{\tilde{H}}(t_1, \dots, t_d) \\ &= \int (\mu_1)_p(dt_1) \cdots \int (\mu_{d-1})_p(dt_{d-1}) (\mu_d)_p(\{t_d : (t_1, \dots, t_d) \in \tilde{H}\}) \end{aligned}$$

où  $\{t_d : (t_1, \dots, t_d) \in \tilde{H}\}$  contient au plus un point (car  $v_d \neq 0$ ). On a donc

$$(\tilde{\mu})_p(v^\perp) = \int (\mu_1)_p(dt_1) \cdots \int (\mu_{d-1})_p(dt_{d-1}) (\mu_d)_p(\{t_d : (t_1, \dots, t_d) \in \tilde{H} \cap \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z}\})$$

car  $(\mu_d)_p$  n'a pas d'atomes hors de  $\mathbb{Z}$ . On en déduit, en remontant les égalités,

$$(\tilde{\mu})_p(v^\perp) = \mu_p(\tilde{H} \cap \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Z}).$$

En procédant de même pour les autres coordonnées, on obtient

$$(\tilde{\mu})_p(v^\perp) = \mu_p(\tilde{H} \cap \mathbb{Z}^d)$$

et on en déduit le lemme (car  $\tilde{H} \cap \mathbb{Z}^d = \emptyset$ ).  $\square$

**Preuve (proposition 1.5.8) :** Soit  $I$  un ensemble fini de  $\mathbb{Z}^d$ . On définit un processus  $(Y^I)$  par (1.27). Notons  $\mu_I$  sa mesure spectrale. Le lemme 1.5.13 nous fournit un ensemble  $S^I$  de la sphère unité en dehors duquel  $(\tilde{\mu}_I)_p(v^\perp) = 0$  ( $(\tilde{\mu}_I)_p$  est associé à  $\mu$  comme dans le lemme 1.5.10). Posons  $S = \bigcup_I S^I \cup L$  où  $L$  est l'ensemble des vecteurs unitaires liés sur  $\mathbb{Q}$ . Pour tout  $v \in S^{d-1} \setminus S$ , les deux conditions du lemme 1.5.12 sont vérifiées et le processus  $\chi$  est donc ergodique selon  $\mathbb{R}v$ .

On peut voir  $L$  ainsi :

$$L = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} k^\perp \cap S^{d-1}.$$

On en déduit que  $L$  est négligeable en général et dénombrable en dimension 2. Il est alors clair, à partir des propriétés de chacun des  $S^I$ , que  $S$  est toujours négligeable et qu'il est dénombrable si  $d = 2$ . Si  $X$  vérifie la propriété (1.28), on peut appliquer le lemme 1.5.14 à la place du lemme 1.5.13. On peut donc prendre  $S^I = L$  pour tout  $I$ . On a alors  $S = L$ .  $\square$



# Chapitre 2

## Quasicristaux et presque-périodicité

### 2.1 Abstract

We give in this paper topological and dynamical characterizations of mathematical quasicrystals. Let  $\mathcal{U}$  denote the space of uniformly discrete subsets of the Euclidean space. Let  $\mathcal{A}$  denote the elements of  $\mathcal{U}$  that admit an autocorrelation measure. A Patterson set is an element of  $\mathcal{A}$  such that the Fourier transform of its autocorrelation measure is discrete. Patterson sets are mathematical idealizations of quasicrystals. We prove that  $S \in \mathcal{A}$  is a Patterson set if and only if  $S$  is almost periodic in  $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$  where  $\mathcal{T}$  denotes the Besicovitch topology. Let  $\chi$  be an ergodic random element of  $\mathcal{U}$ . We prove that  $\chi$  is almost surely a Patterson set if and only if the dynamical system has a discrete spectrum. As an illustration, we study deformed model sets.

### 2.2 Introduction and statement of the main results

The diffraction of X rays by a material is a way of investigating its microscopic structure. The interferences of X rays that are diffracted by different atoms are indeed linked to the relative positions of these atoms. If the atoms form a lattice, as in ideal crystals, then the diffraction pattern consists in sharp peaks. Quasicrystals, discovered in 1982 by Shechtman et al. [66], have the same kind of diffraction pattern, but they are not periodic and their microscopic structure is not well understood. This raises the question of understanding which kinds of atomic distribution produce a crystal-like diffraction pattern. The mathematical formulation of this question has been given by Hof in [33]. For a more general introduction to mathematical quasicrystals see the review article by Katz [37] or the book by Senechal [64]. See also the collections [7] and [49].

Hof considers diffraction in the limit of infinite systems. This is natural as the solids we are interested in are of some relevant size. This is moreover advantageous because a crystal-like diffraction pattern can then be described as a Dirac comb. However, this setup requires a proper definition of the diffraction pattern of an infinite system. Hof observes that this pattern can be defined as the Fourier transform of an appropriately defined autocorrelation. He models the system as a sum of Dirac delta functions  $\sum_{x \in X} \delta_x$  where  $X$  denotes the set of atoms. The diffraction pattern is thus associated with a set of points in space. He notices that there is no loss of generality in this modelisation: indeed,

one can give a structure to atoms by convoluting the Dirac delta functions by a given function  $f$  describing the electron cloud; the diffraction pattern is simply multiplied by  $|\widehat{f}|^2$ . As formulated by Hof, the problem is then to understand the structure of the sets of points in space whose diffraction pattern is a Dirac comb. To emphasize the fact that we only consider diffraction properties of quasicrystals, and following Lagarias [40], we call such sets Patterson sets.

The simplest examples of Patterson sets are lattices. Mathematically, it is an easy consequence of the Poisson summation formula; physically, it simply means that the diffraction pattern of crystals consists of sharp peaks. The main non-trivial examples of Patterson sets are model sets. Those sets can roughly be described as a 3-dimensional cut of a lattice in a higher dimensional space (this is then a quasiperiodic structure). Hof has given in [33] the first rigorous proof that quite a large class of model sets are Patterson sets. This class has been successively extended since then [52, 62].

Another way of investigating Patterson sets consists in giving a characterization which is not expressed in terms of autocorrelations or of Fourier transforms. Given a set  $S$ , consider the following Fourier transform:

$$a_R(y) = \frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in S \cap (y + B_R)} \exp(2\pi i x \cdot \xi),$$

where  $|B_R|$  is the canonical Lebesgue measure of the ball  $B_R$  of radius  $R$  centered at the origin. Hof proves in [33] that, if  $a_R(y)$  converges to  $a$  as  $R$  converges to  $+\infty$ , and if the convergence is uniform w.r.t.  $y$ , then the diffraction pattern of  $S$  admits a Dirac delta function of strength  $|a|^2$  located at  $\xi$ . Notice that this result does not give any information on the diffuse part of the diffraction pattern. Actually, one can give a topological characterization of Patterson sets. These sets have long been thought to be almost periodic in some sense, and several partial results connecting almost periodicity and Patterson sets have been proved [8, 40, 41]. In this paper, we prove that the class of Patterson sets is exactly the class of almost periodic sets w.r.t. to the Besicovitch topology, a topology which has precisely emerged in the study of almost periodicity [12].

Patterson sets can also be understood on a dynamical side, i.e. when considering them as stochastic and stationary subsets of the ambient space. In this paper, we prove that a stochastic set is (almost surely) a Patterson set if and only if the spectrum of the associated dynamical system is discrete. This result was expected (partial versions of it have been proved, see [20, 42, 43, 68, 69]) and natural: discreteness of the spectrum of a dynamical system and almost periodicity are known to be linked.

We now state precise definitions. Let  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  ( $\mathcal{M}_\sigma$  when there is no confusion) denote the set of locally finite subsets of  $\mathbb{R}^n$ . Let  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ . For a given  $R > 0$ , we define the measure  $\gamma_R$  by

$$\gamma_R = \frac{1}{|B_R|} \sum_{x, y \in S \cap B_R} \delta_{y-x} = \frac{1}{|B_R|} \left( \sum_{x \in S \cap B_R} \delta_x \right) * \left( \sum_{x \in S \cap B_R} \delta_{-x} \right) \quad (2.1)$$

where  $\delta_x$  is the Dirac measure at  $x$ . Thus,  $\gamma_R$  represents the relative positions of the points of  $S \cap B_R$ . Physically, the Fourier transform of  $\gamma_R$  corresponds with the diffraction

pattern:  $\widehat{\gamma_R}(t)$  is the luminous intensity diffracted in the direction  $t$  by a material whose atom centers are the points of  $S \cap B_R$ .

The limit  $\gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \gamma_R$  in the vague topology, if it exists, is called the autocorrelation measure of  $S$ . Notice that, in some papers about diffraction, this limit is called the unique autocorrelation measure (an autocorrelation measure is, in these papers, any limit point of the measures  $\gamma_R$  as  $R$  tends to infinity). This measure is tempered and positive definite. Its Fourier transform  $\widehat{\gamma}$  (in the sense of tempered distributions), which is a positive measure, is called the diffraction measure of  $S$ .

The atomic structure is modeled by a uniformly discrete subset of  $\mathbb{R}^n$ , i.e. a set  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  such that the distance between any two distinct points is uniformly bounded from below. Let  $\mathcal{U}$  denote the set of uniformly discrete sets of  $\mathbb{R}^n$ . Let  $\mathcal{A}$  denote the set of uniformly discrete sets that admit an autocorrelation measure. The problem is to characterize all sets  $S \in \mathcal{A}$  whose diffraction measure is discrete (see [33]). Following the terminology of [40], we call such sets Patterson sets (actually, [40] also requires  $S$  to be relatively dense).

Let  $S \in \mathcal{A}$ . Denote by  $\gamma$  its autocorrelation measure. In [8], assuming that the support of  $\gamma$  is uniformly discrete, the authors prove that  $S$  is a Patterson set if and only if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $P_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}^n : \gamma(t) \geq \gamma(0) - \varepsilon\}$  is relatively dense (i.e. there exists  $R_\varepsilon$  such that in each ball of  $\mathbb{R}^n$  of radius  $R_\varepsilon$  one can find a point of  $P_\varepsilon$ ). Let us mention that they prove their result in a more general setting: the set  $S$  can be a weighted subset of a  $\sigma$ -compact locally compact abelian group (a weighted subset is a subset  $S$  with a complex number  $w_x$  associated to each point  $x$  in  $S$ ; in the definition of the autocorrelation  $\delta_{y-x}$  is then replaced by  $w_y \overline{w_x}$ ). Using their characterization, they for example give a short proof of the fact that, for  $d \geq 2$ , the set  $\{k \in \mathbb{Z}^d : ]0, k[\cap \mathbb{Z}^d = \emptyset\}$  of visible points of  $\mathbb{Z}^d$  is a Patterson set (see [9] for the original proof).

In the special case where  $S - S$  is uniformly discrete, which ensures that the support of  $\gamma$  is uniformly discrete, their characterization can be stated as follows:

$$\text{For all } \varepsilon > 0, \text{ the set } \{t \in \mathbb{R}^n : \overline{\text{dens}}(S\Delta(S-t)) \leq \varepsilon\} \text{ is relatively dense,} \quad (2.2)$$

where the upper density  $\overline{\text{dens}}(S)$  of a set  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  is defined by

$$\overline{\text{dens}}(S) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \text{card}(S \cap B_R).$$

Notice that (2.2) means that  $S$  is almost-periodic (see e.g. [38]) in the space of uniformly discrete sets  $\mathcal{U}$  equipped with the pseudometric  $\delta$  defined by

$$\delta(S, S') = \overline{\text{dens}}(S\Delta S'), \quad S, S' \in \mathcal{U}. \quad (2.3)$$

This characterization is a generalisation of a result of Queffélec who proved this result in the case of weighted subsets of  $\mathbb{Z}$  (see Lemma 6.25 in [57]). The characterization of [8] is also an improvement of a result of Solomyak who showed in [69] that, under some ergodicity assumptions, (2.2) was a sufficient condition for being a Patterson set.

The characterization is no longer true if the support of  $\gamma$  is not uniformly discrete, as the example of deformed model sets shows (see [11] where the authors prove that deformed model sets are Patterson sets by explicitly computing their autocorrelation and diffraction measures).

In this paper we prove that, in the general case, a set  $S \in \mathcal{A}$  is a Patterson set if and only if  $S$  is almost periodic in the space  $\mathcal{U}$  equipped with the Besicovitch pseudo-metric  $\bar{d}$  (see e.g. [12]) defined by

$$\bar{d}(S, S') = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} d(S - t, S' - t) dt,$$

where  $d$  is the standard metric on  $\mathcal{M}_\sigma$  (see (2.9)). In other words, the characterization given in [8] is true in the general case if we replace  $\delta$ -almost-periodicity by  $\bar{d}$ -almost-periodicity. Let us mention that Besicovitch almost-periodic sets have been introduced by Lagarias in [40] where he precisely proposed to study their diffraction properties.

More precisely, we prove the following result. Recall that a subset  $A$  of  $\mathbb{R}^d$  is relatively dense if there exists  $R > 0$  such that, in each ball of radius  $R$  in  $\mathbb{R}^d$ , one can find a point of  $A$ . Denote by dens( $A$ ) the lower density of a set  $A \in \mathcal{M}_\sigma$ : dens( $A$ ) =  $\liminf_{R \rightarrow \infty} |B_R|^{-1} \text{card}(A \cap B_R)$ .

**Theorem 2.2.1** *Let  $S$  be a uniformly discrete set admitting an autocorrelation  $\gamma$ . The following assertions are equivalent:*

1.  *$S$  is a Patterson set.*
2. *For all  $R > 0$ , for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \gamma(t + B_R) \geq \gamma(\{0\}) - \varepsilon\}$  is relatively dense.*
3.  *$S$  is almost periodic in  $(\mathcal{U}, \bar{d})$  (that is, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \bar{d}(S, S - t) \leq \varepsilon\}$  is relatively dense).*
4. *For each  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \text{dens}(S \setminus (S - t + B_\varepsilon)) \leq \varepsilon\}$  is relatively dense.*

We can sketch the proof as follows. If  $\mu$  is a finite measure, it is well known that  $\mu$  is discrete if and only if its Fourier transform is an almost periodic function, i.e., if and only if the following holds:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ the set } \{t \in \mathbb{R}^n : \|\widehat{\mu} - \widehat{\mu}(\cdot - t)\|_\infty \leq \varepsilon\} \text{ is relatively dense.}$$

Let  $\gamma$  be the autocorrelation measure of a set  $S \in \mathcal{A}$  (this is not, in general, a finite measure). If we fix a Schwartz function  $f$  such that  $\widehat{f}$  is positive, and apply the previous characterization to the finite measure  $\widehat{f}\widehat{\gamma}$ , we get the following result. The measure  $\widehat{f}\widehat{\gamma}$  is discrete if and only if  $\gamma * f$  is almost periodic. But  $\widehat{f}\widehat{\gamma}$  is discrete if and only if  $\widehat{\gamma}$  is discrete. The set  $S$  is then a Patterson set if and only if the following holds:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ the set } \{t \in \mathbb{R}^n : \|\gamma * f - \gamma * f(\cdot - t)\|_\infty \leq \varepsilon\} \text{ is relatively dense.} \quad (2.4)$$

As the function  $\gamma * f$  is positive definite, we have the following classical inequalities:

$$\|\gamma * f - \gamma * f(\cdot - t)\|_\infty^2 \leq 2\gamma * f(0)(\gamma * f(0) - \gamma * f(t)) \leq 2\gamma * f(0)\|\gamma * f - \gamma * f(\cdot - t)\|_\infty.$$

Therefore, (2.4) is equivalent to:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ the set } \{t \in \mathbb{R}^n : \gamma * f(0) - \gamma * f(t) \leq \varepsilon\} \text{ is relatively dense.} \quad (2.5)$$

The last step consists in comparing  $\gamma * f(0) - \gamma * f(t)$  with the distance  $\bar{d}(S, S - t)$  between  $S$  and its translate  $S - t$ . We get that (2.5) is equivalent to

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ the set } \{t \in \mathbb{R}^n : \bar{d}(S, S - t) \leq \varepsilon\} \text{ is relatively dense.}$$

This last statement is the definition of the almost periodicity of  $S$  in  $(\mathcal{U}, \bar{d})$ . The complete proof of this theorem is given in Section 2.4.

Consider now a stochastic set  $\chi$ , i.e. a point process (see [48], in particular Section 3.1, or [55]). A point process is a measurable map from a probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  to the space  $(\mathcal{M}_\sigma, d)$  equipped with its Borel  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{H}$ . For  $A \subset \mathbb{R}^n$ , let  $N_A : \mathcal{M}_\sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  denote the function defined by

$$N_A(S) = \text{card}(A \cap S). \quad (2.6)$$

Then the  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{H}$  on  $\mathcal{M}_\sigma$  is generated by the family of maps  $N_A$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , where  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  is the Borel  $\sigma$ -algebra of  $\mathbb{R}^n$ . A point process  $\chi$  is uniformly discrete if  $\chi$  takes its values in  $\mathcal{U}$ . A point process is stationary if its law is invariant under the action of the translations  $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^n}$ .

Let  $\chi$  be a stationary, ergodic and uniformly discrete point process. Denote by  $P$  its law. We can wonder whether  $\chi$  is almost surely a Patterson set.

In [69], Solomyak defines  $\varepsilon$ -almost-periods as points  $x$  of  $\mathbb{R}^n$  such that  $P\{\chi : d(\chi - x, \chi) > \varepsilon\} < \varepsilon$ . He shows that if, for all  $\varepsilon > 0$ , there exists a relatively dense set of  $\varepsilon$ -almost-periods, then the dynamical system has a discrete spectrum. By a result of Dworkin [20], this implies that  $\chi$  is a.s. a Patterson set. Notice that Solomyak assumption can be expressed as an almost-periodicity assumption. Almost-periodicity is thus a sufficient condition for  $\chi$  being a.s. a Patterson set. In the case of dynamical systems associated with self-similar tilings, a converse is known [43, 68].

In [42] the authors build a point process as follows. Let  $S$  be a uniformly discrete set with finite local complexity (i.e.  $S - S$  is locally finite). Let  $\Omega$  be the closure in  $(\mathcal{U}, d)$  of the orbit of  $S$  under the action of the translations. In this topology,  $\Omega$  is compact. Fix an ergodic and stationary probability measure  $P$  on  $\Omega$ . This is the law of an ergodic point process  $\chi$ . They prove that  $\chi$  is a.s. a Patterson set if and only if the dynamical system  $(\Omega, P, T_t)$  has a discrete spectrum. Actually their result is more general as it applies to multicolored point sets (i.e. weighted point sets in which weights are chosen among a finite set). It is a generalisation of a result of Queffélec (see [57] Proposition 4.21) that applies to multicolored subsets of  $\mathbb{Z}$ .

In this paper, we consider a general ergodic and uniformly discrete point process  $\chi$  and prove that  $\chi$  is a.s. a Patterson set if and only if the dynamical system admits a discrete spectrum. We also give characterizations based on the notion of almost periodicity. These conditions are in the spirit of the one given by Solomyak in [69].

**Theorem 2.2.2** *Let  $\chi$  be a stationary, ergodic and uniformly discrete point process. Then the following assertions are equivalent:*

1. *The process  $\chi$  is a.s. a Patterson set.*
2. *For all  $R > 0$ , the set  $A = \{S \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap B_R \neq \emptyset\}$  satisfies:*

$$\text{For all } \varepsilon > 0, \text{ the set } \{t \in \mathbb{R}^d : P(A \Delta (A - t)) \leq \varepsilon\} \text{ is relatively dense.} \quad (2.7)$$

3. For all  $A$  in  $\mathcal{H}$ , the  $\sigma$ -algebra on  $\mathcal{M}_\sigma$ , Condition (2.7) holds.

4. The dynamical system  $(\mathcal{M}_\sigma, (T_t)_t, P)$  has a discrete spectrum.

Our proof relies on almost periodicity and on the fact that an ergodic point process admits a.s. the intensity measure of its Palm measure as autocorrelation measure [26] (see Theorem 2.5.1). The notion of Palm measure is important in the theory of point processes. In this paper it enables us to give a closed formula for the autocorrelation measure. For a more general statement, see Theorems 2.5.1 and 2.5.2. In particular, the uniform discreteness assumption is not needed, one only need somme kind of local integrability.

We provide now an example of application of our results: deformed model sets. These sets are studied in [11]. Let  $E$  and  $F$  be two linear subspaces of  $\mathbb{R}^n$  such that  $\mathbb{R}^n = E \oplus F$  (i.e.  $E$  and  $F$  are supplementary subspaces of  $\mathbb{R}^n$ ). If  $x \in \mathbb{R}^n$  we write  $x = x_E + x_F$  with obvious notations. We denote by  $B_R^E$  (resp.  $B_R^F$ ) the closed ball of  $E$  (resp.  $F$ ) centered at the origin and of radius  $R$ . Let  $|\cdot|_F$  denote the canonical Lebesgue measure on  $F$ . Let  $W$  be a fixed bounded Borel subset of  $F$ . Let  $g : W \rightarrow E$  be uniformly continuous. Let  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  denote the  $n$  dimensional torus. We denote by  $\mathcal{P}(E)$  the set of all subsets of  $E$ . Let  $\phi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{P}(E)$  be defined by

$$\phi(u) = \psi((E + W) \cap (u + \mathbb{Z}^n)), \quad (2.8)$$

where  $\psi : E + W \rightarrow E$  is defined by

$$\psi(z) = z_E + g(z_F).$$

For all  $t \in E$ ,  $\phi(u - t) = \phi(u) - t$ . We assume that there exists an  $r > 0$  such that

$$\phi(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{U}_r(E).$$

We fix such an  $r$ . Then,  $\phi$  is measurable from  $\mathbb{T}^n$  endowed with its natural Borel  $\sigma$ -algebra to  $(\mathcal{U}_r, \mathcal{H})$ . If we equip  $\mathbb{T}^n$  with the Haar measure, then  $\phi$  is a stationary point process taking its values in  $\mathcal{U}_r(E)$ .

The following result is a direct consequence of Theorem 2.2.2 (actually of Theorems 2.5.1 and 2.5.2). To the author's knowledge, this is a new result (see nevertheless the paper by Moody [52] in the non deformed case).

**Theorem 2.2.3** *Consider the point process defined by (2.8). For almost all  $u$  in  $\mathbb{T}^n$ , the set  $\phi(u)$  is a Patterson set.*

Under further assumptions, we prove the following result (already proved in [11]):

**Theorem 2.2.4** *Consider the point process defined by (2.8). Assume that  $|\partial W|_F = 0$  and that  $\mathbb{T}^n$  is uniquely ergodic under the action of the translations  $(T_t)_{t \in E}$ . Then, for all  $u \in \mathbb{T}^n$ , the set  $\phi(u)$  is a Patterson set.*

Recently, Baake and Lenz made a systematic study of deformation of Delone dynamical systems [4]. In particular, they investigated deformed model sets in a very general framework.

In the recent independant paper [54] the authors investigate the topology induced by the pseudometric  $\delta$  defined by (2.3). They also study the related uniform topology in which two set are close if, after a small translation of one of them, they are close w.r.t. the pseudo-metric  $\delta$ . They call this topology the autocorrelation topology. They study in particular the link between this topology and the topology defined by the metric  $d$  in the case of model sets. See also the review paper [53] which contains further results toward a characterization of model sets through these topologies.

The autocorrelation topology is related to the Besicovitch topology in the following way. If  $S$  and  $S'$  are close w.r.t. the autocorrelation topology (which is a uniform topology) then they are close w.r.t. the Besicovitch pseudo-metric. The reverse implication is false in general. Consider for example the set  $S = \{n + (|n| + 1)^{-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ . For each integer  $k$  we have  $\bar{d}(S, S - k) = 0$ . Nevertheless, there exists a neighborhood  $V$  of  $S$  in the autocorrelation topology such that  $S - k$  never belongs to  $V$  for non-zero  $k$ . Notice that a key feature of this counterexample lies in the fact that  $S - S$  is not uniformly discrete.

## 2.3 Preliminary results

### 2.3.1 Besicovitch topology

The standard metric  $d$  on  $\mathcal{M}_\sigma$  is defined by (see e.g. [69]):

$$d(S, S') = \min \left\{ 1/\sqrt{2}, \inf D(S, S') \right\}, \quad S, S' \in \mathcal{M}_\sigma \quad (2.9)$$

where

$$D(S, S') = \{a > 0 : S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a \text{ and } S' \cap B_{1/a} \subset S + B_a\}.$$

Note that  $D(S, S')$  is a half line, unbounded to the right, i.e., that  $D(S, S')$  contains  $[a, +\infty[$  as soon as  $D(S, S')$  contains  $a$ . Roughly speaking, two sets  $S$  and  $S'$  are close w.r.t.  $d$  if they are close w.r.t. the Hausdorff metric in a large ball centered at the origin.

A set  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  is uniformly discrete with parameter  $r > 0$  if all pairs of distinct points of  $S$  are at least at distance  $r$ . The set  $\mathcal{U}_r$  of such  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  is a compact subset of  $(\mathcal{M}_\sigma, d)$  (this standard fact is a straightforward consequence of [46, Theorem 1.2.1]).

The Besicovitch pseudo-metric  $\bar{d}$  on  $\mathcal{U}$  (see e.g. [12]) is defined by

$$\bar{d}(S, S') = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} d(S - t, S' - t) dt.$$

(Actually, in [12], the Besicovitch pseudo-metric is defined on space of functions by formulas of the kind  $D_B(f, g) = [\limsup_{R \rightarrow \infty} |B_R|^{-1} |f - g|^{p/1/p}]$ . We also use the following pseudo-metric on  $\mathcal{U}_r$ . Let  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous with support in  $B_{r/5}$ . We assume that  $f$  is not everywhere equal to 0. For  $S, S' \in \mathcal{U}_r$ , define

$$\bar{d}_f(S, S') = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_S * f(u) - \mu_{S'} * f(u)| du,$$

where  $\mu_S = \sum_{x \in S} \delta_x$ .

Recall that two pseudo-metrics  $m$  and  $m'$  defined on the same space  $E$  are uniformly equivalent if the identity map from  $(E, m)$  to  $(E, m')$  and its inverse are uniformly continuous.

**Proposition 2.3.1** *Let  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous with support in  $B_{r/5}$  and not everywhere equal to 0. The functions  $\bar{d}$  and  $\bar{d}_f$  define translation invariant pseudo-metrics on  $\mathcal{U}_r$ . These pseudo-metrics are uniformly equivalent on  $\mathcal{U}_r$ .*

**Remarks :**

1. One can show that the pseudo-metric space  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$  is complete.
2. One can easily check that neither of the two metrics  $\bar{d}$  and  $d$  dominates the other: notice for example that, in the one dimensional case, the sequence of sets  $\{-n, \dots, n\}$  converges to  $\mathbb{Z}$  in  $(\mathcal{U}_r, d)$  and to the empty set in  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$ .

To prove the proposition, we introduce the following, intermediate, pseudo-metric  $\bar{d}^r$ . Let  $a > 0$ . If  $S$  and  $S'$  are two uniformly discrete sets, we let

$$\Delta_a(S, S') = \tilde{\Delta}_a(S, S') \cup \tilde{\Delta}_a(S', S)$$

where

$$\tilde{\Delta}_a(S, S') = \{x \in S : (x + B_a) \cap S' = \emptyset\} = S \setminus (S' + B_a).$$

Let  $\bar{D}(S, S')$  denote the set of all real  $a > 0$  such that

$$\overline{\text{dens}}(\Delta_a(S, S')) \leq a.$$

Note that  $\bar{D}(S, S')$  is a half-line, unbounded to the right. Define

$$\bar{d}^r(S, S') = \min\{r/2, \inf(\bar{D}(S, S'))\}, \quad S, S' \in \mathcal{U}_r.$$

The proof of Proposition 2.3.1 is standard (see Appendix 2.7). The following lemma, which is used in the proof, will be useful later.

**Lemma 2.3.2** *Let  $H : (\mathcal{U}_r, d) \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous. Then, for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\eta > 0$  such that, for every  $S$  and  $S'$  in  $\mathcal{U}_r$  such that  $\bar{d}(S, S') \leq \eta$ ,*

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |H(S - t) - H(S' - t)| dt \leq \varepsilon.$$

**Proof :** See Appendix 2.7. □

We will also need the following Lemma.

**Lemma 2.3.3** *Let  $S \in \mathcal{U}_r$  be a set admitting an autocorrelation. Let  $t \in \mathbb{R}^n$  and  $a \in ]0, r/4[$ . Then*

$$\overline{\text{dens}}(\tilde{\Delta}_a(S, S - t)) = \overline{\text{dens}}(\tilde{\Delta}_a(S - t, S)).$$

and

$$\overline{\text{dens}}(\tilde{\Delta}_{2a}(S, S - t)) \leq \overline{\text{dens}}(\tilde{\Delta}_a(S, S - t)). \quad \square$$

**Proof :** See Appendix 2.7. □

### 2.3.2 Discrete measure and almost periodicity

Let  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  where  $E$  is a Banach space. For  $t \in \mathbb{R}^n$ , define the function  $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  by  $f_t(x) = f(x - t)$ . The function  $f$  is (Bohr) almost periodic [12] if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \|f - f_t\|_\infty < \varepsilon\}$  is relatively dense. Let  $G$  denote the Banach space (for the uniform norm) of bounded and uniformly continuous functions from  $\mathbb{R}^n$  to  $E$ . The group  $\mathbb{R}^n$  acts on  $G$  by translations. If  $f$  is continuous and almost periodic, then  $f$  is bounded and uniformly continuous. A continuous function  $f$  from  $\mathbb{R}^n$  to  $E$  is then almost periodic if and only if  $f$  is an almost periodic point of  $G$  in the sense of the following definition.

Let  $(F, \delta)$  be a pseudo-metric space. Fix an action of  $\mathbb{R}^n$  on  $F$ . A point  $x \in F$  is almost periodic if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set

$$\{t \in \mathbb{R}^n : \delta(t.x, x) \leq \varepsilon\}$$

is relatively dense.

If  $x \in F$ , define  $O_x = \{t.x, t \in \mathbb{R}^n\}$ . Recall that a pseudo-metric space is totally bounded if, for all  $\varepsilon > 0$ , it can be covered by a finite number of balls of radius  $\varepsilon$ .

**Theorem 2.3.1** *Assume that the action of  $\mathbb{R}^n$  on  $F$  satisfies the two following conditions:*

1. *For all  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto t.x$  is an isometry.*
2. *For all  $x \in F$ ,  $t \mapsto t.x$  is continuous.*

*Let  $x \in F$ . Then  $x$  is almost periodic if and only if the space  $O_x$  is totally bounded. If  $F$  is a complete metric space,  $x$  is then almost periodic if and only if the set  $O_x$  is relatively compact in  $F$ .*

**Proof :** This is standard. Adapt for example the proof of [38, Theorem 6.5.5]. □

The following well known result is a straightforward consequence of Theorem 2.3.1.

**Corollary 2.3.4** *Let  $f$  (resp.  $\tilde{f}$ ) be a continuous and almost periodic function from  $\mathbb{R}^n$  to a Banach space  $E$  (resp.  $\tilde{E}$ ). Then the function  $(f, \tilde{f}) : \mathbb{R}^n \rightarrow E \times \tilde{E}$  is continuous and almost periodic. If in addition  $E = \tilde{E}$ , then  $f + \tilde{f}$  is continuous and almost periodic.* □

All the measures we consider are non-negative. The following result is proved (in a more general setup) in [21, 30, 63].

**Theorem 2.3.2** *Let  $\mu$  be a finite measure on  $\mathbb{R}^n$ . Then the two following assertions are equivalent.*

1. *The function  $\widehat{\mu}$  is almost-periodic (i.e., for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \|\widehat{\mu} - \widehat{\mu}(\cdot - t)\|_\infty \leq \varepsilon\}$  is relatively dense).*
2. *The measure  $\mu$  is discrete.*

This can be extended to classes of unbounded measures (see for example Corollaries 11.1 and 5.5 in [23]). The following weaker result, which is not new and which is an easy consequence of Theorem 2.3.2, is sufficient and suited for our purposes. Let  $\mathcal{S}$  denote the class of Schwartz functions from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{C}$ . Recall that, if a tempered measure  $\gamma$  is positive definite, then, its Fourier transform in the sense of tempered distribution  $\widehat{\gamma}$  is a positive measure (see e.g. [58]).

**Theorem 2.3.3** *Let  $\mu$  be a positive, tempered and positive definite measure on  $\mathbb{R}^n$ . Then  $\widehat{\mu}$  is discrete if and only if, for all  $f$  in  $\mathcal{S}$ ,  $\mu * f$  is almost periodic. Let  $f$  in  $\mathcal{S}$  be such that  $\widehat{f}(x) > 0$  for all  $x \in \mathbb{R}^n$ . Then  $\widehat{\mu}$  is discrete if and only if  $\mu * f$  is almost periodic.*

**Proof :** Let  $f$  in the Schwartz space  $\mathcal{S}$  be such that  $\widehat{f}$  is nonnegative. Notice  $\mu * f(t) = \int f(t-s)\mu(ds) = \int \widehat{g}(x)\widehat{\mu}(dx)$  where  $g$  is the function defined by  $s \mapsto f(t+s)$ . But  $\widehat{g}(x) = e^{2i\pi x \cdot t}\widehat{f}(x)$ . Thus

$$\mu * f(t) = \widehat{m}(-t) \quad (2.10)$$

where  $m$  is the finite measure defined by

$$m(dx) = \widehat{f}(x)\widehat{\mu}(dx). \quad (2.11)$$

Assume that  $\widehat{\mu}$  is discrete. Then  $m$  is discrete. By Theorem 2.3.2,  $\mu * f$  is then almost periodic. By Corollary 2.3.4 we then get, by linearity, that  $\mu * g$  is almost periodic for all  $g$  in  $\mathcal{S}$ . It remains to show that if  $f$  in  $\mathcal{S}$  is such that  $\widehat{f}(x) > 0$  for all  $x$  then  $\widehat{\mu}$  is discrete as soon as  $\mu * f$  is almost periodic. But this a consequence of (2.10), (2.11) and of Theorem 2.3.2.  $\square$

The following result appears to be new.

**Theorem 2.3.4** *Let  $\mu$  be a positive, tempered and positive definite measure on  $\mathbb{R}^n$ . We assume that there exists  $R > 0$  such that  $\mu(B_R) = \mu(\{0\})$ . Then, the two following assertions are equivalent:*

1. *The measure  $\widehat{\mu}$  is discrete;*
2. *For all  $S \in ]0, R]$ , for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \mu(B_S + t) \geq \mu(B_S) - \varepsilon\}$  is relatively dense.*

To prove this theorem we need the two following lemmas.

**Lemma 2.3.5** *Let  $\mu$  be a positive, tempered and positive definite measure on  $\mathbb{R}^n$ . Let  $g$  in  $\mathcal{S}$  a function with values in  $\mathbb{R}$ . Write  $f = g * \check{g}$  where  $\check{g}$  is defined by  $\check{g}(x) = \overline{g(-x)}$ . Then  $\mu * f$  is almost periodic if and only if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \mu * f(t) \geq \mu * f(0) - \varepsilon\}$  is relatively dense.*

**Proof :** Notice that  $\mu * f$  is positive definite. Indeed, let  $(c_j)_{j=1..n}$  (resp.  $(x_j)_{j=1..n}$ ) be a family of complex numbers (resp. a family of points of  $\mathbb{R}^n$ ). Then

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \mu * f(x_j - x_k) &= \sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \int \mu(ds) \int dt g(x_j - x_k - s - t) g(-t) \\ &= \sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \int \mu(ds) \int dt g(x_j - s - t) g(x_k - t) \\ &= \int \mu(ds) \int dt h(t + s) \bar{h}(t) \\ &= \int \mu(ds) h * \bar{h}(s) \end{aligned}$$

where  $h(x) = \sum_j c_j g(x_j - x)$ . As  $\mu$  is positive definite, we then have

$$\sum_{j,k} c_j \overline{c_k} \mu * f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Therefore ([61, Section 1.4.1]) we have

$$\|\mu * f - (\mu * f)_t\|_\infty^2 \leq 2\mu * f(0)|\mu * f(0) - \mu * f(t)| \leq 2\mu * f(0)\|\mu * f - (\mu * f)_t\|_\infty.$$

We also have  $|\mu * f(t)| \leq \mu * f(0)$  and then  $\mu * f(t) \leq \mu * f(0)$ . Thus

$$\|\mu * f - (\mu * f)_t\|_\infty^2 \leq 2\mu * f(0)(\mu * f(0) - \mu * f(t)) \leq 2\mu * f(0)\|\mu * f - (\mu * f)_t\|_\infty$$

and the proof is finished.  $\square$

**Lemma 2.3.6** *For all  $M > 0$ , there exists a function  $g$  in  $\mathcal{S}$ , nonnegative with support in  $B_{M/2}$ , such that  $f = g * \check{g}$  satisfies*

- (i)  $f \leq 1_{B_M}$ ;
- (ii)  $f(0) = 1$ ;
- (iii)  $\widehat{f} > 0$ .

**Proof :** Let  $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by  $a(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ . Let  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be not everywhere equal to 0, nonnegative,  $C^\infty$  and with support in  $B_{M/4}$ . Write  $h = a.(b * \check{b})$ . The function  $g = (\int |h|^2)^{-1/2}h$  satisfies the required conditions.  $\square$

**Proof of Theorem 2.3.4 :**

•  $1 \Rightarrow 2$ . Let  $S \in ]0, R]$ . Let  $g$  be a function satisfying the conditions of Lemma 2.3.6 with  $M = S$ . Write  $f = g * \check{g}$ . By Theorem 2.3.3,  $\mu * f$  is almost periodic. Let  $\varepsilon > 0$ . By Lemma 2.3.5, the set

$$P = \{t \in \mathbb{R}^n : \mu * f(t) \geq \mu * f(0) - \varepsilon\}$$

is relatively dense. Let  $t \in P$ . As  $f \leq 1_{B_S}$ , we have

$$\mu(B_S + t) \geq \mu(f_t)$$

Therefore, using  $\mu(f_t) = \mu * f(t)$ , we get

$$\mu(B_S + t) \geq \mu(f) - \varepsilon.$$

But, as  $f$  and  $1_{B_S}$  are with support in  $B_R$  and as  $\mu(B_R) = \mu(\{0\})$ , we have

$$\mu(f) = f(0)\mu(\{0\}) = \mu(\{0\}) = \mu(B_S).$$

Finally,

$$\mu(B_S + t) \geq \mu(B_S) - \varepsilon.$$

•  $2 \Rightarrow 1$ . Let  $g$  be a function satisfying the conditions of Lemma 2.3.6 with  $M = R$ . Write again  $f = g * \check{g}$ . For all  $S \in ]0, R]$ , define

$$m(S) = \min_{x \in B_S} f(x).$$

Let  $\varepsilon > 0$  and  $S \in ]0, R]$ . Let  $t \in \{t \in \mathbb{R}^n : \mu(B_S + t) \geq \mu(B_S) - \varepsilon\}$ . Note that, by assumption, this set is relatively dense. Moreover

$$\mu(f_t) \geq \mu(f_t 1_{B_S + t}) \geq m(S)\mu(B_S + t) \geq m(S)(\mu(B_S) - \varepsilon).$$

Since  $\mu(B_S) = \mu(\{0\}) = \mu(f)$ , we have

$$\mu(f_t) \geq m(S)(\mu(f) - \varepsilon).$$

Taking  $S$  small enough we get

$$\mu(f_t) \geq \mu(f) - 2\varepsilon.$$

We then conclude by Theorem 2.3.3 and Lemma 2.3.5.  $\square$

**Corollary 2.3.7** *Let  $\mu$  be a positive, tempered and positive definite measure on  $\mathbb{R}^n$ . We assume that there exists  $R > 0$  such that  $\mu(B_R) = \mu(\{0\})$ . Then  $\widehat{\mu}$  is discrete if the following holds:*

*For all  $\varepsilon > 0$  the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \mu(\{t\}) \geq \mu(\{0\}) - \varepsilon\}$  is relatively dense. (2.12)*

**Proof :** Notice that, if  $S \in ]0, R]$  and  $t \in \mathbb{R}^n$ , then  $\mu(B_S) = \mu(\{0\})$  and  $\mu(B_S + t) \geq \mu(\{t\})$ .  $\square$

**Remark :** Condition 2.12 is not necessary. Indeed, some of the deformed model sets studied by Bernuau and Duneau [11] admit autocorrelation measure which does not satisfy (2.12) (because they have no atoms except at 0) but which satisfy all the other conditions of Corollary 2.3.7 (see also Section 2.6). The condition of Corollary 2.3.7 is nevertheless necessary in the following case:

**Corollary 2.3.8** *Let  $\mu$  be a positive, tempered and positive definite measure on  $\mathbb{R}^n$ . Assume that  $\mu$  has its support in a uniformly discrete set  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Then the measure  $\widehat{\mu}$  is discrete if and only if (2.12) is satisfied.*

**Proof :** Let  $R > 0$  be small enough so that  $\mu(B_R) = \mu(\{0\})$  and  $\Gamma$  belongs to  $\mathcal{U}_{3R}$ . With such an  $R$ , the conditions of Corollary 2.3.7 are satisfied. Therefore  $\widehat{\mu}$  is discrete as soon as (2.12) holds. We now prove the converse. Let  $\varepsilon > 0$ . We have to show that the set

$$A = \{t \in \mathbb{R}^n : \mu(\{t\}) \geq \mu(\{0\}) - \varepsilon\}$$

is relatively dense. If  $\varepsilon \geq \mu(\{0\})$  it is straightforward. Assume now that  $\varepsilon < \mu(\{0\})$ . By Theorem 2.3.4, the set

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu(B_R + x) \geq \mu(B_R) - \varepsilon\}$$

is relatively dense. Fix  $x$  in  $B$ . Then  $\mu(B_R + x) \geq \mu(\{0\}) - \varepsilon > 0$  and so  $\Gamma \cap (B_R + x) \neq \emptyset$ . As  $\Gamma$  belongs to  $\mathcal{U}_{3R}$  we get the existence of  $t$  in  $\mathbb{R}^n$  such that  $\Gamma \cap (B_R + x) = \{t\}$ . Therefore  $\mu(B_R + x) = \mu(\{t\})$  and then  $t$  belongs to  $A$ . As  $|x - t| \leq R$  and as  $B$  is relatively dense, the Corollary follows.  $\square$

### 2.3.3 Autocorrelation

Let  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  denote the set of continuous functions with compact support from  $\mathbb{R}^n$  to  $\mathbb{R}$ . Fix  $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  a non-negative function whose integral is equal to 1. If  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , we define  $H_f : \mathcal{M}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$H_f(S) = \sum_{x,y \in S} \psi(x)f(y - x).$$

Notice that the restriction of  $H_f$  to  $(\mathcal{U}_r, d)$  is continuous.

**Lemma 2.3.9** *Let  $\gamma$  be a positive and locally finite measure on  $\mathbb{R}^n$ . Then,  $\gamma$  is the autocorrelation of  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  if and only if, for all  $f$  in  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,*

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} H_f(S - t) dt \longrightarrow \gamma(f), \quad R \longrightarrow \infty.$$

*Therefore,  $S$  admits an autocorrelation if and only if  $\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} H_f(S - t) dt$  converges for all  $f$  in  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .*

We first give the following result.

**Lemma 2.3.10** *Let  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ . Let  $\gamma$  be a locally finite measure on  $\mathbb{R}^n$ . Then, the two following assertions are equivalent (limits are taken under the vague topology):*

1.  $\frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S \cap B_R} \delta_{y-x} \rightarrow \gamma$  as  $R \rightarrow \infty$
2.  $\frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S} \delta_{y-x} \rightarrow \gamma$  as  $R \rightarrow \infty$ .

**Proof :** Let  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  be continuous, non negative and with compact support. Write

$$a_R = \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S \cap B_R} f(y - x)$$

and

$$b_R = \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S} f(y - x).$$

It suffices to show that, if  $\lambda$  is a real, then  $\frac{1}{|B_R|}a_R \rightarrow \lambda$  if and only if  $\frac{1}{|B_R|}b_R \rightarrow \lambda$ . Let  $M > 0$  be such that the support of  $f$  is contained in  $B_M$ . Let  $R \geq 0$ . If  $x$  belongs to  $B_R$ , then  $y - x \in B_M$  implies  $y \in B_{R+M}$ . Consequently

$$b_R = \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S \cap B_{R+M}} f(y - x)$$

and then  $b_R \leq a_{R+M}$ . As a consequence, the following relations hold ( $R \geq M$ ):

$$0 \leq b_R - a_R \leq a_{R+M} - a_R \quad \text{and} \quad 0 \leq b_R - a_R \leq b_R - b_{R-M}.$$

The lemma follows.  $\square$

**Proof of Lemma 2.3.9 :** Let  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  and  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Let  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Assume that  $f$  is nonnegative. Write

$$a_R = \int_{B_R} H_f(S - t) dt$$

and

$$b_R = \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S} f(y - x).$$

Thanks to Lemma 2.3.10, we know that  $S$  admits  $\gamma$  as an autocorrelation if and only if  $|B_R|^{-1} \sum_{x \in S \cap B_R} \sum_{y \in S} \delta_{y-x} \rightarrow \gamma$ . Therefore, it suffices to prove that  $\frac{1}{|B_R|}a_R \rightarrow \lambda$  if and only if  $\frac{1}{|B_R|}b_R \rightarrow \lambda$ . Notice

$$a_R = \int_{B_R} \sum_{x,y \in S} \psi(x - t) f(y - x) dt = \sum_{x,y \in S} \int_{B_R} \psi(x - t) f(y - x) dt.$$

Let  $M$  be such that  $B_M$  contains the support of  $\psi$ . Notice, for all  $R \geq M$  and for all  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

1.  $0 \leq \int_{B_R} \psi(x - t) f(y - x) dt \leq f(y - x)$ .
2.  $x \in B_{R-M} \Rightarrow \int_{B_R} \psi(x - t) f(y - x) dt = f(y - x)$ .
3.  $x \notin B_{R+M} \Rightarrow \int_{B_R} \psi(x - t) f(y - x) dt = 0$ .

Therefore

$$b_{R-M} \leq a_R \leq b_{R+M}$$

and then

$$a_{R-M} \leq b_R \leq a_{R+M}.$$

The first part of the lemma follows.

As a consequence, if  $S$  admits an autocorrelation, we get the convergence of  $M_R(f) = |B_R|^{-1} \int_{B_R} H_f(S - t) dt$  for all functions  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Conversely, if this convergence occurs for all  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , we can define a map  $L : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  by  $L(f) = \lim M_R(f)$ . This map is linear and positive. By Riesz Theorem [60], we get the existence of a positive and locally finite Borel measure  $\gamma$  on  $\mathbb{R}^n$  such that  $L(f) = \gamma(f)$ . By the first part of the lemma, we then get that  $S$  admits  $\gamma$  as autocorrelation measure.  $\square$

## 2.4 Characterization of Patterson sets

In this section we first prove Theorem 2.2.1.

**Lemma 2.4.1** *Let  $f, g$  in  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Let  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  be a set admitting an autocorrelation  $\gamma$ . Then*

$$\gamma(f * \check{g}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \mu_S * f(s) \mu_S * g(s) ds.$$

**Proof :** It suffices to prove the result when  $f$  and  $g$  are in addition nonnegative. As in the proof of Lemma 2.3.9, we get

$$\sum_{x \in S \cap B_{R-M}} \sum_{y \in S} f * \check{g}(y - x) \leq \int_{B_R} \mu_S * f(s) \mu_S * g(s) ds \leq \sum_{x \in S \cap B_{R+M}} \sum_{y \in S} f * \check{g}(y - x).$$

Since  $S$  admits  $\gamma$  as autocorrelation, the result follows by Lemma 2.3.10.  $\square$

**Proof of Theorem 2.2.1 :**

1  $\Leftrightarrow$  2. Apply Theorem 2.3.4 to the autocorrelation measure  $\gamma$  (if the set  $S$  belongs to  $U_r$ , then its autocorrelation measure  $\gamma$  satisfies  $\gamma(B_{r/2}) = \gamma(\{0\})$ ).

1  $\Leftrightarrow$  3. Let  $S \in \mathcal{U}_r$  be a set admitting an autocorrelation  $\gamma$ . Let  $g$  be a function satisfying the conditions of Lemma 2.3.6 with  $M = 2r/5$ . Write  $f = g * \check{g}$ . By Theorem 2.3.3, we get that  $\widehat{\gamma}$  is discrete if and only if  $\gamma * f$  is almost periodic. By Lemma 2.3.5, we then get that  $\widehat{\gamma}$  is discrete if and only if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set

$$\{t \in \mathbb{R}^n : \gamma * f(t) \geq \gamma * f(0) - \varepsilon\}$$

is relatively dense. As

$$\gamma * f(t) = \int g * \check{g}(t - s) \gamma(ds) = \int g_t * \check{g}(s) \gamma(ds)$$

we get, by Lemma 2.4.1,

$$\gamma * f(t) = \lim \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} \mu_S * g(s) \mu_S * g_t(s) ds.$$

Expanding  $|\mu_S * g(s) - \mu_S * g_t(s)|^2$  and noticing

$$\lim \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_S * g_t(s)|^2 ds = \lim \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_S * g(s)|^2 ds = \gamma * f(0)$$

we get

$$\lim \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_S * g(s) - \mu_S * g_t(s)|^2 ds = 2\gamma * f(0) - 2\gamma * f(t). \quad (2.13)$$

Therefore,  $\widehat{\gamma}$  is discrete if and only if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set

$$\left\{ t : \limsup \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_S * g(s) - \mu_S * g_t(s)|^2 ds \leq \varepsilon \right\}$$

is relatively dense. As the support of  $g$  is contained in  $B_{r/5}$  and as  $S$  belongs to  $\mathcal{U}_r$ ,  $g(s - x)$  is not equal to 0 for at most one  $x$  in  $S$ . As a consequence,  $\|\mu_S * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ . From this remark and from Schwarz inequality we deduce that  $\widehat{\gamma}$  is discrete if and only if, for all  $\varepsilon > 0$ , the set

$$\left\{ t : \limsup \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_S * g(s) - \mu_S * g_t(s)| ds \leq \varepsilon \right\} = \left\{ t : \bar{d}_g(S, S + t) \leq \varepsilon \right\}$$

is relatively dense. We conclude by Proposition 2.3.1.

3  $\Leftrightarrow$  4. By Lemma 2.3.3, we get, for  $\varepsilon \in ]0, r/8[$ , the following inclusion:

$$\{t \in \mathbb{R}^n : \underline{\text{dens}}(S \setminus (S - t + B_\varepsilon)) \leq \varepsilon\} \subset \{t \in \mathbb{R}^n : \overline{\text{dens}}(\Delta_{2\varepsilon}(S, S - t)) \leq 2\varepsilon\}.$$

Thus

$$\{t \in \mathbb{R}^n : \underline{\text{dens}}(S \setminus (S - t + B_\varepsilon)) \leq \varepsilon\} \subset \{t \in \mathbb{R}^n : \bar{d}^r(S, S - t) \leq 2\varepsilon\}. \quad (2.14)$$

We also have

$$\left\{ t \in \mathbb{R}^n : \bar{d}^r(S, S - t) \leq \varepsilon/2 \right\} \subset \{t \in \mathbb{R}^n : \underline{\text{dens}}(S \setminus (S - t + B_\varepsilon)) \leq \varepsilon\}. \quad (2.15)$$

Indeed, assume that  $t$  is such that  $\bar{d}^r(S, S - t) \leq \varepsilon/2$ . Then as  $\varepsilon/2 < r/2$  we have  $\varepsilon \in \overline{D}(S, S - t)$  i.e.  $\overline{\text{dens}}(\Delta_\varepsilon(S, S - t)) \leq \varepsilon$ . As  $\underline{\text{dens}}(S \setminus (S - t + B_\varepsilon)) \leq \overline{\text{dens}}(\Delta_\varepsilon(S, S - t)) \leq \varepsilon$ , (2.15) is proved. The proof of Proposition 2.3.1 shows that  $\bar{d}^r$  and  $\bar{d}$  are uniformly equivalent on  $\mathcal{U}_r$ , which allows us to conclude thanks to (2.14) and (2.15).  $\square$

**Remark :** We have modeled the atomic distribution by a uniformly discrete  $S$  or, equivalently, by a measure  $\mu_S = \sum_{x \in S} \delta_x$ . We can generalize and model the atomic distribution by a locally finite measure  $\mu$ . Let  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be  $C^\infty$  with compact support. We can generalise our pseudometrics defining for example

$$\tilde{d}(\mu, \mu') = \limsup_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu * g(s) - \mu' * g(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

which is related to diffraction property by the same kind of relation as (2.13). If  $\mu$  admits an autocorrelation  $\gamma$  (i.e. if  $|B_R|^{-1} \mu|_{B_R} * \mu|_{B_R}$  converges to  $\gamma$ ), we indeed have

$$[\tilde{d}(\mu, \mu_t)]^2 = 2\gamma * (g * \check{g})(0) - 2\gamma * (g * \check{g})(t) = 2\widehat{\nu}(0) - 2\widehat{\nu}(t)$$

where  $\nu(dx) = |\widehat{g}|^2(x)\widehat{\gamma}(dx)$ . By the same ideas, we can thus connect the properties of the diffraction spectrum of  $\mu$  (i.e.  $\widehat{\gamma}$ ) to the topological properties of  $\mu$  under translations. This extension requires no extra work.

**Remark :** Let  $\mathcal{A}_r$  denote the set of all the elements  $S$  of  $\mathcal{U}_r$  with an autocorrelation. By Lemmas 2.3.9 and 2.3.2, we get that  $\mathcal{A}_r$  is a closed subset of  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$ . By Theorem 2.2.1, we then get that the Patterson sets of  $\mathcal{U}_r$  form a closed subset of  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$ .

We thus get a new proof of the following result (Corollary 2.4.2), already proved in [8]. In [8], results apply to weighted subsets of locally compact abelian groups. See also [69].

**Corollary 2.4.2** *Let  $S$  be a uniformly discrete set admitting an autocorrelation  $\gamma$ .*

1. *If, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : \gamma(\{t\}) \geq \gamma(\{0\}) - \varepsilon\}$  is relatively dense, then  $S$  is a Patterson set. The converse is true if  $S - S$  is uniformly discrete.*
2. *If, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t : \overline{\text{dens}}(S\Delta(S-t)) \leq \varepsilon\}$  (resp.  $\{t : \underline{\text{dens}}(S \setminus (S-t)) \leq \varepsilon\}$ ) is relatively dense, then  $S$  is a Patterson set. The converse is true if  $S - S$  is uniformly discrete.*

**Proof :** The first item is a consequence of Corollaries 2.3.7 and 2.3.8. The first part of the second item is a consequence of the inclusions  $S\Delta(S-t) \supset \Delta_\varepsilon(S, S-t)$  and  $S \setminus S-t \supset \tilde{\Delta}_\varepsilon(S, S-t)$ . Let us prove the converse. From the uniform discreteness of  $S - S$ , we get that, for all  $t$  in  $\mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{1}{|B_R|} \text{card}[(S \cap (S-t)) \cap B_R]$$

converges toward  $\gamma(\{t\})$  as  $R$  goes to infinity. Therefore

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \text{card}[(S\Delta(S-t)) \cap B_R] = 2\gamma(\{0\}) - 2\gamma(\{t\})$$

and

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \text{card}[(S \setminus (S-t)) \cap B_R] = \gamma(\{0\}) - \gamma(\{t\}).$$

The second item thus follows from the first one. □

## 2.5 Point processes and stochastic Patterson sets

In this section, we prove Theorem 2.2.2 and some related results. A point process is (square) integrable if, for every compact set  $A$ , the random variable  $N_A$  is (square) integrable. Let  $\chi$  be a stationary and integrable point process. The Palm measure of  $\chi$  [10, 48, 55] is the measure  $\tilde{P}$  on  $(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{H})$  defined by

$$\tilde{P}(F) = \frac{1}{|B|} E \left( \sum_{x \in \chi \cap B} 1_F(\chi - x) \right), \quad F \in \mathcal{H},$$

where  $B$  is a fixed Borel subset of  $\mathbb{R}^n$  whose Lebesgue measure  $|B|$  is finite and positive. This definition does not depend on  $B$ . By standard arguments, this implies Campbell formula (see [10, 48, 55]):

$$E \left( \sum_{x \in \chi} f(\chi - x, x) \right) = \int \int f(\chi, x) d\tilde{P}(\chi) dx, \quad (2.16)$$

where  $f : \mathcal{M}_\sigma \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  is measurable and positive.

If  $m$  is a measure on  $(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{H})$ , its intensity  $I(m)$  is the measure on the Borel subsets of  $\mathbb{R}^n$  defined by

$$I(m)(A) = \int \text{card}(\phi \cap A) dm(\phi).$$

**Lemma 2.5.1** *A stationary and integrable point process  $\chi$  is square integrable if and only if the intensity  $I(\tilde{P})$  of its Palm measure is locally finite. In that case,  $I(\tilde{P})$  is a positive, tempered and positive definite measure.*

**Proof :** [55], Proposition 2.24. □

We also need the following Lemma. Its proof is standard (see e.g. [48, section 3.1]).

**Lemma 2.5.2** *Let  $\mathcal{V}$  be a neighborhood basis of the origin in  $\mathbb{R}^n$ . Assume that all the elements  $V$  of  $\mathcal{V}$  are Borel sets. Then*

$$\mathcal{G} = \left\{ \{S \in \mathcal{M}_\sigma : (x + V) \cap S \neq \emptyset\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, V \in \mathcal{V} \right\}$$

generates  $\mathcal{H}$ .

The following result, proved in [26] in the ergodic case, establishes the link between autocorrelation and Palm measure.

**Theorem 2.5.1** *Let  $\chi$  be a stationary and square integrable point process. Then,  $\chi$  admits a.s. a (random) autocorrelation  $\gamma_\chi$ . This autocorrelation satisfies*

$$E(\gamma_\chi) = I(\tilde{P}) \text{ and } E(\widehat{\gamma}_\chi) = \widehat{I}(\tilde{P}).$$

Therefore, if  $\widehat{I}(\tilde{P})$  is discrete, then  $\widehat{\gamma}_\chi$  is a.s. discrete.

If  $\chi$  is moreover ergodic, then  $\gamma_\chi = I(\tilde{P})$  a.s.

**Proof :** We keep notations of subsection 2.3.3. Let  $\Theta$  be a countable subset of  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  such that, for all  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuous with support in  $B_M$  and for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $g$  in  $\Theta$  with support in  $B_{M+1}$  such that  $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ .

As  $\chi$  is square integrable, the function  $H_f(\chi)$  is integrable for every  $f$  in  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . The same is true for the function  $N_{B_k}^2(\chi)$  for all integers  $k$  (this function is defined in (2.6)). Therefore, by the Wiener ergodic theorem [72], there exists a subset  $X \subset \mathcal{M}_\sigma$ , which has full measure with respect to the law of  $\chi$ , such that

1. For all integer  $k$  and for all  $S$  in  $X$ ,  $\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} N_{B_k}^2(S - t) dt$  converges as  $R$  goes to infinity.
2. For all  $g$  in  $\Theta$  and for all  $S$  in  $X$ ,  $\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} H_g(S - t) dt$  converges as  $R$  goes to infinity.

From this, we deduce that, for all  $f$  in  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  and for all  $S \in X$ , the following convergence holds:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} H_f(S - t) dt = M_f(S)$$

where  $M_f$  is such that  $E(M_f(\chi)) = E(H_f(\chi))$  (by Wiener theorem). From Lemma 2.3.9 we then get that all  $S$  in  $X$  admit an autocorrelation  $\gamma_S$ . This autocorrelation satisfies

$$E(\gamma_\chi(f)) = E(M_f(\chi)) = E(H_f(\chi))$$

for all  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . But, by Campbell formula (see (2.16)),

$$E(H_f(\chi)) = E\left(\sum_{x,y \in \chi} \psi(x)f(y-x)\right) = \int d\tilde{P}(\tilde{\chi}) \int_{\mathbb{R}^n} dx \psi(x) \sum_{y \in \tilde{\chi}} f(y) = I(\tilde{P})(f).$$

We thus get the equality of the two measures  $E(\gamma_\chi)$  and  $I(\tilde{P})$ . By standard arguments, we deduce that  $E(\widehat{\gamma_\chi}) = \widehat{I(\tilde{P})}$ . If  $\chi$  is ergodic, then,  $X$  can be chosen so that, for all functions  $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  and for all  $S \in X$ ,  $\gamma_S(f) = E(H_f(\chi))$ . Thus  $\gamma_\chi = I(\tilde{P})$  a.s. The theorem follows.  $\square$

**Theorem 2.5.2** *Let  $\chi$  be a stationary and square integrable point process of  $\mathbb{R}^n$ . The following assertions are equivalent:*

1.  $\widehat{I(\tilde{P})}$  is discrete.
2. Property (2.7) holds for all  $A$  in a subset  $\mathcal{G}$  of  $\mathcal{H}$  such that  $\{G - t : G \in \mathcal{G}, t \in \mathbb{R}^n\}$  generates  $\mathcal{H}$ .
3. Property (2.7) holds for all  $A$  in  $\mathcal{H}$ .
4. For all functions  $f$  in  $L^2(\mathcal{M}_\sigma, P)$  the function  $\phi^f : t \mapsto f_t$  is Bohr almost periodic.
5. The dynamical system  $(\mathcal{M}_\sigma, (T_t)_t, P)$  has a discrete spectrum.

If, in addition, there exists  $r > 0$  such that  $\chi$  take its values in  $\mathcal{U}_r$ , then the previous assertions are also equivalent to the following one:

6. For all  $R > 0$ , for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : I(\tilde{P})(B_R + t) \geq I(\tilde{P})(\{0\}) - \varepsilon\}$  is relatively dense.

**Proof :** Since  $\chi$  is square integrable, the measure  $I(\tilde{P})$  is positive, tempered and positive definite thanks to Lemma 2.5.1. If  $f \in L^2(\mathcal{M}_\sigma, \mathcal{H}, P)$ , where  $P$  is the law of  $\chi$ , we define

$$\phi^f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow L^2(\mathcal{M}_\sigma) \\ t & \longmapsto f_t. \end{cases} \quad (2.17)$$

If  $f : (\mathcal{M}_\sigma, d) \rightarrow \mathbb{C}$  is bounded and continuous, then  $\phi^f$  is continuous (note that, if  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ , then  $t \mapsto S - t$  is a continuous map from  $\mathbb{R}^n$  to  $(\mathcal{M}_\sigma, d)$ ). As bounded and continuous functions are dense in  $L^2(\mathcal{M}_\sigma)$ , we get that, for all  $f \in L^2(\mathcal{M}_\sigma)$ ,  $\phi^f$  is continuous.

1.  $\Rightarrow$  2. Let  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be  $C^\infty$  with compact support. We can write:

$$I(\tilde{P}) * (g * \check{g})(t) = I(\tilde{P})((g * \check{g})_t) = \int d\tilde{P}(\tilde{\chi}) \int du \sum_{y \in \tilde{\chi}} g(x+t)g(x+y).$$

By Campbell formula (see (2.16)) we then get:

$$I(\tilde{P}) * (g * \check{g})(t) = E\left(\sum_{x \in \chi} \sum_{y \in \chi - x} g(u + t)g(u + y)\right) = E(S_g(\chi)S_g(\chi - t)) \quad (2.18)$$

where  $S_g : \mathcal{M}_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$  is defined by  $S_g(\chi) = \sum_{x \in \chi} g(x)$ . By Theorem 2.3.3, the function  $t \mapsto E(S_g(\chi)S_g(\chi - t))$  is then almost periodic. By stationarity,

$$\|\phi^{S_g}(t + s) - \phi^{S_g}(t)\|_2^2 = 2E(S_g(\chi)^2) - 2E(S_g(\chi)S_g(\chi - s)). \quad (2.19)$$

The function  $\phi^{S_g}$  is also (Bohr) almost periodic. Let  $R > 0$ . Let  $g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  be a sequence of  $C^\infty$  functions with support in  $B_{R+1}$  which converges pointwise to  $1_{B_R}$ . Notice that  $S_{g_k}$  converges pointwise to  $N_{B_R}$  (defined by (2.6)) and that  $|S_{g_k} - N_{B_R}|$  is bounded by  $N_{B_{R+1}}$  which is square integrable. Therefore  $S_{g_k}$  converges in  $L^2$  to  $N_{B_R}$  and then  $\phi^{S_{g_k}}$  converges uniformly to  $\phi^{N_{B_R}}$ . The function  $\phi^{N_{B_R}}$  is thus almost periodic. Notice that

$$P(\{\chi \cap B_R = \emptyset\} \Delta \{(\chi - t) \cap B_R = \emptyset\}) \leq E(|N_{B_R}(\chi) - N_{B_R}(\chi - t)|^2). \quad (2.20)$$

As  $\phi^{N_{B_R}}$  is almost periodic, the set  $\{\chi \cap B_R = \emptyset\}$  then satisfies (2.7). Therefore, its complement, the set  $\{\chi \cap B_R \neq \emptyset\}$ , also satisfies (2.7). Item 2 follows by Lemma 2.5.2.

2.  $\Rightarrow$  3. Let  $\mathcal{C}$  denote the subset of  $\mathcal{H}$  containing all  $A$  satisfying (2.7), i.e. all  $A$  such that  $\phi^{1_A}$  is almost periodic. Let us prove that  $\mathcal{C}$  is a  $\sigma$ -field. It is straightforward that  $\mathcal{C}$  is closed under taking complement, and under taking non-decreasing countable unions. If  $A, B \in \mathcal{C}$ , then, by Corollary 2.3.4, the function  $(\phi^{1_A}, \phi^{1_B})$  is almost periodic. As  $\phi^{1_{A \cap B}} = \phi^{1_A} \phi^{1_B}$ , we deduce that  $A \cap B$  belongs to  $\mathcal{C}$ . Thus,  $\mathcal{C}$  is a  $\sigma$ -field. By hypothesis and by stationarity, it contains a generating subset of  $\mathcal{H}$ . Therefore  $\mathcal{C} = \mathcal{H}$ .

3.  $\Rightarrow$  4. As, by assumption,  $\phi^{1_A}$  is almost periodic for all  $A$  in  $\mathcal{H}$ , the implication follows by linearity and continuity of  $f \mapsto \phi^f$  (we endow the space of bounded maps from  $\mathbb{R}^n$  to  $L^2(\mathcal{M}_\sigma)$  with the uniform norm) and by Corollary 2.3.4.

4.  $\Rightarrow$  1. Let  $g$  be given by Lemma 2.3.6 with  $M = 1$ . As

$$|E(S_g(\chi)S_g(\chi - (t + s))) - E(S_g(\chi)S_g(\chi - t))| \leq \|S_g\|_2 \|\phi^{S_g}(t + s) - \phi^{S_g}(t)\|_2 \quad (2.21)$$

the almost periodicity of  $t \mapsto E(S_g(\chi)S_g(\chi - t))$  follows from the almost periodicity of  $\phi^{S_g}$ . By (2.18) and by Theorem 2.3.3 we then get Item 1.

4.  $\Leftrightarrow$  5. Let  $f \in L^2(\mathcal{M}_\sigma)$ . As already noticed, the almost periodicity of  $\phi^f$  is equivalent (see (2.19, 2.21)) to the almost periodicity of the function  $t \mapsto E(f(\chi)f(\chi - t))$ . But this function is, by definition of the spectral measure  $\sigma_f$  associated with  $f$ , the Fourier transform of  $\sigma_f$ . The equivalence between Items 4 and 5 therefore follows from Theorem 2.3.2.

The last item is a consequence of Theorem 2.3.4. □

**Proof of Theorem 2.2.2 :** Theorems 2.5.1, 2.5.2 and Lemma 2.5.2. □

**Corollary 2.5.3** *Let  $\chi$  be a stationary point process of  $\mathbb{R}^n$ . Assume that  $\chi$  takes its values in  $\mathcal{U}_r$ . If, for all  $\varepsilon > 0$ , the set  $\{t \in \mathbb{R}^n : I(\tilde{P})(t) \geq I(\tilde{P})(0) - \varepsilon\}$  is relatively dense, then  $\widehat{I(\tilde{P})}$  is discrete. The converse is true if the support of  $I(\tilde{P})$  is uniformly discrete.*

**Proof :** Corollaries 2.3.7 and 2.3.8. □

## 2.6 Example: deformed model sets

**Lemma 2.6.1** *Let  $C$  be a Borel subset of  $\mathbb{T}^n$ . Let  $\varepsilon > 0$ . Then the set  $\{t \in E : |C\Delta(C - t)| \leq \varepsilon\}$  is relatively dense in  $E$ .*

**Proof :** As  $\mathbb{T}^n$  is a compact metric space, the point 0 is almost periodic under the action of the translations  $(T_t)_{t \in E}$  (Theorem 2.3.1). But since  $|C\Delta(C - u)| = 2|C| - 2|C \cap (C - u)| = 2|C| - 2(1_C * 1_{-C}(-u))$  and since the function  $1_C * 1_{-C}$  is continuous ([61], Section 1.1.6), the lemma follows.  $\square$

**Proof of Theorem 2.2.3 :** The map  $\phi$  defines a point process (to check the measurability, it is sufficient to show that the function  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $u \mapsto \text{card}(A \cap (\phi(u)))$  is measurable for each bounded Borel subset  $A \subset \mathbb{R}^d$ . As  $\text{card}(A \cap \phi(u)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} 1_A(\psi(u + k)1_W((u + k)_F))$ , this is a consequence of the measurability of  $\psi$  and  $W$ ). As, for all  $t \in E$ ,  $\phi(u - t) = \phi(u) - t$ ,  $\phi$  defines a stationary point process. Moreover, we deduce from Lemma 2.6.1 that Item 4 of Theorem 2.5.2 is satisfied. We can therefore conclude by Theorem 2.5.1  $\square$

*Further assumptions:* we assume henceforth that  $|\partial W|_F = 0$  and that  $\mathbb{T}^n$  is uniquely ergodic under the action of the translations  $(T_t)_{t \in E}$ . Before proving Theorem 2.2.4, we will prove the following results.

**Lemma 2.6.2** *The map  $\phi : \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathcal{U}_r(E), d)$  is continuous at each point of the complement of a set of vanishing Haar measure.*

**Proof :** Let

$$A = \{u \in \mathbb{T}^n : (u + \mathbb{Z}^n) \cap (E + \partial W) \neq \emptyset\}.$$

As  $|\partial W|_F = 0$ , we get, by Fubini theorem, that  $E + \partial W$  has vanishing Lebesgue measure. Therefore,  $A$  has vanishing Haar measure. We prove now that  $\phi$  is continuous at each point of  $\mathbb{T}^n \setminus A$ . Let  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . As  $g$  is uniformly continuous on a bounded subset of  $F$ ,  $g$  is bounded. Let  $R = \varepsilon^{-1} + \|g\|_\infty + 1$ . Let  $M > 0$  be such that  $W + B_1^F$  is a subset of  $B_M^F$ .

Let  $u \in \mathbb{T}^n \setminus A$ . We also denote by  $u$  the representative of  $u$  in  $[0, 1]^n$ . The set  $(u + \mathbb{Z}^n) \cap (B_R^E + B_M^F)$  is finite and does not intersect  $E + \partial W$ . Therefore, there exists  $\eta \in ]0, 1[$  such that all points  $z \in (u + \mathbb{Z}^n) \cap (B_R^E + B_M^F)$  satisfy  $d(z_F, \partial W) > \eta$ . We also assume that  $\eta$  is small enough so that  $\|g(w) - g(w')\|$  is less than  $\varepsilon/2$  as soon as  $\|w - w'\|$  is less than  $\eta$ .

Let  $v \in B_{\varepsilon/2}^E + B_\eta^F$ . Let us prove that  $d(\phi(u), \phi(u + v)) \leq \varepsilon$ . Let  $x \in \phi(u) \cap B_{1/\varepsilon}^E$ . There exists  $k \in \mathbb{Z}^n$  such that  $(u + k)_F \in W$  and  $(u + k)_E + g((u + k)_F) = x$ . We have  $u + k \in (u + \mathbb{Z}^n) \cap (B_R^E + B_M^F)$ . Therefore  $d((u + k)_F, \partial W) > \eta$  and then  $(u + v + k)_F \in W$  because  $\|v_F\| \leq \eta$ . The point  $x' = (u + v + k)_E + g((u + v + k)_F)$  thus belongs to  $\phi(u + v)$ . But  $\|x - x'\| \leq \|v_E\| + \|g((u + k)_F + v_F) - g((u + k)_F)\| \leq \varepsilon$ . Consequently  $\phi(u) \cap B_{1/\varepsilon}^E \subset \phi(u + v) + B_\varepsilon^E$ . By the same arguments, we prove that  $\phi(u + v) \cap B_{1/\varepsilon}^E \subset \phi(u) + B_\varepsilon^E$ . Finally  $d(\phi(u), \phi(u + v)) \leq \varepsilon$ .  $\square$

From this lemma and the unique ergodicity of the system, we could prove Theorem 2.2.4 by proving and using Theorem 2.2.2 in the unique ergodic case (using the uniform ergodic theorem instead of the Wiener ergodic theorem in the proof). We can also prove Theorem 2.2.4 as follows, using Theorem 2.2.1. Notice that this does not change the basic ideas. From Lemma 2.6.2 one easily deduce the following propositions.

**Proposition 2.6.3** For any continuous  $H : (\mathcal{U}_r(E), d) \rightarrow \mathbb{R}$  and any  $S \in \phi(\mathbb{T}^n)$ ,

$$\frac{1}{|B_R^E|} \int_{B_R^E} H(S - t) dt \rightarrow \int_{\mathbb{T}^n} H(\phi(u)) du, \quad \text{as } R \rightarrow \infty.$$

Moreover, the above convergence is uniform with respect to  $S \in \phi(\mathbb{T}^n)$ .

**Proof :** As, for all  $t \in E$ ,  $\phi(u - t) = \phi(u) - t$ , we have to show that

$$\frac{1}{|B_R^E|} \int_{B_R^E} H \circ \phi(v - t) dt$$

converges uniformly with respect to  $v \in \mathbb{T}^n$  toward  $\int_{\mathbb{T}^n} H \circ \phi(u) du$ . But from Lemma 2.6.2 and from then continuity of  $H$ , we deduce that  $H \circ \phi$  is continuous at each point of the complementary of a set of vanishing Haar measure. Moreover,  $H \circ \phi$  is measurable and bounded. From the unique ergodicity of  $\mathbb{T}^n$  under the action of the translations  $(T_t)_{t \in E}$ , we then deduce the required uniform convergence.  $\square$

**Proposition 2.6.4** Let  $S = \phi(u)$  and  $S' = \phi(u')$ . Then  $\bar{d}(S, S') = \int_{\mathbb{T}^n} d(\phi(u + t), \phi(u' + t)) dt$ .

**Proof :** Same arguments as the proof of Proposition 2.6.3.  $\square$

**Proposition 2.6.5** The map  $\phi$  is continuous from  $\mathbb{T}^n$  to  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$ .

**Proof :** It is a consequence of Proposition 2.6.4, of Lemma 2.6.2 and of the dominated convergence theorem.  $\square$

**Proof of Theorem 2.2.4 :** Let  $u \in \mathbb{T}^n$ . For all  $f \in C_c(E, \mathbb{R})$ , the function  $H_f$  is continuous from  $(\mathcal{U}_r(E), d)$  to  $\mathbb{R}$  (Lemma 2.3.9). By Proposition 2.6.3 and Lemma 2.3.9 we then get that  $\phi(u)$  admits an autocorrelation. By Proposition 2.6.5 and using the compactness of  $\mathbb{T}^n$ , we get that  $\phi(\mathbb{T}^n)$  is totally bounded in  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$ . The orbit of  $\phi(u)$  under the action of the translations  $(T_t)_{t \in E}$ , which is contained in  $\phi(\mathbb{T}^n)$  thanks to the relation  $\phi(u - t) = \phi(u) - t$ , is then also totally bounded. From Theorem 2.3.1, we then deduce that  $\phi(u)$  is almost periodic in  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$ . The theorem follows by Theorem 2.2.1.  $\square$

## 2.7 Appendix: some proofs

**Lemma 2.7.1** The function  $\bar{d}^r$  is a pseudo-metric on  $\mathcal{U}_r$ .

**Proof :** Let us prove the triangle inequality. Let  $S, S', S'' \in \mathcal{U}_r$ . If  $\bar{d}^r(S, S') = r/2$  or  $\bar{d}^r(S', S'') = r/2$ , the inequality  $\bar{d}^r(S, S'') \leq \bar{d}^r(S, S') + \bar{d}^r(S', S'')$  is straightforward. Suppose now that  $\bar{d}^r(S, S') < r/2$  and that  $\bar{d}^r(S', S'') < r/2$ . Let  $a \in \bar{D}(S, S') \cap [0, r/2[$  and  $b \in \bar{D}(S', S'') \cap [0, r/2[$ . To conclude, it suffices to show that  $a + b \in \bar{D}(S, S'')$ . If  $x \in S \setminus \tilde{\Delta}_a(S, S')$ , then  $(x + B_a) \cap S'$  is non empty. As  $a < r/2$  and as  $S' \in \mathcal{U}_r$ ,  $(x + B_a) \cap S'$  contains a single point. We call  $f(x)$  that point, thus defining a function  $f : S \setminus \tilde{\Delta}_a(S, S') \rightarrow S'$ . Notice

1. The map  $f$  is injective. It is a consequence of the inequalities  $\|f(x) - x\| \leq a < r/2$  and of  $S \in \mathcal{U}_r$ .
2. If  $\|x\| \leq M$  then  $\|f(x)\| \leq M + r/2$ .
3. If  $x \in \tilde{\Delta}_{a+b}(S, S'') \setminus \tilde{\Delta}_a(S, S')$ , then  $f(x) \in \tilde{\Delta}_b(S', S'')$ . Indeed, there would otherwise exist  $z$  in  $(f(x) + B_b) \cap S''$ . We would then have  $z \in (x + B_{a+b}) \cap S''$ , contradicting  $x \in \tilde{\Delta}_{a+b}(S, S'')$ .

Therefore, for all  $M > 0$ ,

$$\text{card} \left[ \left( \tilde{\Delta}_{a+b}(S, S'') \setminus \tilde{\Delta}_a(S, S') \right) \cap B_M \right] \leq \text{card} \left[ \tilde{\Delta}_b(S', S'') \cap B_{M+r/2} \right].$$

Then,

$$\text{card} \left[ \left( \tilde{\Delta}_{a+b}(S, S'') \right) \cap B_M \right] \leq \text{card} \left[ \tilde{\Delta}_a(S, S') \cap B_{M+r/2} \right] + \text{card} \left[ \tilde{\Delta}_b(S', S'') \cap B_{M+r/2} \right].$$

By symmetry, we get

$$\text{card} \left[ \left( \tilde{\Delta}_{a+b}(S'', S) \right) \cap B_M \right] \leq \text{card} \left[ \tilde{\Delta}_b(S'', S') \cap B_{M+r/2} \right] + \text{card} \left[ \tilde{\Delta}_a(S', S) \cap B_{M+r/2} \right].$$

Thus

$$\text{card} \left[ \left( \Delta_{a+b}(S, S'') \right) \cap B_M \right] \leq \text{card} \left[ \Delta_a(S, S') \cap B_{M+r/2} \right] + \text{card} \left[ \Delta_b(S', S'') \cap B_{M+r/2} \right].$$

We then get

$$\overline{\text{dens}} \left( \Delta_{a+b}(S, S'') \right) \leq \overline{\text{dens}} \left( \Delta_a(S, S') \right) + \overline{\text{dens}} \left( \Delta_b(S', S'') \right) \leq a + b$$

and so  $a + b \in \overline{D}(S, S'')$ . □

The proof of Proposition 2.3.1 is a consequence of the following three lemmas.

**Lemma 2.7.2** *For all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\eta > 0$  such that*

$$\bar{d}^r(S, S') \leq \eta \Rightarrow \bar{d}(S, S') \leq \varepsilon. \quad (2.22)$$

**Proof :** Let  $\eta \in ]0, r/2[$  and  $\rho > 0$ . Let  $S, S' \in \mathcal{U}_r$  be such that  $\bar{d}^r(S, S') < \eta$ . Write

$$\int_{B_R} d(S - t, S' - t) dt = P_R + Q_R$$

where

$$P_R = \int_{B_R \cap (\Delta_\eta(S, S') + B_\rho)} d(S - t, S' - t) dt$$

and

$$Q_R = \int_{B_R \setminus (\Delta_\eta(S, S') + B_\rho)} d(S - t, S' - t) dt.$$

- As  $d$  is less than  $1/\sqrt{2}$ , we have

$$P_R \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |B_R \cap (\Delta_\eta(S, S') + B_\rho)|.$$

Notice

$$|B_R \cap (\Delta_\eta(S, S') + B_\rho)| \leq \sum_{x \in \Delta_\eta(S, S') \cap B_{R+\rho}} |x + B_\rho| \leq \text{card}(\Delta_\eta(S, S') \cap B_{R+\rho}) |B_\rho|.$$

We then have

$$\limsup \frac{1}{|B_R|} P_R \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\text{dens}}(\Delta_\eta(S, S')) |B_\rho| \leq \frac{\eta |B_\rho|}{\sqrt{2}}.$$

- Consider  $t \in B_R \setminus (\Delta_\eta(S, S') + B_\rho)$ . We have  $(t + B_\rho) \cap \Delta_\eta(S, S') = \emptyset$ , that is

$$B_\rho \cap \Delta_\eta(S - t, S' - t) = \emptyset.$$

For all  $x \in (S - t) \cap B_\rho$ , the set  $(x + B_\eta) \cap (S' - t)$  is therefore non empty. Then

$$(S - t) \cap B_\rho \subset (S' - t) + B_\eta.$$

We also have

$$(S' - t) \cap B_\rho \subset (S - t) + B_\eta.$$

Therefore

$$d(S - t, S' - t) \leq \max\left(\frac{1}{\rho}, \eta\right)$$

and then

$$\limsup \frac{1}{|B_R|} Q_R \leq \max\left(\frac{1}{\rho}, \eta\right).$$

- Finally,

$$\limsup \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} d(S - t, S' - t) dt \leq \frac{\eta |B_\rho|}{\sqrt{2}} + \max\left(\frac{1}{\rho}, \eta\right).$$

Let  $\varepsilon > 0$ . Put  $\rho = 2/\varepsilon$ . Let now  $\eta \in ]0, r/2[$  be such that  $\eta |B_\rho| \sqrt{2} \leq \varepsilon$  and  $\eta < \varepsilon/2$ . Relation (2.22) is then satisfied.  $\square$

**Proof of Lemma 2.3.2 :** Let  $\varepsilon > 0$ . From the continuity of  $H$  and the compactness of  $(\mathcal{U}_r, d)$ , we deduce that  $H$  is bounded and that there exists  $\alpha > 0$  such that

$$d(S, S') \leq \alpha \Rightarrow |H(S) - H(S')| \leq \varepsilon.$$

Let now  $\eta \in ]0, r/2[$  be such that  $\eta/\alpha \leq \varepsilon$ . Let  $S, S' \in \mathcal{U}_r$  be such that  $\bar{d}(S, S') \leq \eta$ . Write

$$\int_{B_R} |H(S - t) - H(S' - t)| dt = P_R + Q_R$$

where

$$P_R = \int_{B_R} 1_{[0, \alpha]}(d(S - t, S' - t)) |H(S - t) - H(S' - t)| dt$$

and

$$Q_R = \int_{B_R} 1_{[\alpha, +\infty[} (d(S-t, S'-t)) |H(S-t) - H(S'-t)| dt.$$

We have  $P_R \leq |B_R| \varepsilon$  and then

$$\limsup \frac{1}{|B_R|} P_R \leq \varepsilon.$$

Furthermore,

$$Q_R \leq \int_{B_R} \frac{1}{\alpha} 2\|H\|_\infty d(S-t, S'-t) dt$$

and then

$$\limsup \frac{1}{|B_R|} Q_R \leq \frac{2\|H\|_\infty \bar{d}(S, S')}{\alpha} \leq 2\|H\|_\infty \varepsilon.$$

We then have

$$\limsup \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |H(S-t) - H(S'-t)| dt \leq (1 + 2\|H\|_\infty) \varepsilon$$

from which we deduce the lemma.  $\square$

**Lemma 2.7.3** *Let  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be continuous, with support in  $B_{r/5}$  and not everywhere equal to 0. Then, for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\eta > 0$  such that, for all  $S, S' \in \mathcal{U}_r$ ,*

$$\bar{d}_f(S, S') \leq \eta \Rightarrow \bar{d}^r(S, S') \leq \varepsilon.$$

**Proof :** Let  $S, S' \in \mathcal{U}_r$ . As  $S$  belongs to  $\mathcal{U}_r$ , the following holds

$$\int_{B_R} |\mu_S * f - \mu_{S'} * f| \geq \sum_{x \in S \cap B_{R-r/5}} \int_{x+B_{r/5}} |\mu_S * f - \mu_{S'} * f|.$$

As the support of  $f$  is contained in  $B_{r/5}$  and as  $S$  belongs to  $\mathcal{U}_r$  we have, for all  $x \in S$

$$\int_{x+B_{r/5}} |\mu_S * f - \mu_{S'} * f| = \int_{x+B_{r/5}} |f(u-x) - \mu_{S'} * f(u)| du = \int_{B_{r/5}} |f(u) - \mu_{S'-x} * f(u)| du.$$

Thus

$$\int_{B_R} |\mu_S * f - \mu_{S'} * f| \geq \sum_{x \in S \cap B_{R-r/5}} \psi(S' - x),$$

where  $\psi : \mathcal{U}_r \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by

$$\psi(S'') = \int_{B_{r/5}} |f(u) - \mu_{S''} * f(u)| du.$$

Let  $\varepsilon > 0$ . Assume that  $S'' \cap B_\varepsilon$  is empty. As  $f$  is with support in  $B_{r/5}$  and as  $S''$  belongs to  $\mathcal{U}_r$ , we have either  $\psi(S'') = \int_{B_{r/5}} |f|$  or  $\psi(S'') = \int_{B_{r/5}} |f(u) - f(u-y)| du$  where  $y$  belongs to  $B_{2r/5} \setminus B_\varepsilon$ . We then easily get the existence of  $a > 0$  such that, for all  $S'' \in \mathcal{U}_r$ , if  $S'' \cap B_\varepsilon$  is empty, then we have  $\psi(S'') \geq a$ .

Distinguishing whether  $(S' - x) \cap B_\varepsilon$  is empty or not and using the fact that  $\psi$  is nonnegative, we then get

$$\int_{B_R} |\mu_S * f - \mu_{S'} * f| \geq \sum_{x \in \tilde{\Delta}_\varepsilon(S, S') \cap B_{R-r/5}} \psi(S' - x) \geq a \operatorname{card}(\tilde{\Delta}_\varepsilon(S, S') \cap B_{R-r/5}).$$

Therefore

$$\bar{d}_f(S, S') \geq a \overline{\operatorname{dens}}(\tilde{\Delta}_\varepsilon(S, S')).$$

By symmetry we get

$$\bar{d}_f(S, S') \geq a \overline{\operatorname{dens}}(\tilde{\Delta}_\varepsilon(S', S)).$$

Thus

$$\bar{d}_f(S, S') \geq \frac{1}{2} \left[ a \overline{\operatorname{dens}}(\tilde{\Delta}_\varepsilon(S, S')) + a \overline{\operatorname{dens}}(\tilde{\Delta}_\varepsilon(S', S)) \right] \geq \frac{a}{2} \overline{\operatorname{dens}}(\Delta_\varepsilon(S, S')).$$

Therefore  $\bar{d}_f(S, S') \leq a\varepsilon/2$  implies  $\bar{d}^r(S, S') \leq \varepsilon$ .  $\square$

**Proof of Proposition 2.3.1 :** By Lemma 2.7.1,  $\bar{d}$  is a pseudo-metric. It is straightforward to check that  $\bar{d}^c$  and  $\bar{d}_f$  are pseudo-metrics. The uniform continuity of the identity map from  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$  to  $(\mathcal{U}_r, \bar{d}^c)$  is a consequence of Lemma 2.7.2. The uniform continuity of the identity map from  $(\mathcal{U}_r, \bar{d}^c)$  to  $(\mathcal{U}_r, \bar{d}_f)$  is a consequence of Lemma 2.3.2 and of the continuity of  $(\mathcal{U}_r, d) \rightarrow \mathbb{R}, S \mapsto \mu_S * f(0)$ . Finally, the uniform continuity of the identity map from  $(\mathcal{U}_r, \bar{d}_f)$  to  $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$  is a consequence of Lemma 2.7.3.  $\square$

**Proof of Lemma 2.3.3 :** First item. As  $S$  admits an autocorrelation,  $S$  admits  $d \in \mathbb{R}$  as a density (that is,  $|B_R|^{-1} \operatorname{card}(B_R \cap S)$  converges toward  $d$ ). Notice that  $S - t$  also admits  $d$  as a density. Let  $S', S'' \in \mathcal{U}_r$  be two sets admitting  $d$  as a density. It suffices to show that

$$\overline{\operatorname{dens}}(\tilde{\Delta}_a(S', S'')) = \overline{\operatorname{dens}}(\tilde{\Delta}_a(S'', S')) \quad (2.23)$$

If  $x \in S' \setminus \tilde{\Delta}_a(S', S'')$ , then there exists a unique  $y \in S'' \setminus \tilde{\Delta}_a(S'', S')$  such that  $\|y - x\| \leq a$ . This enables us to define a map  $h : S' \setminus \tilde{\Delta}_a(S', S'') \rightarrow S'' \setminus \tilde{\Delta}_a(S'', S')$ . As  $S'$  belongs to  $\mathcal{U}_r$  and as  $2a < r$ , this map is one-to-one. If  $x$  belongs to  $(S' \setminus \tilde{\Delta}_a(S', S'')) \cap B_R$ , then  $h(x)$  belongs to  $B_{R+a}$ . Therefore,

$$\operatorname{card}[(S' \setminus \tilde{\Delta}_a(S', S'')) \cap B_R] \leq \operatorname{card}[(S'' \setminus \tilde{\Delta}_a(S'', S')) \cap B_{R+a}].$$

Consequently,

$$\begin{aligned} \operatorname{card}[\tilde{\Delta}_a(S', S'') \cap B_R] &= \operatorname{card}[S' \cap B_R] - \operatorname{card}[(S' \setminus \tilde{\Delta}_a(S', S'')) \cap B_R] \\ &\geq \operatorname{card}[S' \cap B_R] - \operatorname{card}[(S'' \setminus \tilde{\Delta}_a(S'', S')) \cap B_{R+a}] \\ &\geq \operatorname{card}[S' \cap B_R] - \operatorname{card}[S'' \cap B_{R+a}] + \operatorname{card}[\tilde{\Delta}_a(S'', S') \cap B_{R+a}]. \end{aligned}$$

From

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B_R|} (\operatorname{card}(S' \cap B_R) - \operatorname{card}(S'' \cap B_{R+a})) = 0$$

( $S'$  and  $S''$  admits the same density), we deduce that

$$\overline{\text{dens}}\left(\tilde{\Delta}_a(S', S'')\right) \geq \overline{\text{dens}}\left(\tilde{\Delta}_a(S'', S')\right).$$

By symmetry, we get (2.23).

Second item. Let  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function such that  $1_{B_a} \leq f \leq 1_{B_{2a}}$ . Then

$$\begin{aligned} \overline{\text{dens}}\left(\tilde{\Delta}_{2a}(S, S - t)\right) &= \limsup \frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in B_R \cap S} \left(1 - \sum_{y \in (S - t - x)} 1_{B_{2a}}(y)\right) \\ &\leq \limsup \frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in B_R \cap S} \left(1 - \sum_{y \in (S - t - x)} f(y)\right) \\ &\leq \liminf \frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in B_R \cap S} \left(1 - \sum_{y \in (S - t - x)} f(y)\right) \\ &\leq \liminf \frac{1}{|B_R|} \sum_{x \in B_R \cap S} \left(1 - \sum_{y \in (S - t - x)} 1_{B_a}(y)\right) \\ &\leq \underline{\text{dens}}\left(\tilde{\Delta}_{2a}(S, S - t)\right). \end{aligned}$$

We used in the first and in the last step that  $S - t$  belongs to  $\mathcal{U}_r$ . We used in the third step that  $S$  admits an autocorrelation (and then a density).  $\square$

## Acknowledgements

I thank the referees for their carefull reading and providing usefull comments which have helped to clarify some points in the paper. I also thank one of the referee for pointing out the reference [57].



# Chapitre 3

## Système de particules avec migration

### 3.1 Introduction

L'idée générale est de faire évoluer un ensemble de particules appartenant à un espace métrique selon une dynamique dont le pas élémentaire est le suivant : on choisit un point de l'espace métrique et on y fait se déplacer la particule qui en est la plus proche. Dans la suite, pour évoquer la deuxième étape ce pas élémentaire, nous dirons simplement que le point choisi agit sur la configuration ou, plus simplement encore, que le point choisi apparaît. Nous précisons et étudions cette dynamique dans deux cas particuliers.

Dans le premier cas, les particules sont en nombre fini et sont disposées sur un cercle. La dynamique est discrète dans le temps. On se donne une configuration initiale aléatoire  $\chi_0$  et une suite  $(U_i)_{i \geq 1}$  de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur le cercle. Pour tout entier naturel  $n$ , la configuration au temps  $n + 1$  s'obtient en faisant agir le point  $U_{n+1}$  sur la configuration au temps  $n$ . Remarquons que le nombre de particules est invariant par cette dynamique. Nous établissons, par des techniques de couplage, le résultat suivant :

**Proposition 3.1.1** *Soit  $d \geq 1$ . La chaîne possède une unique distribution stationnaire sur les configurations comportant  $d$  particules. Pour toute configuration initiale, la convergence vers cette loi stationnaire est exponentielle.*

En dehors des cas  $d = 1$  et  $d = 2$ , qui sont triviaux, nous n'avons pas de description satisfaisante de la loi stationnaire. Nous pouvons néanmoins établir une propriété de répulsion entre les particules. Plus précisément :

**Proposition 3.1.2** *Soit  $d \geq 2$ . Notons  $\chi$  une configuration de  $d$  particules stationnaire pour la dynamique. Notons  $M(\chi)$  la distance minimale entre deux particules de  $\chi$ . On a alors :*

$$\log(P(M(\chi)) \leq x)) \sim -\frac{(\log(x))^2}{2 \log(2)}, \quad x \rightarrow 0.$$

Le deuxième cas étudié est celui où les particules vivent sur la droite réelle. Nous nous intéressons à des configurations aléatoires invariantes en loi par translations. Cela nous amène naturellement à définir la dynamique par l'intermédiaire d'un processus de Poisson ponctuel homogène en temps et en espace. On note  $\xi$  un processus de Poisson sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  admettant pour intensité la mesure de Lebesgue canonique. Pour chaque

point  $(u, t)$  de ce processus, nous interprétons  $t$  comme l'instant auquel on fait agir le point  $u$  sur la configuration. Donnons nous une configuration initiale aléatoire  $\chi_0$ . Fixons  $T > 0$ . On définit la configuration à l'instant  $T$  de la manière suivante. Pour tout  $R > 0$ , on ordonne les points de la restriction de  $\xi$  à  $[-R, R] \times [0, T]$  suivant leur deuxième coordonnée. On obtient une suite finie que l'on note  $(u_1^R, t_1^R), \dots, (u_{n(R)}^R, t_{n(R)}^R)$ . On fait alors agir successivement les points  $u_1^R, \dots, u_{n(R)}^R$  sur la configuration initiale. On obtient une configuration que l'on note  $\xi_T^R \cdot \chi_0$ . On démontre que cette configuration converge p.s., lorsque  $R$  tend vers l'infini, vers une configuration que l'on note  $\xi_T \cdot \chi_0$  et que l'on appelle la configuration à l'instant  $T$ .

Nous établissons pour tout  $\rho > 0$  l'existence et l'unicité d'une distribution invariante par translation, invariante par la dynamique, et de densité p.s.  $\rho$ . Plus précisément :

**Théorème 3.1.3** *Soit  $\rho > 0$ . Il existe une unique distribution de processus ponctuel simple de densité p.s.  $\rho$  qui soit invariante par translation et par la dynamique.*

Le fait que les particules puissent sauter sur des distances arbitrairement grandes rend l'étude légèrement délicate. Cela entraîne par exemple que la connaissance de la configuration initiale dans une boule arbitrairement grande centrée en l'origine ne suffit pas pour obtenir des informations sur la configuration à un instant  $T > 0$  dans un compact donné. Ainsi, pour la topologie usuelle, la fonction qui à une configuration initiale donnée associe l'espérance d'une fonctionnelle continue de la configuration à un instant  $T > 0$  n'est pas continue. Nous obtenons néanmoins des résultats de continuité que nous décrivons maintenant de manière informelle. Fixons  $T > 0$ . Il est facile de vérifier que la convergence en loi d'une suite de configurations aléatoires  $\chi_n$  vers une configuration  $\chi$  entraîne, pour tout  $R > 0$ , la convergence en loi de  $\xi_T^R \cdot \chi_n$  vers  $\xi_T^R \cdot \chi$ . Par ailleurs,

$$\xi_T^R \cdot \chi_n \text{ converge p.s. vers } \xi_T \cdot \chi_n \quad (3.1)$$

lorsque  $R$  tend vers l'infini (et un résultat analogue est vrai pour  $\chi$ ). La convergence en loi de  $\xi_T \cdot \chi_n$  vers  $\xi_T \cdot \chi$  est donc acquise si la convergence (3.1) est uniforme en  $n$  en un certain sens. Pour cela, considérons la fonction  $f : R \mapsto \xi_T^R \cdot \chi_n$  pour un entier  $n$  donné et pour une réalisation donnée. Cette fonction est constante par morceaux. Elle ne peut changer de valeur que pour les  $R$  tels que  $\xi$  possède un point dans  $\{-R, R\} \times [0, T]$ . Prenons un tel  $R$  et notons  $(u, t)$  le point de  $\xi \cap \{-R, R\} \times [0, T]$ . Les configurations  $f(R^-)$  et  $f(R)$  sont obtenues en suivant les étapes suivantes :

1. On part de la configuration  $\chi_n$ .
2. On fait agir les points de  $\xi \cap [-R, R] \times [0, t]$  (c'est-à-dire que l'on fait agir les points donnés par les premières coordonnées des points de  $\xi \cap [-R, R] \times [0, t]$ , dans l'ordre donné par leur seconde coordonnée).
3. On fait agir le point  $u$  si on veut obtenir  $f(R)$ , on ne fait rien sinon.
4. On fait agir les points de  $\xi \cap [-R, R] \times [t, T]$ .

Pour la topologie que l'on considère pour la convergence (3.1), deux configurations sont proches si elles sont proches sur une grande boule centrée en l'origine. Il s'agit donc de regarder si la différence induite par la troisième étape, qui concerne des particules situées à distance  $R$  de l'origine environ, peut, grâce à la dernière étape, se propager jusqu'aux particules appartenant à l'instant  $T$  à une boule  $B$  fixé. On démontre alors deux choses :

1. Les particules qui diffèrent après la troisième étape sont séparées des particules appartenant à l'instant  $T$  à la boule  $B$  par un nombre de particules de l'ordre de  $\rho R$ , où  $\rho$  est la densité de  $\chi_n$ .
2. La différence induite par la troisième étape ne peut se propager jusqu'à des particules distantes de plus de  $\sqrt{R}$  particules.

Le premier point est élémentaire. Le deuxième est lié au fait que la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire de  $\{1, \dots, n\}$  est de l'ordre de  $\sqrt{n}$  (problème d'Ulam). Ces deux faits suffisent à établir la convergence (3.1). Pour obtenir l'uniformité, il faut garantir une certaine uniformité dans le premier fait (le deuxième ne dépend que du processus de Poisson, ce qui ne soulève pas de questions d'uniformité). Cette uniformité est acquise sous l'hypothèse d'uniforme intégrabilité de la famille des lois des écarts entre particules successives pour les différents  $\chi_n$  (cette hypothèse permet d'obtenir des minorations uniformes en  $n$  sur le cardinal de  $\text{card}(\chi_n \cap [0, R])$ ). Sous cette hypothèse d'uniforme intégrabilité, la convergence en loi de  $\chi_n$  vers  $\chi$  entraîne donc la convergence en loi de  $\xi_T \cdot \chi_n$  vers  $\xi_T \cdot \chi$ .

L'existence de la distribution stationnaire est une conséquence des résultats suivants. On note  $\chi_d$  la configuration aléatoire de période  $d$  (sur la droite) associée naturellement à la configuration stationnaire comportant  $d$  particules sur le cercle. On montre alors les résultats suivants :

1. Il existe une suite  $d_n$  tendant vers l'infini telle que la suite de configurations aléatoires  $\chi_{d_n}$  converge en distribution vers une configuration aléatoire que l'on note  $\chi$ .
2. Pour tout  $T > 0$ , la suite  $\xi_T \cdot \chi_{d_n}$  converge en loi vers  $\xi_T \cdot \chi$ .
3. La suite de configurations aléatoires  $\chi_d$  est asymptotiquement invariante pour la dynamique.

Le premier point est immédiat. Les deux suivants nécessitent de contrôler la configuration à un instant  $T$  à partir de la configuration initiale. Cela nécessite, comme discuté dans le paragraphe précédent, un contrôle de la taille des écarts entre particules successives des configurations  $\chi_d$ , contrôle que l'on déduit d'une majoration, uniforme en  $d$ , du deuxième moment de la loi des écarts entre deux particules successives de  $\chi_d$ .

L'unicité s'obtient classiquement. L'idée est de coupler deux processus issus de deux configurations stationnaires  $(\chi_0, \phi_0)$  de densité  $\rho > 0$ , en les faisant évoluer selon le même processus de Poisson, et de considérer l'évolution de la densité des particules couplées entre les deux configurations. Cette densité est une fonction croissante du temps. Elle converge vers une certaine limite  $\lambda$ . Fixons une suite  $(t_n)_n$  telle que la loi des couples  $(\chi_{t_n}, \phi_{t_n})$  converge. Notons  $(\chi_\infty, \phi_\infty)$  un couple distribué suivant la loi limite et prenons le comme configuration initiale. La densité des particules couplées est alors constante dans le temps (la densité au temps  $T$  est la limite de la suite des densités des particules couplées entre  $\chi_{t_n+T}$  et  $\phi_{t_n+T}$ , c'est-à-dire  $\lambda$ ). Cela impose que toutes les particules de  $\chi_\infty$  et  $\phi_\infty$  sont couplées, ce qui entraîne l'égalité en loi de  $\chi_\infty$  et  $\phi_\infty$ , c'est-à-dire l'égalité en loi de  $\chi_0$  et  $\phi_0$ .

Le processus avec migration ainsi introduit est notamment proche, par son esprit ou par les difficultés techniques rencontrées - en particulier le fait que le processus sur la droite ne satisfasse pas la propriété de Feller - de deux processus classiques que nous décrivons maintenant brièvement.

Le premier est le processus de Hammersley. Il a été introduit par Aldous et Diaconis [1], suite aux travaux de Hammersley [29], dans l'étude du problème d'Ulam. Ce problème concerne l'étude de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire. Le processus de Hammersley décrit l'évolution d'un système de particules sur la droite réelle soumis à une dynamique markovienne dont le pas élémentaire consiste, informellement, à choisir un point uniformément sur la droite réelle et à y déplacer la particule immédiatement à sa droite (une telle particule est créé si elle n'existe pas). Ce processus a par la suite été étudié notamment par Seppäläinen [65]. L'étude de notre système de particules fait intervenir des estimés élémentaires relatifs au problème d'Ulam, ce qui la rapproche des travaux sur le processus de Hammersley. Une difficulté et un intérêt spécifique de notre modèle résident dans le caractère non explicite des distributions stationnaires (ce sont des mélanges de processus de Poisson ponctuels dans le cas du processus de Hammersley).

Le second est le processus d'exclusion à longue portée introduit par Spitzer [70] et étudié par Liggett [45]. Dans ce processus, les particules vivent sur un réseau, dont chaque site peut accueillir au plus une particule. Chaque particule attend, indépendamment des autres, un temps exponentiel, puis décide de bouger. Elle effectue alors, infiniment rapidement, une marche aléatoire sur le réseau jusqu'à trouver un site vacant en lequel elle se pose (ou disparaît si elle n'en trouve pas). Ce processus ne satisfait pas la propriété de Feller, ce qui entraîne des difficultés similaires à celles rencontrées dans notre modèle. Les techniques utilisées pour pallier à ces difficultés sont néanmoins très différentes des nôtres. Pour des résultats récents, concernant notamment les mesures invariantes de ce processus, nous renvoyons aux articles de Guiol [27], Andjel et Guiol [2] et à l'article de revue de Guiol [28].

## 3.2 Système fini de particules

Fixons un entier strictement positif  $d$ . Notons  $\mathcal{C}_d$  l'ensemble des sous-ensembles de cardinal  $d$  de  $\mathbb{T}$  où  $\mathbb{T}$  désigne le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Nous considérons la dynamique suivante sur les configurations de  $d$  particules sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Soient  $\Lambda = \{x_1, \dots, x_d\} \in \mathcal{C}_d$  et  $u \in \mathbb{T}$ . Notons  $i$  le plus petit indice tel que  $|x_i - u|$  soit la distance entre les ensembles  $\Lambda$  et  $\{u\}$ . On pose  $\phi(\{x_1, \dots, x_d\}, u) = \{x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_d\}$ . Cela définit une fonction de  $\mathcal{C}_d \times \mathbb{T}$  dans  $\mathcal{C}_d$ . Si  $u_1, \dots, u_n$  sont des points de  $\mathbb{T}$ , on définit de manière naturelle  $\phi(\Lambda, u_1, \dots, u_n)$  (par exemple,  $\phi(\Lambda, u_1, u_2) = \phi(\phi(\Lambda, u_1), u_2)$ ).

Avec cette fonction, en partant d'une configuration aléatoire donnée  $S_0$ , on définit une chaîne de Markov  $S_n$  sur  $\mathbb{T}^d$  par  $S_{n+1} = \phi(S_n, U_n)$  où les  $U_n$  sont des v.a.i.i.d. de loi uniforme sur  $\mathbb{T}$ .

### 3.2.1 Mesure stationnaire

Nous prouvons dans cette sous-section la proposition 3.1.1.

**Lemme 3.2.1** *Considérons l'algorithme suivant, qui agit sur les  $d$ -uplets d'entiers naturels indexés par  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  dont la somme vaut  $d$ . On note  $(n_a)_{a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  la configuration actuelle.*

1. *Si chacun des entiers vaut 1, on s'arrête.*

2. Sinon, on choisit un indice  $a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  tel que  $n_a \geq 2$ . On considère alors le premier indice  $b$  suivant  $a$  (éventuellement  $b = a$ ) tel que l'on ait  $n_{b+1} = 0$ . On diminue alors  $n_b$  de 1 et on augmente  $n_{b+1}$  de 1.

Alors, quelle que soit la configuration initiale, l'algorithme s'arrête en au plus  $d(d-1)+1$  étapes.

**Preuve :** On définit une fonction  $f$  de l'ensemble des  $d$ -uplets d'entiers naturels dont la somme vaut  $d$  dans  $\mathbb{N}$  de la manière suivante. Soit  $(n_a)_{a \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$  une configuration. Soit  $A$  l'ensemble des indices  $k$  tels qu'il existe un indice  $i$  vérifiant :  $n_i \geq 2$ ,  $n_{i+1} \geq 1$ , ...,  $n_k \geq 1$ . On pose

$$f(n_1, \dots, n_d) = d \left[ \max(n_1 - 1, 0) + \dots + \max(n_d - 1, 0) \right] + \text{card}(A).$$

On constate que la fonction est positive et que, évaluée en la configuration, elle décroît strictement au cours de l'algorithme. Comme par ailleurs son maximum est  $d(d-1)+1$ , le lemme est prouvé.  $\square$

**Remarque :** En affinant la preuve, on obtient que la borne optimale est  $d(d-1)/2$ .

**Lemme 3.2.2** Pour toutes configurations  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{C}_d$  on a :

$$P \left[ \phi(\Lambda_1, U_1, \dots, U_{4d^2+4}) = \phi(\Lambda_2, U_1, \dots, U_{4d^2+4}) \right] \geq (4d)^{-4d^2-4}.$$

**Preuve :** Pour tout  $k \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , on définit les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{T}$  :  $A_k = ]\frac{k}{d} - \frac{1}{4d}, \frac{k}{d}[$ ,  $B_k = ]\frac{k}{d}, \frac{k}{d} + \frac{1}{4d}[$ ,  $C_k = ]\frac{k}{d} + \frac{1}{4d}, \frac{k}{d} + \frac{1}{2d}[$  et  $I_k = [\frac{k}{d}, \frac{k+1}{d}[$ . Pour tout  $i$ , nous imposerons comme unique condition à  $U_i$  d'être dans l'un des intervalles  $A_k$ ,  $B_k$  ou  $C_k$ . La probabilité que  $U_i$  appartiennent à l'un de ces intervalles étant  $(4d)^{-1}$ , si on montre que après l'apparition de  $U_{4d^2+4}$ , les deux configurations sont identiques, le lemme sera prouvé.

• On commence par ramener la configuration  $\Lambda_1$  à une configuration possédant un point dans chacun des intervalles  $B_k$ .

1) Si la configuration  $\Lambda$  possède un point dans chaque intervalle  $I_k$  mais aucun point dans l'un des intervalles  $B_k$ , on fait apparaître un point dans  $B_1$ , sinon, on ne fait rien. Nous sommes donc ramenés en au plus une étape à une configuration qui vérifie l'une des deux conditions suivantes : elle ne possède pas un point dans chaque  $I_k$  ; elle possède un point dans l'un des  $B_k$ .

2) Pour tout indice  $k$ , on note  $n_k$  le nombre de points de la configuration dans  $I_k$ . On se ramène maintenant à une configuration possédant un point dans chacun des intervalles  $I_k$  et au moins un point dans l'un des intervalles  $B_k$ . Considérons une configuration  $S$  et un indice  $k$  tels que  $S$  possède au moins un point dans  $I_{k-1}$  mais aucun point dans  $I_k$ . En faisant d'abord apparaître un point dans  $A_k$ , puis un point dans  $B_k$ , on fait passer un point de  $S \cap I_{k-1}$  dans  $I_k$ . Soient en effet  $u \in A_k$  et  $v \in B_k$ . Le point de  $S$  le plus proche de  $u$  est nécessairement un point appartenant à  $I_{k-1}$ . Comme par ailleurs  $u$  appartient à  $I_{k-1}$ , quand  $u$  apparaît, il y a déplacement d'un point à l'intérieur de  $I_{k-1}$ . Le nombre de points dans chacun des intervalles  $I_l$  n'a donc pas changé. Le point de  $\phi(S, u)$  le plus proche de  $v$  est nécessairement un point de  $I_{k-1}$  (car  $\phi(S, u)$  possède au moins un point dans  $A_{k-1}$  et aucun point dans  $I_k$ ). Comme par ailleurs  $v$  appartient à  $I_k$ , quand  $v$  apparaît, il a déplacement d'un point de  $I_{k-1}$  vers  $I_k$ . Par rapport à  $S$ ,  $\phi(S, u, v)$  a donc un point

de moins dans  $I_{k-1}$ , un point en plus dans  $I_k$  et le nombre de points dans les autres intervalles  $I_l$  n'a pas changé. D'après le lemme 3.2.1 et ce qui précède, on peut donc se ramener en au plus  $2d(d-1) + 2$  étapes supplémentaires à une configuration possédant un point dans chacun des  $I_k$  et au moins un point dans l'un des intervalles  $B_k$ .

3) Soit  $k$  le plus petit indice tel que la configuration possède un point dans  $B_k$ . Si on fait apparaître successivement un point dans  $C_{k+1}$  puis dans  $B_{k+1}$ , le point de la configuration qui appartient à  $I_{k+1}$  se déplace dans  $B_{k+1}$ . On continue en faisant apparaître successivement un point dans  $C_{k+2}$  puis dans  $B_{k+2}$ , ... On se ramène ainsi en au plus  $2(d-1)$  nouvelles étapes à la situation voulue. Notons  $t$  le nombre d'étapes effectuée, on a  $t \leq 3 + 2d(d-1) + 2(d-1) = 2d^2 + 1$ .

• On applique maintenant le même procédé pour ramener la configuration  $\phi(\Lambda_2, U_1, \dots, U_t)$  à une configuration possédant un point dans chacun des intervalles  $B_k$ . Lors des deux premières parties, on fait soit apparaître un point dans  $B_1$ , soit apparaître un point dans l'un des  $A_k$  puis dans l'un des  $B_k$ . Par conséquent, à l'issu de ces deux étapes la première configuration possède toujours un point dans chacun des intervalles  $B_k$ . Considérons la troisième partie de la procédure. Notons encore  $k$  le plus petit indice tel que la deuxième configuration possède un point dans  $B_k$ . A chaque fois que l'on fait apparaître un point dans  $C_l$  puis  $B_l$  pour un certain  $l$ , on constate que l'on fait coincider les points de la première et de la deuxième configuration appartenant à  $I_l$ . Il reste à faire apparaître un point dans  $C_k$  puis dans  $B_k$  pour faire coincider les deux configurations. Le nombre total d'étapes est majoré par  $2(2d^2 + 1) + 2$ . Il n'est pas nécessaire d'imposer d'exigence sur les derniers  $U_i$ .  $\square$

**Preuve de la proposition 3.1.1 :** Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur le cercle  $\mathbb{T}$ . Fixons une configuration initiale quelconque  $\Lambda$ . Soit  $k$  un entier. Des applications itérées du lemme 3.2.2 nous permettent d'obtenir :

$$P\left[\phi(\Lambda, U_{-k}, U_{-(k-1)}, \dots, U_0) = \phi(\Lambda, U_{-(k+1)}, U_{-k}, \dots, U_0)\right] \geq 1 - \left(1 - (4d)^{-4d^2-4}\right)^{\lfloor k/(4d^2+4) \rfloor}$$

où  $\lfloor k/(4d^2+4) \rfloor$  désigne la partie entière de  $k/(4d^2+4)$ . On en déduit que, presque sûrement, la suite  $k \mapsto \phi(\Lambda, U_{-k}, \dots, U_0)$  est constante à partir d'un certain rang. La loi de la configuration limite est stationnaire pour le processus. L'unicité et la convergence se déduisent facilement de ce qui précède.  $\square$

**Remarque :** La construction donnée dans la preuve de la proposition 3.1.1 nous permet de construire un couplage  $(\chi_n, \chi'_n)_n$  où  $(\chi)_n$  a la loi du processus stationnaire à  $d$  points,  $(\chi')_n$  a la loi du processus stationnaire à  $d'$  points et où, pour tout temps  $n$ ,  $\chi_n \subset \chi'_n$ . Il suffit essentiellement de remarquer que, si deux configurations  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  vérifient  $\Lambda \subset \Lambda'$ , alors, p.s.  $\phi(\Lambda, \cdot) \subset \phi(\Lambda', U)$  où  $U$  est une v.a. uniforme sur le cercle.

### 3.2.2 Densité de la distribution stationnaire

Pour toute configuration  $x = \{x_1, \dots, x_d\} \in \mathcal{C}_d$  on note  $d_i(x)$  la distance entre le point  $x_i$  et les autres points de la configuration. On introduit l'opérateur intégral  $H_i$  qui à  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$  associe la fonction  $H_i f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$H_i f(x_1, \dots, x_d) = \int_{x_i - d_i(x)}^{x_i + d_i(x)} f(x^{i,t}) dt$$

où  $x^{i,t}$  désigne la famille  $(x_1, \dots, x_d)$  dans laquelle le  $i^{\text{ème}}$  point a été remplacé par le point  $t$ . On introduit enfin l'opérateur  $H$ , défini par

$$H = \sum_i H_i.$$

Soit  $\chi$  un processus admettant pour distribution la loi stationnaire à  $d$  particule. Dans la proposition suivante, nous montrons que la loi de  $\chi$  admet une densité symétrique  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dans le sens où, pour toute fonction mesurable positive  $\tilde{g} : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$E(\tilde{g}(\chi)) = \int f(x_1, \dots, x_d)g(x_1, \dots, x_d)dx_1 \dots dx_d$$

où  $g$  désigne la fonction symétrique et mesurable de  $\mathbb{T}^d$  dans  $\mathbb{R}$  naturellement associé à  $\tilde{g}$  (on pose par exemple  $g(x) = 0$  si deux coordonnées de  $x$  sont égales).

**Proposition 3.2.3** *La distribution stationnaire admet une densité symétrique  $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Cette densité vérifie  $Hf = f$ .*

**Preuve :** Soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur le cercle. Soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux configurations disjointes de  $\mathcal{C}_d$ . En reprenant la preuve de la proposition 3.1.1, on constate que l'on peut obtenir une version du processus stationnaire  $\chi$  comme la limite p.s. simultanée des suites  $k \mapsto \phi(\Lambda_1, U_{-k}, \dots, U_0)$  et  $k \mapsto \phi(\Lambda_2, U_{-k}, \dots, U_0)$  :

$$\chi = \lim \phi(\Lambda_1, U_{-k}, \dots, U_0) = \lim \phi(\Lambda_2, U_{-k}, \dots, U_0).$$

En reprenant la définition de  $\phi$ , on obtient que  $\chi$  est un sous-ensemble de  $\Lambda_1 \cup \{U_0, U_{-1}, \dots\}$  et de  $\Lambda_2 \cup \{U_0, U_{-1}, \dots\}$ . Le processus  $\chi$  est donc un sous-ensemble de  $\{U_0, U_{-1}, \dots\}$ .

Fixons  $\psi : \mathcal{C}_d \rightarrow \mathbb{T}^d$  une application mesurable telle que, pour tout  $\Lambda \in \mathcal{C}_d$ , si  $\psi(\Lambda) = (x_1, \dots, x_d)$ , alors  $\Lambda = \{x_1, \dots, x_d\}$ . Du paragraphe précédent, on déduit que la loi de  $\psi(\chi)$  est absolument continue devant la mesure de Haar sur  $\mathbb{T}^d$ . On en déduit l'existence d'une densité  $f$  (telle que définie avant l'énoncé de la proposition). Soit  $g : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$  symétrique, mesurable et positive. En exploitant l'invariance de  $\chi$  par la dynamique, on obtient :

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(x_1, \dots, x_d)g(x_1, \dots, x_d)dx_1 \dots dx_d = \int_{\mathbb{T}^{d+1}} f(x_1, \dots, x_d)g(\phi(x_1, \dots, x_d, u))dx_1 \dots dx_d du.$$

Le point  $x_i$  est tel que  $|x_i - u|$  réalise la distance entre les ensembles  $\{x_1, \dots, x_d\}$  et  $\{u\}$  si et seulement si  $|x_i - u| \leq d_i(x^{i,u})$ . Ainsi, en distinguant suivant le numéro du point qui se déplace, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \sum_i \int_{\mathbb{T}^d} \left( \int_{u-d_i(x^{i,u})}^{u+d_i(x^{i,u})} f(x_1, \dots, x_d)g(x^{i,u})dx_i \right) dx_1 \dots dx_i \dots dx_d du \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \left( \sum_i \int_{y_i-d_i(y)}^{y_i+d_i(y)} f(y^{i,v})dv \right) g(y)dy_1 \dots dy_d, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Soit  $\xi$  une configuration aléatoire de  $\mathcal{C}_d$ . La mesure de Palm  $\tilde{P}_\xi$  associé à la loi de ce processus est l'unique mesure sur  $\mathcal{C}_d$  telle que, pour tout sous-ensemble mesurable  $F$ , l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\tilde{P}(F) = E \left( \sum_{x \in \xi} 1_F(\xi - x) \right).$$

Si  $\Lambda \in \mathcal{C}_d$  est une configuration possédant une particule en 0, en partant de cette particule et en parcourant le cercle dans le sens trigonométrique, on observe successivement  $d$  intervalles délimités par les particules de  $\Lambda$ . Notons  $\psi(\Lambda)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  dont la  $k^{\text{ième}}$  composante est la longueur (d'arc) du  $k^{\text{ième}}$  intervalle observé. Renormalisons la mesure image de la mesure de Palm  $\tilde{P}_\xi$  par l'application  $\psi$  en la divisant par  $d$ . On obtient une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$  qui correspond intuitivement à la loi de la longueur des  $d$  intervalles délimités par le processus  $\xi$ . On note  $P_\xi^I$  cette probabilité.

Soit  $(X_1, \dots, X_d)$  une v.a. de loi  $P_\xi^I$ . Notons  $\xi_1$  la configuration après un pas de la dynamique en partant de  $\xi$ . On peut obtenir une version  $(Y_1, \dots, Y_d)$  de la loi  $P_{\xi_1}^I$  de la manière suivante :

1. On se donne un entier aléatoire  $J$  dont la loi, conditionnellement à  $(X_1, \dots, X_d)$ , donne, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , une probabilité  $X_i$  à l'entier  $i$  ;
2. on pose  $K = J + \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un signe équilibré indépendant ;
3. on se donne une v.a.  $V$  indépendante de loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$  ;
4. on pose  $Y_K = X_K + V X_J / 2$ ,  $Y_J = X_J - V X_J / 2$  et  $Y_k = X_k$  sinon.

**Lemme 3.2.4** *Soit  $d \geq 2$ . Soit  $\chi$  un processus admettant pour distribution la loi stationnaire pour la dynamique. Soit  $(X_1, \dots, X_d)$  une variable aléatoire de loi  $P_\chi^I$ . Posons  $A = dX_1$ . Alors  $E(A) = 1$  et  $E(A^2) = (2d+1)/(3d)E(A^3)$ . Par conséquent, on a :*

$$E(A^2) \leq 3d/(2d+1) \text{ et } E(A^3) \leq (3d/(2d+1))^2. \quad (3.2)$$

**Preuve :** En écrivant que la quantité  $E(X_2^2)$  est conservée après un pas, on obtient la relation suivante, où  $V$  est une v.a. indépendante uniforme sur  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{X_1}{2} \left( \left( X_2 + V \frac{X_1}{2} \right)^2 - X_2^2 \right) \right] + E \left[ X_2 \left( \left( X_2 - V \frac{X_2}{2} \right)^2 - X_2^2 \right) \right] \\ + E \left[ \frac{X_3}{2} \left( \left( X_2 + V \frac{X_3}{2} \right)^2 - X_2^2 \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'invariance de  $(X_1, \dots, X_d)$  par translations et par symétrie, on obtient  $3E(X_1^2 X_2) = 2E(X_1^3)$ . Soit  $i \in \{3, \dots, d-1\}$ . En écrivant que la quantité  $E(X_1 X_i)$  est conservée, on obtient également la relation  $E(X_1^2 X_{i-1}) - 2E(X_1^2 X_i) + E(X_1^2 X_{i+1}) = 0$ . On en déduit, pour tout  $i \neq 1$ , l'égalité  $3E(X_1^2 X_i) = 2E(X_1^3)$ . En sommant sur ces indices, et en utilisant la relation  $\sum_{i \neq 1} X_i = 1 - X_1$ , on obtient enfin

$$E(X_1^2) = \frac{2d+1}{3} E(X_1^3).$$

Avec la notation  $A = dX_1$ , cette relation se réécrit  $E(A^2) = (2d+1)/(3d)E(A^3)$ . La relation  $E(A)$  est quant à elle une conséquence immédiate de l'égalité  $\sum X_i = 1$  et de l'invariance par translation de  $(X_1, \dots, X_d)$ . La première inégalité de l'énoncé se déduit des deux résultats précédents par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a en effet

$$E(A^2) = E(A^{1/2}A^{3/2}) \leq (E(A)E(A^3))^{1/2} \leq (E(A^2)(3d)/(2d+1))^{1/2}$$

et donc

$$E(A^2) \leq (3d)/(2d+1).$$

Enfin, la dernière inégalité de l'énoncé se déduit de la précédente et de la relation  $E(A^2) = (2d+1)/(3d)E(A^3)$ .  $\square$

### 3.2.3 Système de deux particules

Nous nous intéressons dans cette partie au cas où il n'y a que 2 particules, c'est-à-dire au cas où  $d = 2$ . Dans ce cas, nous avons le résultat suivant :

**Proposition 3.2.5** *Soit  $U_0, U_1, \dots$  une suite de v.a.i.i.d de loi uniforme sur le  $[0, 1]$ . Possons*

$$X = \sum_{k \geq 1} U_k / 2^k. \quad (3.3)$$

*Si  $d = 2$ , la distribution stationnaire est la loi de la configuration aléatoire  $\{U_0, U_0 + X\}$ .*

**Preuve :** C'est une conséquence de l'égalité en loi  $X = (X + U)/2$  où  $U$  est une v.a. indépendante de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .  $\square$

**Proposition 3.2.6** *La loi de l'écart entre les deux points (i.e. la loi de la variable donnée par (3.3) admet une densité  $f$  qui vérifie*

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad f(x) = 2 \int_0^{2x} f \quad (3.4)$$

et

$$\forall x \in [1/2, 1], \quad f(x) = 2 \int_{2x-1}^1 f.$$

**Preuve :** C'est une conséquence de l'égalité en loi  $X = (X + U)/2$  où  $U$  est une v.a. indépendante de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .  $\square$

**Lemme 3.2.7** *On a le développement suivant, pour  $a$  tendant vers 0 :*

$$-\log(P(X \leq a)) = \frac{(\log(a))^2}{2 \log(2)} - \frac{\log(a) \log(-\log(a))}{\log(2)} + O(\log(a)).$$

**Preuve :** Soit  $k \geq 1$  un entier. Soit  $x_0 \leq 1/2^k$ . En itérant (3.4) on obtient  $f(x_0) = 2^k \int_A f(x_k) dx_1 \dots dx_k$  où

$$A = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : \forall i \in \{1, \dots, k\}, 0 \leq x_i \leq 2x_{i-1}\}.$$

En posant, pour tout  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $y_i = x_i/2^i$ , on obtient  $f(x_0) = 2^{k(k+3)/2} \int_B f(2^k y_k) dy_1 \dots dy_k$  où

$$B = \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k : y_k \leq y_{k-1} \leq \dots \leq y_1 \leq x_0\}.$$

Ainsi

$$f(x_0) = \frac{2^{k(k+3)/2}}{(k-1)!} \int_0^{x_0} f(2^k y_k) (x_0 - y_k)^{k-1} dy_k$$

On a donc, pour tout  $a \leq 1/2^k$ ,

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= \frac{2^{k(k+3)/2}}{(k-1)!} \int_{0 \leq y \leq x \leq a} f(2^k y) (x - y)^{k-1} dx dy \\ &= \frac{1}{2^{k(k-1)/2} k!} \int_0^{2^k a} (2^k a - y)^k f(y) dy \end{aligned}$$

Si  $1/2^{k+1} \leq a \leq 1/2^k$ , alors

$$\int_0^{2^k a} (2^k a - y)^k f(y) dy \geq \int_0^{1/4} (1/2 - y)^k f(y) dy \geq 1/4^k \int_0^{1/4} f.$$

En utilisant (3.3), on vérifie immédiatement que  $C = \int_0^{1/4} f$  est strictement positif. Par ailleurs,

$$\int_0^{2^k a} (2^k a - y)^k f(y) dy \leq \int_0^1 f = 1.$$

Ainsi, si  $1/2^{k+1} \leq a \leq 1/2^k$ , on a l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2^{k(k-1)/2} k!} \frac{C}{4^k} \leq P(X \leq a) \leq \frac{1}{2^{k(k-1)/2} k!}.$$

Le lemme s'en déduit. □

### 3.2.4 Répulsion

Fixons  $d \geq 2$  un entier et notons  $\chi$  une configuration aléatoire distribuée suivant la loi stationnaire à  $d$  particules. Nous prouvons dans cette sous-section la proposition 3.1.2. Pour toute configuration  $\Lambda \in \mathcal{C}_d$ , on note  $M(\Lambda)$  la distance minimale entre deux points de  $\Lambda$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on note  $L_k$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}_d$  défini par

$$L_k = \left\{ \Lambda \in \mathcal{C}_d : M(\Lambda) \leq \frac{1}{2^k d} \right\}.$$

On note  $T_k$  le premier instant  $n \geq 0$  où  $\chi_n$  appartient à  $L_k$ . Introduisons également l'ensemble

$$H = \left\{ \Lambda \in \mathcal{C}_d : M(\Lambda) > \frac{1}{2d} \right\}$$

et notons  $T_H^+$  le premier instant strictement positif  $n \geq 1$  où  $\chi_n$  appartient à  $H$ . Remarquons que, si la configuration initiale appartient à  $H$ , alors la suite des  $T_k$  est strictement croissante.

**Lemme 3.2.8** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $k \geq 1$  et toute configuration  $\Lambda \in H$ , on ait :*

$$E^\Lambda \left( (T_H^+ - T_k) \mathbf{1}_{T_k < T_H^+} \right) \leq \frac{C^k}{2^{k^2/2}}.$$

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que, pour  $i \geq 1$ ,  $a \geq 1$  et toute configuration  $\Lambda$  n'appartenant pas à  $L_i$ , on a

$$\begin{aligned} P^\Lambda(\chi_1 \in L_i, T_H^+ > a) &= \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{\phi(\Lambda, u) \in L_i} P^{\phi(\Lambda, u)}(T_H^+ \geq a) du \\ &\leq \frac{1}{2^{i-1}} G(a) \end{aligned}$$

où on a posé

$$G(a) = \sup_{\tilde{\Lambda} \notin H} P^{\tilde{\Lambda}}(T_H^+ \geq a).$$

Cette inégalité repose sur le fait que, pour obtenir une configuration appartenant à  $L_i$ , il faut nécessairement que le nouveau point apparaisse dans un intervalle de longueur initiale inférieure à  $d^{-1}2^{1-i}$ , et qu'il y a au plus  $d$  tels intervalles. Notons

$$A = P^\Lambda(T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_k = t_k, T_H^+ \geq t_{k+1})$$

où les  $t_i$  sont des entiers vérifiant  $0 < t_1 < \dots < t_{k+1}$ . On déduit de ce qui précède, par des conditionnements successifs, les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{2^{k-1}} G(t_{k+1} - t_k) P^\Lambda(T_1 = t_1, \dots, T_{k-1} = t_{k-1}, T_H^+ > t_k - 1) \\ &\leq \frac{1}{2^{k-1}2^{k-2}} G(t_{k+1} - t_k) G(t_k - t_{k-1}) P^\Lambda(T_1 = t_1, \dots, T_{k-2} = t_{k-2}, T_H^+ > t_{k-1} - 1) \\ &\leq \frac{1}{2^{k(k-1)/2}} G(t_{k+1} - t_k) G(t_k - t_{k-1}) \dots G(t_2 - t_1) P^\Lambda(T_H^+ > t_1 - 1) \\ &\leq \frac{1}{2^{k(k-1)/2}} G(t_{k+1} - t_k) G(t_k - t_{k-1}) \dots G(t_2 - t_1) G(t_1). \end{aligned}$$

En sommant sur tous les  $k$ -uplets d'entiers  $(t_1, \dots, t_{k+1})$  vérifiant  $0 < t_1 < \dots < t_{k+1}$  on obtient

$$\begin{aligned} E^\Lambda \left( (T_H^+ - T_k) \mathbf{1}_{T_k < T_H^+} \right) &\leq \frac{1}{2^{k(k-1)/2}} \sum_{t_1 < \dots < t_{k+1}} G(t_{k+1} - t_k) G(t_k - t_{k-1}) \dots G(t_2 - t_1) G(t_1) \\ &\leq \frac{1}{2^{k(k-1)/2}} \left( \sum_{a>0} G(a) \right)^{k+1}. \end{aligned}$$

En reprenant la preuve du lemme 3.2.2 on constate que la somme  $\sum_{a>0} G(a)$  est finie. Le lemme s'en déduit.  $\square$

**Preuve de la proposition 3.1.2 :** La preuve du lemme 3.2.2 permet de s'assurer que la formule

$$m(A) = E \left( 1_H(\chi_0) \sum_{i=0}^{T_H^+-1} 1_A(\chi_i) \right)$$

où  $E$  désigne l'espérance sous la loi stationnaire définit une mesure  $m$  égale à la loi stationnaire. On en déduit avec le lemme 3.2.8 les majorations suivantes :

$$P(L_k) \leq E \left( 1_H(\chi_0)(T_H^+ - T_k) 1_{T_H^+ > T_k} \right) \leq \frac{P(H)C^k}{2^{k^2/2}}.$$

On en déduit l'inégalité

$$-\log(P(M(\chi) \leq x)) \geq \frac{(\log(x))^2}{2 \log(2)} + O(\log(x)).$$

L'autre inégalité nécessaire pour prouver le résultat s'obtient en utilisant le lemme 3.2.7 et la remarque suivant la proposition 3.1.1.  $\square$

### 3.3 Système infini de particules

Nous étudions dans cette section la dynamique dans le cas d'un système de particules sur la droite réelle.

#### 3.3.1 Construction du processus

Dans cette sous-section nous donnons un sens à la dynamique. Introduisons tout d'abord quelques notations. Notons  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R})$  l'ensemble des sous-ensembles localement finis de  $\mathbb{R}$ . Nous appellerons un élément de  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R})$  une configuration simple et appellerons chacun de ses points une particule. L'ensemble  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R})$  constitue l'espace d'état naturel pour notre dynamique. Cependant, pour des raisons techniques, nous serons amenés à considérer des configurations multiples. Une configuration multiple est la donnée conjointe d'un élément  $\Lambda \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R})$  et d'une famille d'entiers strictement positifs  $(n_x)_{x \in \Lambda}$  indexée par  $\Lambda$ . Pour chaque  $x \in \Lambda$ ,  $n_x$  représente le nombre de particules situées en  $x$ . Nous notons  $\mathcal{M}_\sigma^m(\mathbb{R})$  l'ensemble des configurations multiples. Par convention, lorsque nous parlerons simplement de configurations, il s'agira de configurations simples.

Formellement, on peut voir  $\mathcal{M}_\sigma^m(\mathbb{R})$  comme l'ensemble des mesures positives localement finies  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  pour lesquelles  $\mu(B)$  est un entier pour tout borélien borné  $B$  de  $\mathbb{R}$  ( $\mu(B)$  représente alors le nombre de particules appartenant au borélien  $B$ ). L'ensemble  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R})$  s'identifie alors avec le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_\sigma^m(\mathbb{R})$  constitué des mesures  $\mu$  telles que  $\mu(\{x\})$  ne peut prendre que la valeur 0 ou 1 quand  $x$  parcourt  $\mathbb{R}$ . Nous introduisons sur  $\mathcal{M}_\sigma^m(\mathbb{R})$  la topologie vague, c'est-à-dire la topologie engendrée par les applications  $\mu \rightarrow \mu(f)$  lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des applications continues à support compact de  $\mathbb{R}$  dans lui-même. Nous considérons enfin sur  $\mathcal{M}_\sigma^m(\mathbb{R})$  la tribu borélienne associée à cette

topologie. Nous renvoyons à l'ouvrage de Kallenberg [35] pour plus de précisions sur ces questions.

Soit  $\Lambda \in \mathcal{M}_\sigma^m(\mathbb{R})$  une configuration multiple. Soit  $\xi$  un processus de Poisson dans le demi-plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  admettant la mesure de Lebesgue pour intensité. Soient  $T' > T > 0$  et  $R > 0$ . Notons  $\xi_{[T,T']}^R$  la restriction du processus ponctuel  $\xi$  à l'ensemble  $[-R, R] \times [T, T']$ . Ce processus restreint possède un nombre fini de points. Les deuxièmes coordonnées de ces points sont toutes distinctes. Notons  $(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)$  ces points classés par ordre croissant de leur deuxième coordonnée. On pose  $\xi_{[T,T']}^R \cdot \Lambda = \phi(\Lambda, u_1, \dots, u_r)$  (nous étendons de manière naturelle la définition de  $\phi$  aux ensembles multiples ; si plusieurs particules réalisent la distance minimale à un point, l'action de ce point est de déplacer l'une de ces particules). Pour simplifier les notations, nous écrirons parfois simplement  $\Lambda_T^R$  au lieu de  $\xi_{[0,T]}^R \cdot \Lambda$ . Nous allons montrer que  $\Lambda_T^R$  converge quand  $R$  tend vers l'infini. La limite sera l'état du système issu de  $\Lambda$  à l'instant  $T$  sous l'action du processus de Poisson  $\xi$ .

Par convention, lorsque nous écrirons  $\Lambda = (x_i)_i$ , nous signifierons que les  $x_i$  constituent une énumération des particules de  $\Lambda$  (avec multiplicité si la configuration est multiple) et que les  $x_i$  sont classés par ordre croissant. On dit d'une configuration multiple  $\Lambda$  qu'elle possède une densité à droite  $\rho$  si  $R \mapsto R^{-1} \text{card}(\Lambda \cap [0, R])$  converge vers  $\rho$  en l'infini (dans l'évaluation du cardinal, on tient compte de la multiplicité des particules). On définit de même une densité à gauche. On définit similairement des densités inférieures à droite et à gauche.

**Lemme 3.3.1** *Soit  $\Lambda$  une configuration multiple. On suppose que  $\Lambda$  possède une densité inférieure strictement positive à gauche et à droite. Alors, pour tout  $S > 0$ , presque sûrement, la fonction  $R \mapsto \Lambda_T^R \cap [-S, S]$  est constante pour  $R$  suffisamment grand.*

La preuve de ce lemme repose sur les deux lemmes suivants. Dans le premier d'entre eux, on part de deux configurations qui ne diffèrent que par la position d'une particule. On fait apparaître successivement des points  $u_1, \dots, u_n$  et on étudie la propagation de la différence entre les deux configurations au cours de la dynamique. Pour éviter d'avoir à s'occuper de détails non pertinents pour notre étude, nous supposons la générnicité de la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  : une famille de points  $(u_1, \dots, u_n)$  est non générifique par rapport à une configuration donnée si il existe un instant  $t \in \{1, \dots, n\}$  en lequel deux particules (non situées au même endroit) réalisent simultanément la distance minimale au point  $u_t$  ou en lequel au moins une particule est située en  $u_t$ . On dit d'une configuration qu'elle est infinie à gauche et à droite si elle possède une infinité de particules dans  $\mathbb{R}_-$  et dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Lemme 3.3.2** *Considérons deux configurations initiales multiples  $\Lambda = (x_i)_i$  et  $\Lambda' = (x'_i)_i$ . On les suppose infinies à gauche et à droite. Supposons qu'il existe un unique entier  $k$  tel que  $x_k$  soit différent de  $x'_k$ . Soient  $u_1, \dots, u_n$  des réels. On les suppose génériques par rapport à  $\Lambda$  et  $\Lambda'$ . Pour  $t \in \{0, \dots, n\}$  on note  $x_i(t)$  la position de la particule initialement en  $x_i$  après l'apparition du  $t^{i\text{ème}}$  point. On définit de même  $x'_i(t)$ . On suppose  $x_0(n) \neq x'_0(n)$ . Alors, il existe une sous-suite monotone de longueur  $|k|$  extraite de  $(u_1, \dots, u_n)$ .*

**Preuve :** Pour clarifier la preuve, nous commençons par prouver le résultat dans le cas où les configurations initiales sont simples, puis montrons comment déduire le cas général de ce cas particulier.

1) Configurations simples. Adoptons la convention suivante : la situation à l'instant  $t$  correspond à la situation juste après l'apparition du  $t^{\text{ème}}$  point. Appelons particule solitaire de la configuration  $\Lambda$  à l'instant  $t \in \{0, \dots, n\}$  une particule  $x_j(t)$  telle que  $x_j(t) \notin \{x'_i(t)\}_i$ . On définit symétriquement une particule solitaire de  $\Lambda'$ .

Remarquons que le nombre de particules solitaires d'une configuration donnée ne peut augmenter. Supposons en effet par exemple que la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  soit solitaire à un instant  $t \geq 1$  alors qu'elle n'était pas solitaire à l'instant précédent. Cela entraîne que la particule de  $\Lambda'$  qui coïncide avec la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  à l'instant  $t - 1$  se déplace avec l'apparition du point  $u_t$  (ce qui implique que la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  est la seule particule qui devient solitaire) et que la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  ne se déplace pas. Notons  $j$  le numéro de la particule de  $\Lambda$  se déplaçant avec l'apparition du point  $u_t$ . Les numéros  $i$  et  $j$  sont distincts et on a nécessairement  $|x_j(t - 1) - u_t| < |x_i(t - 1) - u_t|$ . Cette inégalité entraîne que la  $j^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  est nécessairement solitaire à l'instant  $t - 1$  (car sinon la particule de  $\Lambda'$  qui coïncide avec la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  n'aurait pas été la particule de  $\Lambda'$  la plus proche de  $u_t$  à l'instant  $t - 1$ ). Solitaire à l'instant  $t - 1$ , la  $j^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  ne l'est plus à l'instant suivant. Il n'y a donc pas davantage de particules solitaires. Dans notre cas, il y aura donc toujours une unique particule solitaire dans chacune des configurations (car sinon les deux configurations coïncideraient à l'instant  $n$  et on aurait  $x_0(n) = x'_0(n)$ ).

Remarquons par ailleurs que le numéro de la particule solitaire de chaque configuration change au plus de 1 en valeur absolue à chaque pas de la dynamique. Supposons en effet que le numéro de la particule solitaire de  $\Lambda$  passe de  $i$  à  $j$  entre l'instant  $t - 1$  et l'instant  $t$ . Supposons, par l'absurde, que l'on ait  $j \geq i + 2$ . Fixons  $m$  un entier strictement compris entre  $i$  et  $j$ . La  $i^{\text{ème}}$  particule n'étant plus solitaire, elle bouge nécessairement avec l'apparition du point  $u_t$ . Comme on a  $x_i(t - 1) < x_m(t - 1)$ , on en déduit l'inégalité  $u_t < x_m(t - 1)$ . La  $j^{\text{ème}}$  particule devenant solitaire, la particule de  $\Lambda'$  avec laquelle elle coïncide bouge nécessairement. Mais en  $x_m(t - 1)$ , il y a (entre autre) une particule de  $\Lambda'$ . De  $x_j(t - 1) > x_m(t - 1)$ , on déduit l'inégalité  $u_t > x_m(t - 1)$ . Les deux inégalités obtenues étant contradictoires, la remarque est prouvée.

Supposons, pour fixer les idées, que  $k$  est strictement positif. L'hypothèse  $x_0(n) \neq x'_0(n)$  entraîne notamment que l'une des deux particules solitaires (de  $\Lambda$  ou de  $\Lambda'$ ) est d'indice inférieur ou égal à 0 à l'instant  $n$ . Supposons, pour fixer les idées, que ce soit le cas pour la particule solitaire de  $\Lambda$ . On peut supposer que  $k$  est non nul (sinon il n'y a rien à prouver).

Montrons l'existence d'une sous-suite décroissante de longueur  $k$  extraite de  $(u_1, \dots, u_n)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  est solitaire à un instant donné, et ne l'est plus à l'instant  $n$ . Il existe donc un dernier instant où cette particule est solitaire. Notons  $T_i$  ce dernier instant. Ces temps vérifient  $T_i < n$ . Nous allons construire par récurrence une suite d'entiers  $Z_1, \dots, Z_k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$  telle que

1. Pour tout  $i$ ,  $Z_i > T_i$  ;
2. Pour tout  $i$ , la  $i^{\text{ème}}$  particule de  $\Lambda$  bouge avec l'apparition du point  $U_{Z_i}$  ;
3. La suite  $U_{Z_i}$  est croissante ;
4. La suite  $Z_i$  est décroissante.

Nous commençons par poser  $Z_1 = T_1 + 1$ . Supposons la suite construite pour  $i \in \{1, \dots, j - 1\}$ . La  $j^{\text{ème}}$  particule bouge avec l'apparition du point  $U_{T_j + 1}$ . Notons  $Z_j$  le dernier instant

$t$  de  $\{T_j + 1, \dots, Z_{j-1} - 1\}$  tel que la  $j^{\text{ième}}$  particule bouge avec l'apparition du point  $U_t$ . Par ailleurs, à l'instant  $Z_{j-1}$ , la  $(j-1)^{\text{ième}}$  particule bouge en  $U_{Z_{j-1}}$  et donc, à l'instant précédent, la  $j^{\text{ième}}$  particule est à droite de  $U_{Z_{j-1}}$ . Par conséquent,  $U_{Z_j} > U_{Z_{j-1}}$ . Les quatre propriétés désirées sont vérifiées par la suite  $Z_1, \dots, Z_j$ . On en déduit par récurrence l'existence de la suite recherchée, ce qui conclut la preuve du lemme dans le cas de configurations simples.

2) Configurations multiples. On se ramène au cas précédent de la manière suivante. Si plusieurs particules sont au même endroit, on les écarte légèrement les unes des autres (en veillant à ce qu'elles soit toujours classées par ordre de position croissante, en conservant par exemple l'une d'entre elles à sa position initiale et en veillant à ce que l'hypothèse  $x_i = x'_i$  pour tout  $i$  différent de  $k$  soit toujours vérifiées). De l'hypothèse de générnicité on obtient que, si l'écartement est suffisamment faible, alors les indices des particules qui bougent à chaque étape sont les mêmes dans la situation initiale et dans la situation modifiée. En particulier, dans la situation modifiée, les particules d'indices 0 ne coïncident pas à l'instant final. Nous sommes dans les conditions d'applications du premier point, le lemme s'en déduit.  $\square$

**Lemme 3.3.3** *Soit  $\xi$  un processus de Poisson ponctuel sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  admettant pour intensité la mesure de Lebesgue. Fixons  $T > 0$ . Soit  $R > 0$ . On note  $(u_1, t_1), \dots, (u_n, t_n)$  les points de la restriction de  $\xi$  à  $[0, R] \times [0, T]$ , classée par ordre croissant des  $t_i$ . On note  $l_R$  la longueur de la plus longue sous-suite croissante de  $(u_1, \dots, u_n)$ . Alors, il existe une constante  $K$  telle que, pour tout  $R > 0$ , on ait  $E(l_R) \leq K\sqrt{R}$*

**Preuve :** Voir par exemple la section 7 du chapitre 6 de [19].  $\square$

**Preuve Lemme 3.3.1 :** Notons  $(v_1, t_1), \dots$  les points de la restriction de  $\xi$  à  $\mathbb{R} \times [0, T]$ , classés par ordre croissant du module de la première coordonnée. La fonction  $R \mapsto \Lambda_T^R$  étant constante sur les intervalles de  $\mathbb{R}_+ \setminus \{|v_1|, |v_2|, \dots\}$ , il suffit de montrer que la suite  $n \mapsto \Lambda_T^{|v_n|}$  est p.s. ultimement constante. Ecrivons, avec la convention usuelle,  $\Lambda = (x_k)_k$ . Pour un entier  $n$  donné, on peut suivre l'évolution de chacune de ces particules au cours du temps dans la construction de  $\Lambda_T^{|v_n|}$  (seul une particule bouge à l'apparition de chaque point ; s'il y a plusieurs particules au même endroit et que l'une d'entre elles bouge, on convient que c'est celle de plus haut numéro si le saut est vers la droite, et celle de plus bas numéro si le saut est vers la gauche ; l'ordre des particules est ainsi conservé). Notons  $x_k^n(t)$  la position à l'instant  $t$  dans la construction de  $\Lambda_T^{|v_n|}$  de la particule initialement en  $x_k$ .

Fixons un entier relatif  $k$ . Nous commençons par montrer que, presque sûrement, pour  $n$  assez grand, la suite  $n \mapsto x_k^n(T)$  est constante. Fixons un entier  $n \geq 1$ . Supposons, pour fixer les idées, que  $v_n$  appartient à  $\mathbb{R}_+$ . Comparons les fonctions  $t \mapsto \Lambda_t^{|v_{n-1}|}$  et  $t \mapsto \Lambda_t^{|v_n|}$ , c'est-à-dire l'évolution temporelle des particules dans la construction de  $\Lambda_T^{|v_{n-1}|}$  et dans celle de  $\Lambda_T^{|v_n|}$ . Jusqu'à l'instant  $t_n$ , les particules évoluent de la même manière. A l'instant  $t_n$  (instant où l'on fait apparaître  $v_n$  dans la deuxième construction mais pas dans la première), l'une exactement des particules (convenons qu'il s'agit de la  $p_n$ -ème) a une position différente dans les deux constructions. Etudions  $p_n$ . Rappelons que  $v_n$  est positif. La particule immédiatement à la gauche de  $v_n$  à l'instant initial est toujours à la gauche de  $v_n$  lorsque ce point apparaît. Ainsi,  $p_n$  est supérieur ou égal au numéro de cette particule immédiatement à la gauche de  $v_n$  à l'instant initial. On en déduit  $p_n > \alpha|v_n|/2$  p.s. pour

$n$  assez grand où  $\alpha > 0$  désigne la densité à droite de  $\Lambda$ . En particulier, p.s. pour  $n$  assez grand, on a  $p_n > k$ . Du lemme 3.3.2, on déduit que l'égalité  $x_k^n(T) = x_k^{n-1}(T)$  est vérifiée dès que l'on a l'inégalité  $p_n - l_{|v_n|} - 1 > k$ , où, pour  $R > 0$ ,  $l_R$  désigne la longueur de la plus grande sous-suite monotone extraite de  $(u_1^R, \dots, u_n^R)$ . Etudions maintenant  $l_R$ . Du lemme 3.3.3 on déduit que, presque sûrement, pour tout entier  $m$  assez grand, l'inégalité  $l_m^4 < \alpha m^4/6$  est vérifiée. Comme la fonction  $R \mapsto l_R$  est croissante, on en déduit que, presque sûrement, l'inégalité  $l_R < \alpha R/3$  est vérifiée pour tout  $R$  suffisamment grand. Ainsi, presque sûrement, pour  $n$  assez grand, l'inégalité  $p_n - l_{|v_n|} \geq \alpha|v_n|/6$  a lieu. Comme cette inégalité entraîne, pour  $n$  suffisamment grand, l'inégalité  $p_n - l_{|v_n|} - 1 > k$ , on a bien  $x_k^{n-1}(T) = x_k^n(T)$  p.s. pour tout  $n$  assez grand.

Nous savons pour l'instant que, pour tout  $k$ , presque sûrement, pour  $n$  assez grand, la suite  $n \mapsto x_k^n(T)$  est constante. Notons  $x_k(T)$  la limite. Soit  $A > \max(|x_0(T)|, S)$ . Nous allons maintenant montrer que, presque sûrement, la fonction  $R \mapsto \Lambda_T^R \cap [-A, A]$  est constante pour  $R$  assez grand. Pour tout  $R$ , le cardinal de  $\Lambda_T^R \cap [-A, A]$  (dans la définition duquel on tient compte de la multiplicité des particules) est majoré par  $C = \text{card}(\Lambda \cap [-A, A]) + \text{card}(\xi \cap [-A, A] \times [0, T])$ . Comme l'ordre des particules est conservé, on déduit de  $x_0(T) \in [-A, A]$  et  $\text{card}(\Lambda_T^R \cap [-A, A]) \leq C$  les inégalités  $x_{-C}(T) < -A$  et  $x_C(T) > A$ . Soit  $N$  tel que, pour  $n \geq N$ , on ait les égalités  $x_k^n(T) = x_k(T)$  pour tout  $k \in \{-C, \dots, C\}$ . De ce qui précède, et du fait que l'ordre des particules est conservé, on déduit que, pour  $n \geq N$ , on a, pour  $k \leq -C$ ,  $x_k^n(T) \leq x_{-C}(T) = x_{-C}(T) < -A$  et, de même, pour  $k \geq C$ ,  $x_k^n(T) > A$ . Par conséquent, pour  $n \geq N$ , on a  $\Lambda_T^{|v_n|} \cap [-A, A] = \{x_{-C}(T), \dots, x_C(T)\} \cap [-A, A]$ , ce qui prouve le lemme (car  $A > S$ ).  $\square$

**Remarques :**

1. La preuve de ce lemme montre en fait que, pour tout  $S > 0$ , presque sûrement, il existe  $R > 0$  tel que, pour tout sous-ensemble borné  $F$  de  $\mathbb{R} \times [0, T]$  contenant  $[-R, R] \times [0, T]$ ,  $(\xi \cap F) \cdot \Lambda$  et  $\xi_T \cdot \Lambda$  coïncident sur  $[-S, S]$ .
2. La remarque précédante entraîne en particulier que, pour tout  $x$ ,  $(\xi \cap [x - R, x + R] \times [0, T]) \cdot \chi$  converge vers  $\xi_T \cdot \chi$ . Par conséquent, si la configuration initiale est un processus ponctuel stationnaire admettant p.s. une densité strictement positive, le processus ponctuel à l'instant  $T$  est également stationnaire.
3. Fixons une particule  $x \in \Lambda$ . Notons  $x^R(t)$  sa position finale dans  $\xi_t^R \cdot \Lambda$ . La preuve du lemme montre que, pour tout  $T > 0$ , la trajectoire  $(x_t^R)_{t \in [0, T]}$  est indépendante de  $R$  pour  $R$  suffisamment grand.

Dans le lemme suivant, nous affinons la preuve du lemme 3.3.1 pour vérifier que  $\Lambda_T$  possède une densité strictement positive à gauche et à droite dès que  $\Lambda$  possède une densité strictement positive à gauche et à droite. L'idée est que, si  $S > R$  est tel que les particules initialement dans le segment  $[-R, R]$  ont la même position à l'instant  $T$  dans  $\Lambda_T^S$  et dans  $\Lambda_T^R$  pour  $S \geq R$ , alors ces particules appartiennent, à l'instant  $T$ , au segment  $[-S, S]$ . En majorant le rapport  $S/R$ , on obtient une minoration de la densité inférieure.

**Lemme 3.3.4** *Soient  $T > 0$  et  $\rho > 0$ . Soit  $\Lambda$  une configuration simple. On suppose que  $\Lambda$  possède une densité à gauche et à droite égale à  $\rho$ . Alors  $\Lambda_T$  possède une densité inférieure à gauche et à droite supérieure à  $\rho$ .*

**Preuve :** Nous raisonnons presque sûrement. Nous conservons les notations de la preuve du lemme 3.3.1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $R_0$  tels que les quatre propriétés suivantes soient vérifiées.

1.  $\forall R' \geq R_0, \quad R' \rho(1 - \varepsilon) \leq \text{card}(\Lambda \cap [-R', 0]) \leq R' \rho(1 + \varepsilon);$
2.  $\forall R' \geq R_0, \quad R' \rho(1 - \varepsilon) \leq \text{card}(\Lambda \cap [0, R']) \leq R' \rho(1 + \varepsilon);$
3.  $\forall S \geq R_0, \quad l_S \leq S^{3/4};$
4.  $\forall S \geq R_0, \quad S \rho(1 - \varepsilon) - S^{3/4} \geq S \rho(1 - 2\varepsilon).$

Soient  $S$  et  $R_1$  deux réels vérifiant  $S \geq R_1 \geq R_0$ . En utilisant successivement les trois dernières propriétés, on obtient :

$$\text{card}(\Lambda \cap [R_1, S]) - l_S \geq S \rho(1 - \varepsilon) - R_1 \rho(1 + \varepsilon) - S^{3/4} \geq S \rho(1 - 2\varepsilon) - R_1 \rho(1 + \varepsilon).$$

Supposons  $S \geq S_1$  où  $S_1 = R_1(1 + \varepsilon)(1 - 2\varepsilon)^{-1}$ . D'après ce qui précède, on a alors  $\text{card}(\Lambda \cap [R_1, S]) \geq l_S$ . Similairement, on a  $\text{card}(\Lambda \cap [-S, -R_1]) \geq l_S$ . On en déduit, en raisonnant comme dans la preuve du lemme 3.3.1, que les particules de  $\Lambda$  initialement dans le segment  $[-R_1, R_1]$  ont les mêmes positions finales dans tous les  $\Lambda_T^S$  pour  $S \geq S_1$ . Elles ont donc les mêmes positions finales dans  $\Lambda_T$  et dans  $\Lambda_T^{S_1}$ . En particulier, leur positions finales dans  $\Lambda_T$  appartiennent au segment  $[-S_1, S_1]$ . Notons  $x_0$  la position de la particule de  $\Lambda$  initialement immédiatement à droite de l'origine. Notons  $x_0(T)$  sa position à l'instant  $T$ . Supposons  $R_1$  suffisamment grand pour que  $x_0$  appartiennent au segment  $[-R_1, R_1]$  ( $x_0(T)$  appartient alors au segment  $[-S_1, S_1]$ ). Avec ce qui précède, on déduit que toutes les particules initialement dans le segment  $[x_0, R_1]$  sont, à l'instant  $T$ , dans le segment  $[x_0(T), S_1]$ . Ainsi

$$\frac{1}{S_1} \text{card}(\Lambda_T \cap [x_0(T), S_1]) \geq \frac{1 - 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{1}{R_1} \text{card}(\Lambda \cap [x_0, R_1]).$$

En faisant tendre  $R_1$  (et donc  $S_1$ ) vers l'infini, on obtient que  $\Lambda_T$  admet une densité inférieure à droite supérieure à  $(1 - 2\varepsilon)(1 + \varepsilon)^{-1}\rho$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 puis en raisonnant similairement à gauche on obtient le lemme.  $\square$

Dans le cas d'un processus ponctuel stationnaire, on déduit aisément du lemme 3.3.4 le résultat suivant :

**Lemme 3.3.5** *Soit  $\chi$  un processus ponctuel simple, stationnaire et intégrable. Soient  $T > 0$  et  $\rho > 0$ . On suppose que  $\chi$  admet p.s.  $\rho$  pour densité. Alors  $\chi_T$  admet p.s.  $\rho$  pour densité.*

**Preuve :** Les processus  $\chi$  et  $\chi_T$  sont stationnaires. Vérifions qu'ils ont la même intensité. Nous appliquons pour cela le principe de transport de masse. Pour tout couple d'entiers relatifs  $(p, q)$  notons  $N(p, q)$  le nombre de particules passant de l'intervalle  $[p, p + 1[$  à l'intervalle  $[q, q + 1[$ . On a

$$\rho = E(\text{card}(\chi \cap [0, 1])) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} EN_{0,q} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} EN_{p,0} = E(\text{card}(\chi_T \cap [0, 1]))$$

où la troisième inégalité découle de la stationnarité du processus  $\chi$  et du processus de poisson  $\xi$  (et de deuxième remarque suivant la preuve du lemme 3.3.1).

On en déduit par le théorème ergodique de Wiener que  $\chi_T$  admet p.s. une densité aléatoire  $\rho_T$  vérifiant  $E(\rho_T) = \rho$ . Comme par ailleurs le lemme 3.3.4 nous donne  $\rho_T \geq \rho$ , le lemme s'en déduit.  $\square$

**Lemme 3.3.6** *Soit  $\Lambda$  une configuration simple admettant une densité strictement positive à gauche et à droite. Soit  $T < T'$  deux réels positifs. Alors  $\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda = \xi_{[0,T']}\cdot\Lambda$ .*

**Preuve :** Nous raisonnons presque sûrement. Par le lemme 3.3.4 nous savons que  $\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$  admet une densité inférieure strictement positive à gauche et à droite, ce qui donne un sens à  $\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$ . Soit  $A > 0$ . Le lemme 3.3.1 et la remarque qui le suit montre qu'il existe un réel  $R > A$  tel que, pour tout  $S > R$ , les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$(\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda) \cap [-A, A] = (\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda) \cap [-A, A] \quad (3.5)$$

$$(\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda) \cap [-A, A] = (\xi_{[0,T']}\cdot\Lambda) \cap [-A, A]. \quad (3.6)$$

Soit  $B > 3R$  tel que  $\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$  possède un point dans  $[-B/3, B/3]$ . Pour  $S$  assez grand, les particules de  $\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$  appartenant à  $[-B, B]$  sont déjà à leur position définitive dans  $\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$ . Supposons  $S$  suffisamment grand pour que cette propriété soit vérifiée. Alors,  $(\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda) \cap [-A, A]$  ne dépend de  $\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$  qu'à travers sa restriction à  $[-B, B]$  (l'idée est que, pour tout  $t \in [T, T']$ ,  $\xi_{[T,t]}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda$  possède une particule dans  $[-B/3, B/3]$  ; cette particule est plus proche d'un point de  $[-R, R]$  que toute particule en dehors de  $[-B, B]$ ). Ainsi, pour  $S$  assez grand, on a l'égalité :

$$(\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda) \cap [-A, A] = (\xi_{[T,T']}\cdot\xi_{[0,T]}\cdot\Lambda) \cap [-A, A]. \quad (3.7)$$

Le lemme se déduit des relations (3.5), (3.6) et (3.7).  $\square$ .

### 3.3.2 Régularité

Dans cette sous-section, nous établissons quelques résultats de continuité de la dynamique. Soit  $\chi$  un processus ponctuel simple stationnaire et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\chi$  est p.s. non vide. Du fait de la stationnarité, cela entraîne que  $\chi$  possède p.s. une particule strictement à droite de l'origine. Notons  $\psi : \mathcal{M}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$  l'application qui à  $\Lambda \in \mathcal{M}_\sigma$  associe la position de la première particule strictement à droite de l'origine. On convient par exemple que  $\psi(\Lambda)$  est nulle si cette particule n'existe pas. On définit la mesure  $m_\chi$  de la distances entre deux particules successives de  $\chi$  comme l'image de la mesure de Palm du processus par l'application  $\psi$ . Pour expliciter cette définition, fixons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application mesurable, positive et d'intégrale finie et non nulle. On a alors, pour toute application  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mesurable et positive, la relation

$$\int \phi(x) dm_\chi(x) = E(H(\chi)) \quad (3.8)$$

où  $H : \mathcal{M}_\sigma \rightarrow [0, \infty]$  est définie par

$$H(\Lambda) = [f f]^{-1} \sum_{x \in \Lambda} f(x) \phi(\psi(\Lambda - x)). \quad (3.9)$$

**Lemme 3.3.7** *Soit  $\alpha > 0$ . Soit  $\mathcal{A} = (\chi_i)_i$  une famille de processus ponctuels stationnaires, simples, intégrables et p.s. non vides. On suppose que la famille de mesures  $(m_{\chi_i})_i$  est uniformément intégrable, c'est-à-dire que*

$$\int_t^{+\infty} u dm_{\chi_i}(u)$$

converge vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini, et ce uniformément en  $i$ . Alors la probabilité

$$P(\forall x \geq R, \text{card}(\chi_i \cap [0, x]) \geq x^{1-\alpha})$$

tend vers 1 quand  $R$  tend vers l'infini, et ce uniformément en  $i \in I$ .

**Preuve :** Notons  $\chi$  l'un des processus de la famille. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $X_n(\chi)$  la position de la  $n^{\text{ième}}$  particule de  $\chi \cap \mathbb{R}_+$  (on classe les particules par ordre croissant de leur position). Si cette particule n'existe pas on pose  $X_n(\chi) = +\infty$ . On introduit également l'événement  $B_n$  défini par

$$B_n = \{X_{2^n}(\chi) \geq b_n\}$$

où on a posé

$$b_n = 2^{n/(1-\alpha)}.$$

Supposons que, pour  $n$  supérieur à un certain entier  $N$ , aucun des événements  $B_n$  n'est réalisé. Soit  $n \geq N$ . On sait qu'il y a au moins  $2^n$  particules dans l'intervalle  $[0, b_n]$ . Soit alors  $x$  dans l'intervalle  $[b_n, b_{n+1}]$ . On a

$$\text{card}(\chi \cap [0, x]) \geq \text{card}(\chi \cap [0, b_n]) \geq 2^n.$$

Mais

$$2^n = x^{1-\alpha} \left( \frac{b_n}{x} \right)^{1-\alpha} \geq x^{1-\alpha} \left( \frac{b_n}{b_{n+1}} \right)^{1-\alpha} \geq x^{1-\alpha}/2.$$

Ainsi, pour  $x \geq b_N$ , on a

$$\text{card}(\chi \cap [0, x]) \geq x^{1-\alpha}/2.$$

Il suffit donc, pour conclure la preuve le lemme, de prouver que la probabilité

$$P\left(\bigcap_{n \geq N} B_n^c\right)$$

converge vers 1 quand  $N$  tend vers l'infini ( $B_n^c$  désigne le complémentaire de  $B_n$ ) et ce uniformément en  $\chi \in \mathcal{A}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout réel  $M > 0$  on considère l'événement  $A_M$  défini par

$$A_M = \{\chi \cap [0, M] = \emptyset\}.$$

Vérifions que, pour  $M$  suffisamment grand, la probabilité de  $A_M$  est majorée par  $\varepsilon$  uniformément en  $\chi \in \mathcal{A}$ . On utilise pour cela le fait que la loi de  $X_1$  s'exprime classiquement en fonction de  $m_\chi$  de la façon suivante. Pour toute fonction mesurable et positive  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on a

$$E(f(X_1(\chi))) = \int_{\mathbb{R}_+} \left( \int_0^v f(u) du \right) dm_\chi(v).$$

En appliquant cette relation on obtient :

$$P(A_M) = \int_{\mathbb{R}_+} \max(v - M, 0) dm_\chi(v) \leq \int_M^\infty v dm_\chi(v).$$

L'hypothèse d'uniforme intégrabilité nous permet alors de choisir  $M$  tel que, pour tout processus  $\chi$  de la famille, la relation  $P(A_M) \leq \varepsilon$  soit vérifiée. Fixons un tel  $M$ .

Evaluons maintenant la probabilité de l'événement  $A_M^c \cap B_n$  où  $n \geq 1$  est un certain entier donné. Supposons que l'événement  $A_M^c \cap B_n$  soit réalisé. Le processus possède alors une particule dans le segment  $[0, M]$ . Notons  $x$  la position de la première de ces particules. On a alors  $X_{2^n}(\chi - x) \geq b_n - M$ . La variable aléatoire

$$Z = \sum_{y \in \chi \cap [0, M]} 1_{X_{2^n}(\chi - y) \geq b_n - M}$$

est donc supérieure ou égale à 1 sur  $A_M^c \cap B_n$ . L'espérance de cette variable aléatoire est donc supérieure à la probabilité de l'événement  $A_M^c \cap B_n$ . On a donc, en utilisant la formule de Campbell (voir par exemple [10, 55]),

$$M\tilde{P}(X_{2^n}(\tilde{\chi}) \geq b_n - M) \geq P(A_M^c \cap B_n).$$

Posons, pour tout entier  $i \geq 1$ ,  $Y_i = X_{i+1} - X_i$  (si les deux termes sont infinis, on convient par exemple que  $Y_i$  est infini). L'intégrale de  $Y_i(\tilde{\chi})$  ne dépend pas de  $i$  et vaut donc  $\int y dm_\chi(y)$  et donc 1 [10, 55]. On a ainsi :

$$E(Z) = M\tilde{P}(Y_1(\tilde{\chi}) + \dots + Y_{2^n-1}(\tilde{\chi}) \geq b_n - M) \leq \frac{M2^n}{b_n - M}$$

et donc

$$P(A_M^c \cap B_n) \leq \frac{M2^n}{2^{n/(1-\alpha)} - M}.$$

La sommabilité de la suite  $n \mapsto 2^n(2^{n/(1-\alpha)} - M)^{-1}$  assure qu'il existe un entier  $N$  tel que la réunion des événements  $A_M^c \cap B_n$  pour  $n \geq N$  est de probabilité inférieure  $\varepsilon$ , pour tout processus  $\chi$  de notre famille. Fixons un tel  $N$ . La probabilité de la réunion des  $B_n$  pour  $n \geq N$  est alors inférieure à  $2\varepsilon$  (rappelons que l'on a  $P(A_M) \leq \varepsilon$ ). La preuve est donc complète.  $\square$

**Remarque :** En reprenant la partie de la preuve qui étudie la probabilité de l'événement  $A_M$ , on constate que cette probabilité se minore de la façon suivante :

$$P(A_M) = \int_{\mathbb{R}_+} \max(v - M, 0) dm_\chi(v) \geq \int_{2M}^{\infty} \frac{v}{2} dm_\chi(v).$$

L'uniforme intégrabilité est donc une condition nécessaire pour que la probabilité de  $A_M$  converge uniformément vers 0 quand  $M$  tend vers l'infini. L'uniforme intégrabilité est donc a fortiori une condition nécessaire pour les conclusions du lemme.

**Lemme 3.3.8** *Soit  $\{\chi_i, i \in I\}$  une famille de processus stationnaires, simples, intégrables et p.s. non vides. On suppose que la famille de mesures  $(m_{\chi_i})_i$  est uniformément intégrable (voir l'énoncé du lemme 3.3.7). Alors, pour tout  $S, T > 0$ , la probabilité*

$$P\left(\forall R' \geq R, \xi_T^{R'} \cdot \chi_i \cap [-S, S] = \xi_T \cdot \chi_i \cap [-S, S]\right)$$

tend vers 1 quand  $R$  tend vers l'infini, et ce uniformément en  $i \in I$ .

**Preuve :** Notons  $\chi$  l'un des processus de la famille. Toutes les estimations de probabilité que nous ferons dans cette preuve seront indépendantes du choix de  $\chi$  parmi les processus de la famille considérée. Pour tout  $Q, R > 0$ , on note  $B_Q^{R_\varepsilon(Q)}$  l'événement suivant : pour tout sous-ensemble borné  $F$  de  $\mathbb{R} \times [0, T]$  contenant  $[-R, R] \times [0, T]$ , les particules de  $\chi$  initialement dans le segment  $[-Q, Q]$  ont la même position finale dans  $(\xi \cap F).\chi$  et dans  $\chi_T$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous commençons par prouver l'existence d'une fonction  $R_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout  $Q > 0$ , la probabilité  $P(B_Q^{R_\varepsilon(Q)})$  est minorée par  $1 - \varepsilon$  ;
2. La fonction  $Q \mapsto R_\varepsilon(Q)/Q$  converge vers 1 quand  $Q$  tend vers l'infini.

1) Pour tout  $R > 0$ , on note  $l_R$  la longueur de la plus longue sous-suite monotone extraite de  $(u_1^R, \dots, u_n^R)$  où  $(u_1^R, t_1^R), \dots, (u_r^R, t_r^R)$  est une énumération des points de  $\xi \cap [-R, R] \times [0, T]$  telle que la suite  $k \mapsto t_k^R$  soit croissante. Il existe une constante  $K$  telle que, pour tout réel  $R$  suffisamment grand, on ait  $E(l_R) \leq K\sqrt{R}$ . Par conséquent, pour  $n$  assez grand, on a

$$P(l_{2^n} \geq 2^{5n/8}) \leq K2^{-n/8}.$$

On en déduit l'existence d'un entier  $N$  vérifiant :

$$P(\forall n \geq N, l_{2^n} \geq 2^{5n/8}) \leq \varepsilon/3.$$

Posons  $R_1 = 2^N$ . Grâce à la monotonicité de  $R \mapsto l_R$ , on obtient :

$$P(\forall R \geq R_1, l_R \leq (2R)^{5/8}) \geq 1 - \varepsilon/3. \quad (3.10)$$

2) Fixons  $\alpha = 1/4$ . Par le lemme 3.3.7 (pour  $\alpha = 1/4$ ) obtient un réel  $R_2 > 0$  tel que l'on ait :

$$P(\forall R \geq R_2, \text{card}(\chi \cap [0, R]) \geq R^{3/4}) \geq 1 - \varepsilon/3.$$

Par stationnarité, cela entraîne, pour tout  $Q > 0$ , les inégalités

$$P(\forall R \geq R_2 + Q, \text{card}(\chi \cap [Q, R]) \geq (R - Q)^{3/4}) \geq 1 - \varepsilon/3 \quad (3.11)$$

et

$$P(\forall R \geq R_2 + Q, \text{card}(\chi \cap [-R, -Q]) \geq (R - Q)^{3/4}) \geq 1 - \varepsilon/3 \quad (3.12)$$

soient vérifiées.

3) Notons  $h$  la fonction définie pour  $R$  et  $Q$  vérifiant  $R \geq Q > 0$  par  $h(R, Q) = (R - Q)^{3/4}(2R)^{-5/8}$ . Pour tout  $Q > 0$ , la fonction  $h(\cdot, Q)$  est une bijection croissante de  $[Q, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Notons  $R_3(Q)$  l'antécédent de 1 par cette dernière fonction. On a donc

$$\forall R \geq R_3(Q), (R - Q)^{3/4} \geq (2R)^{5/8}. \quad (3.13)$$

Posons  $R_\varepsilon(Q) = \max(R_1, R_2 + Q, R_3(Q))$ . En utilisant les relations (3.10-3.13) on obtient qu'en dehors d'un événement de probabilité au plus  $\varepsilon$ , les deux inégalités suivantes sont vérifiées pour tout  $R \geq R_\varepsilon(Q)$  :

$$l_R \leq \text{card}(\chi \cap [Q, R]) \text{ et } l_R \leq \text{card}(\chi \cap [-R, -Q]).$$

Or, si un tel événement est réalisé, on sait, par le lemme 3.3.2 (par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 3.3.1) que l'événement  $B_Q^{R_\varepsilon(Q)}$  est réalisé.

Le réel  $R_\varepsilon(Q)$  vérifie donc la première des deux propriétés exigées. Vérifions la deuxième propriété en reconstruisant la fonction  $h$  qui nous a permis de définir  $R_3(Q)$ . Pour tout  $\lambda > 1$ , la fonction définie par  $Q \mapsto h(\lambda Q, Q)$  tend vers l'infini. La croissance, pour  $Q$  fixé, de la fonction  $h(\cdot, Q)$  permet d'en déduire que le quotient  $R_3(Q)/Q$  converge vers 1 quand  $Q$  tend vers l'infini. On en déduit immédiatement la propriété recherchée.

4) Nous montrons maintenant comment déduire le lemme des résultats précédents. Soit  $R_4 > 0$  un réel tel que la probabilité que  $\chi$  possède (au moins) une particule dans l'intervalle  $[-R_4, R_4]$  soit supérieure à  $1 - \varepsilon$ . Fixons  $Q \geq \max(2S, R_4)$  tel que le rapport  $R_\varepsilon(Q)/Q$  soit majoré par  $4/3$ . Alors, avec une probabilité supérieure à  $1 - 2\varepsilon$ , le processus  $\chi$  possède une particule initialement dans l'intervalle  $[-Q, Q]$  dont la position à l'instant  $T$  appartient à l'intervalle  $[-R_\varepsilon(Q), R_\varepsilon(Q)]$  et donc à l'intervalle  $[-4Q/3, 4Q/3]$ . L'invariance en loi par translation des processus  $\chi$  et  $\xi$  ainsi que la deuxième remarque suivant la preuve du lemme 3.3.1 nous permettent alors de conclure qu'avec une probabilité supérieure à  $1 - 4\varepsilon$  l'événement suivant est réalisé : le processus  $\chi$  possède une particule initialement dans  $[-3Q, -Q]$  (resp.  $[Q, 3Q]$ ) appartenant à l'instant  $T$  à l'intervalle  $[-\infty, -2Q/3]$  (resp.  $[2Q/3, +\infty]$ ). Posons maintenant  $R = R_\varepsilon(3Q)$ . Alors, avec une probabilité minorée par  $1 - 5\varepsilon$ , l'événement précédent est réalisé et, pour tout  $R' \geq R$ , toutes les particules de  $\chi$  initialement dans  $[-3Q, 3Q]$  ont la même position finale dans  $\chi_T^{R'}$  et dans  $\chi_T$ . Comme l'ordre des particules ne change pas dans le temps, on en déduit qu'avec une probabilité minorée par  $1 - 5\varepsilon$ , pour tout  $R' \geq R$ , les configurations  $\chi_T^{R'}$  et  $\chi_T$  coïncident sur  $[-2Q/3, 2Q/3]$  et donc sur  $[-S, S]$ .  $\square$

**Lemme 3.3.9** *Soient  $\Lambda_n$  une suite de configurations multiples convergeant vers la configuration multiple  $\Lambda$ . On suppose  $\Lambda$  non vide. Soient  $R, T > 0$ . On a alors convergence presque sûre de  $\xi_T^R \cdot \Lambda_n$  vers  $\xi_T^R \cdot \Lambda$ .*

**Preuve :** Il suffit de montrer que, si  $u$  est un point de  $\mathbb{R}$  qui n'est pas le milieu d'aucun couple de particules de  $\Lambda$ , alors  $\phi(\Lambda_n, u)$  converge vers  $\phi(\Lambda, u)$ . Prouvons ce fait. Considérons pour cela une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et à support compact. Pour conclure, il suffit de prouver que  $\phi(\Lambda_n, u)(f)$  converge vers  $\phi(\Lambda, u)(f)$  (dans cette écriture, nous voyons les configurations comme des mesures sur  $\mathbb{R}$ ).

Notons  $x$  la position initiale de la particule de  $\Lambda$  qui bouge sous l'action de  $u$ . Supposons, pour fixer les idées, que l'on a  $x \leq u$ . Grâce à l'hypothèse faite sur  $u$ , on sait que  $\Lambda$  n'a pas de particules dans l'intervalle  $[x, 2u - x]$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\Lambda$  n'ait pas de particules dans l'intervalle  $[x, 2u - x + 2\alpha]$ .

Soit  $\beta \in ]0, \alpha[$  suffisamment petit pour que, si deux réels sont à une distance inférieure à  $\beta$ , alors leurs images par  $f$  sont à une distance inférieure à  $\varepsilon$ . Pour  $n$  suffisamment grand, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1.  $\Lambda_n$  possède une particule (au moins) dans l'intervalle  $[x - \beta, x + \beta]$ .
2.  $\Lambda_n$  ne possède pas de particules dans l'intervalle  $[x + \beta, 2u - x + \alpha]$ .

Considérons un entier  $n$  tel que les deux propriétés précédentes soient vérifiées. Notons  $x_n$  la position de la particule de  $\Lambda_n$  la plus proche de  $u$  (ou de l'une des particules les plus proches de  $u$ ). Du fait des propriétés ci-dessus, on sait que  $x_n$  appartient à l'intervalle  $[x - \beta, x + \beta]$ . D'après la définition de  $x$  et de  $x_n$ , on a

$$\phi(\Lambda_n, u)(f) - \Lambda_n(f) = f(x_n) - f(u)$$

et

$$\phi(\Lambda, u)(f) - \Lambda(f) = f(x) - f(u).$$

On a donc, de par la définition de  $\beta$ ,

$$|\phi(\Lambda_n, u)(f) - \phi(\Lambda, u)(f)| \leq |\Lambda_n(f) - \Lambda(f)| + \varepsilon.$$

La convergence de  $\phi(\Lambda_n, u)(f)$  vers  $\phi(\Lambda, u)(f)$  s'en déduit.  $\square$

**Lemme 3.3.10** *Soit  $\chi_n$  une suite de processus stationnaires, simples, p.s. non vides, intégrables. On suppose que la suite de mesures  $(m_{\chi_i})_i$  est uniformément intégrable (voir l'énoncé du lemme 3.3.7) et que la suite  $(E(\text{card}(\chi_i \cap [0, 1])))_i$  est bornée. On suppose enfin que cette suite de processus converge en loi vers un processus que l'on note  $\chi$ . Alors le processus  $\chi$  est stationnaire, intégrable et admet p.s. une densité strictement positive à droite et à gauche. Cela permet de donner un sens à  $\xi_T \cdot \chi$  pour tout  $T > 0$ . On a, pour tout  $T > 0$ , la convergence en loi de  $\xi_T \cdot \chi_n$  vers  $\xi_T \cdot \chi$ . Si de plus  $\chi_n$  converge simplement vers  $\chi$ , alors  $\xi_T \cdot \chi_n$  converge en probabilité vers  $\xi_T \cdot \chi$ .*

**Preuve :** Quitte à construire nos variables sur un nouvel espace de probabilité sans changer leur loi, on peut supposer que la suite  $\chi_n$  converge simplement vers  $\chi$ . Le processus  $\chi$  est clairement stationnaire. Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue et à support compact, la suite de variables aléatoires  $\chi_n(f)$  converge simplement vers  $\chi(f)$ . Comme

$$E(\chi_n(f)) = E(\text{card}(\chi_n \cap [0, 1])) \int f,$$

la suite  $(E(\chi_n(f)))_n$  est bornée et donc, par le lemme de Fatou,  $E(\chi(f))$  est fini. Cela entraîne l'intégrabilité de  $\chi$ . Prouvons maintenant que  $\chi$  est p.s. non vide. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 3.3.7 on obtient l'existence de  $R > 0$  tel que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout entier  $n$  :

$$P(\chi_n \cap [0, R] \neq \emptyset) \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue, positive, à support dans  $[-1, R+1]$  et valant 1 sur  $[0, R]$ . De l'inégalité qui précède on déduit que l'on a, pour tout  $n$ ,  $E(\min(f(\chi_n), 1)) \geq 1 - \varepsilon$ . On a par conséquent également  $E(\min(f(\chi), 1)) \geq 1 - \varepsilon$ . Il y a donc un point de  $\chi$  dans  $[-1, R+1]$  avec une probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ . On obtient finalement que  $\chi$  est p.s. non vide. Comme  $\chi$  est de plus stationnaire et intégrable, cela entraîne que  $\chi$  admet p.s. une densité strictement positive à gauche et à droite. Prouvons ce fait. Remarquons tout d'abord que, par le théorème ergodique de Wiener,  $\chi$  admet p.s. une densité. La stationnarité de  $\chi$  entraîne par ailleurs que, p.s.,  $\chi$  admet des densités à gauche et à droite égales à sa densité. Il s'agit donc de montrer que l'événement  $M = \{\chi \text{ admet 0 pour densité}\}$  est de probabilité nulle. Mais par le théorème ergodique de Wiener, on obtient que l'espérance de  $\text{card}(\chi \cap [0, 1])$  sur  $M$  est nulle. Cela entraîne que  $\chi$  est p.s. vide sur l'événement  $M$ . L'hypothèse selon laquelle  $\chi$  est p.s. non vide nous permet alors de conclure que  $M$  est de probabilité nulle. Nous venons de prouver l'existence p.s. d'une densité strictement positive à gauche et à droite. Cela permet de donner un sens à  $\xi_T \cdot \chi$  par le lemme 3.3.1.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et à support compact et  $S > 0$  un réel tel que le support de  $f$  soit contenu dans le segment  $[-S, S]$ . Pour conclure la preuve

du lemme, il suffit de prouver la convergence en probabilité de  $\xi_T \cdot \chi_n(f)$  vers  $\xi_T \cdot \chi(f)$ . Par le lemme 3.3.8, on obtient un réel  $R_1 > 0$  tel que l'on ait pour tout  $R \geq R_1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P\left[ (\xi_T^R \cdot \chi_n) \cap [-S, S] = (\xi_T \cdot \chi_n) \cap [-S, S] \right] \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.14)$$

Par le lemme 3.3.1, on obtient l'existence de  $R_2 > 0$  tel que, pour tout réel  $R \geq R_2$ , l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$P\left[ (\xi_T^R \cdot \chi) \cap [-S, S] = (\xi_T \cdot \chi) \cap [-S, S] \right] \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.15)$$

Posons  $R = \max(R_1, R_2)$ . Pour un tel  $R$ , les deux relations (3.14) et (3.15) sont vérifiées. Par le lemme 3.3.9, on obtient la convergence p.s. de  $\xi_T^R \cdot \chi_n$  vers  $\xi_T^R \cdot \chi$ . On dispose par conséquent de la convergence p.s., et donc en probabilité, de  $\xi_T^R \cdot \chi_n(f)$  vers  $\xi_T^R \cdot \chi(f)$ . Soit  $a > 0$ . Rappelons que le support de  $f$  est inclus dans le segment  $[-S, S]$ . De la convergence en probabilité de  $\xi_T^R \cdot \chi_n(f)$  et des relations (3.14) et (3.15) on déduit, pour tout  $n$ , l'inégalité suivante :

$$P(|\xi_T \cdot \chi_n(f) - \xi_T \cdot \chi(f)| > a) \leq 2\varepsilon + P(|\xi_T^R \cdot \chi_n(f) - \xi_T^R \cdot \chi(f)| > a).$$

Ainsi,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_T \cdot \chi_n(f) - \xi_T \cdot \chi(f)| > a) \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit la convergence en probabilité de  $\xi_T \cdot \chi_n(f)$  vers  $\xi_T \cdot \chi(f)$ .  $\square$

### 3.3.3 Mesure invariante

Nous prouvons dans cette sous-section le théorème 3.1.3. Soit  $d \geq 1$  un entier. Nous identifions de manière naturelle  $[0, d]$  et le cercle  $\mathbb{R}/d\mathbb{Z}$ . Soit  $\bar{\chi}_d$  le processus stationnaire à  $d$  points sur ce cercle. Notons  $\tilde{\chi}_d$  le processus  $d$ -périodique associé sur  $\mathbb{R}$ . Via notre identification, nous avons

$$\tilde{\chi}_d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\bar{\chi}_d + kd). \quad (3.16)$$

Nous allons construire une mesure stationnaire comme limite d'une sous-suite de ces processus  $\tilde{\chi}_d$ . L'intérêt de ces processus est que nous disposons pour eux de contrôles sur les premiers moments des longueurs typiques des intervalles, grâce au lemme 3.2.4, ce qui nous permet d'obtenir des propriétés de continuités pour la dynamique, via le lemme 3.3.10.

Nous commençons par vérifier que les processus  $\tilde{\chi}_d$  sont asymptotiquement invariants par la dynamique.

**Lemme 3.3.11** *Soit  $T > 0$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et à support compact. Alors, pour toute fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée, la suite*

$$|E(H(\tilde{\chi}_d(f))) - E(H(\xi_T \cdot \tilde{\chi}_d(f)))|$$

*converge vers 0 lorsque  $d$  tend vers l'infini.*

**Preuve :** La preuve repose sur les deux idées très simples suivantes :

1. La configuration aléatoire  $\tilde{\chi}_d$  serait invariante par la dynamique si le processus de Poisson était  $d$ -périodique ;
2. Le fait que le processus de Poisson soit périodique ou non a peu d'influence sur ce qui se passe dans un compact fixé dès que  $d$  est grand.

Cela nous amène à donner un sens à la dynamique sous l'action d'un processus de Poisson périodique et à vérifier qu'un analogue du lemme 3.3.8 s'applique.

Fixons un entier  $d$  et abandonnons provisoirement les indices  $d$  pour alléger les notations. Notons  $\tilde{\xi}$  le processus ponctuel spatiallement  $d$ -périodique associé au processus de Poisson  $\xi$  de la manière suivante :

$$\tilde{\xi} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\xi \cap [-d/2, d/2[ \times \mathbb{R}_+) + k(d, 0).$$

Pour tout point  $u$  de  $\mathbb{R}$  on note  $k(u)$  l'unique entier  $k$  tel que  $u$  appartienne à  $[-d/2, d/2[ + kd$ . Pour tout  $R > 0$ , on note  $\tilde{\xi}_T^R$  la restriction de  $\tilde{\xi}$  à  $[-R, R] \times [0, T]$ . On note  $(u_1, t_1), \dots, (u_r, t_r)$  les points de  $\tilde{\xi}_T^R$ . On impose que  $(u, t)$  précède strictement  $(u', t')$  dans cette énumération si et seulement si  $t < t'$  ou  $(t = t' \text{ et } |k(u)| < |k'(u')|)$  ou  $(t = t' \text{ et } k(u) = -k'(u))$ . On pose  $\tilde{\xi}_T^R \cdot \tilde{\chi} = \phi(\tilde{\chi}, u_1, \dots, u_r)$ .

Dans ce qui suit nous indentifions régulièrement de manière naturelle  $[0, d[$  et le cercle  $\mathbb{R}/d\mathbb{Z}$ . Notons  $\bar{\xi}$  le processus de Poisson sur  $(\mathbb{R}/d\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}_+$  associé au processus spatiallement périodique  $\xi$ . L'action de  $\bar{\xi}$  sur  $\bar{\chi}$  se définit naturellement. Soit  $S > 0$ . Prouvons que, presque sûrement,  $\tilde{\xi}_T^R \cdot \tilde{\chi} \cap [-S, S]$  coïncide pour  $R$  suffisamment grand avec la restriction à  $[-S, S]$  du processus ponctuel  $d$ -périodique associé à  $\bar{\xi}_T \cdot \bar{\chi}$ . Raisonnons presque sûrement. Soit  $(t_1, \dots, t_s)$  une énumération croissante des deuxièmes coordonnées des points de la restriction de  $\bar{\xi}$  à  $\mathbb{R}/d\mathbb{Z} \times [0, T]$ . Notons  $r$  le plus grand entier vérifiant  $R > (2r + 1/2)d$  et supposons que l'on a  $r \geq s$ . On vérifie par récurrence que la propriété suivante est vérifiée pour tout  $i$  appartenant à  $\{1, \dots, s\}$  :  $\tilde{\xi}_{t_i}^R \cdot \tilde{\chi}$  coïncide, sur  $[-(2r - 2i)d - d/2, (2r - 2i)d + d/2[$ , avec le processus  $d$ -périodique associé à  $\bar{\xi}_{t_i} \cdot \bar{\chi}$ . On en déduit que, p.s. pour  $R$  suffisamment grand,  $\tilde{\xi}_T^R \cdot \tilde{\chi}$  coïncide sur  $[-S, S]$  avec le processus ponctuel  $d$ -périodique associé à  $\bar{\xi}_T \cdot \bar{\chi}$ . Notons  $\tilde{\xi}_T \cdot \tilde{\chi}$  ce dernier processus. Remarquons que, du fait de la stationnarité de  $\bar{\chi}$  pour la dynamique sur le cercle, les deux processus  $\bar{\chi}$  et  $\bar{\xi}_T \cdot \bar{\chi}$  ont la même loi, et par conséquent les deux processus  $\tilde{\chi}$  et  $\tilde{\xi}_T \cdot \tilde{\chi}$  ont également la même loi.

**Affirmation :** Pour tout  $S > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe un entier  $d_0 \geq 1$  et un réel  $R > 0$  tels que la probabilité

$$P \left( \forall R' \geq R, \widetilde{(\xi_d)}^{R'} \cdot \widetilde{\chi_d} \cap [-S, S] = \widetilde{(\xi_d)}_T \cdot \widetilde{\chi_d} \cap [-S, S] \right) \quad (3.17)$$

soit minorée par  $1 - \varepsilon$  pour tout  $d \geq d_0$ .

Admettons provisoirement ce résultat et montrons comment il nous permet de conclure. Fixons  $S > 0$  un réel tel que le support de  $f$  soit contenu dans le segment  $[-S, S]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 3.3.8, que l'on peut appliquer grâce au lemme 3.2.4, on obtient que la probabilité

$$P \left( \forall R' \geq R, \widetilde{\xi}_T^{R'} \cdot \widetilde{\chi_d} \cap [-S, S] = \widetilde{\xi}_T \cdot \widetilde{\chi_d} \cap [-S, S] \right) \quad (3.18)$$

tend vers 1 quand  $R$  tend vers l'infini, uniformément en  $d$ . Soit alors  $R$  et  $d_0$  tels que les probabilités (3.17) et (3.18) soient supérieures à  $1 - \varepsilon$  pour  $d \geq d_0$ . On a alors, pour  $d \geq d_0$ ,

$$\left| E(H(\tilde{\xi}_{dT}^R \cdot \tilde{\chi}_d(f))) - E(H(\tilde{\xi}_{dT} \cdot \tilde{\chi}_d(f))) \right| \leq 2\varepsilon \|H\|_\infty$$

et

$$\left| E(H(\xi_T^R \cdot \tilde{\chi}_d(f))) - E(H(\xi_T \cdot \tilde{\chi}_d(f))) \right| \leq 2\varepsilon \|H\|_\infty.$$

Par ailleurs, si  $d$  est suffisamment grand, la relation  $\tilde{\xi}_{dT}^R = \xi_T^R$  est également vérifiée. Ainsi, pour  $d$  suffisamment grand, on a

$$\left| E(H(\tilde{\xi}_{dT} \cdot \tilde{\chi}_d(f))) - E(H(\xi_T \cdot \tilde{\chi}_d(f))) \right| \leq 4\varepsilon \|H\|_\infty.$$

Comme les deux processus  $\tilde{\chi}_d$  et  $(\tilde{\xi}_d)_T \cdot \tilde{\chi}_d$  ont la même loi, le lemme s'en déduit.

Nous concluons maintenant la preuve du lemme en établissant l'affirmation que nous avons admise jusqu'à présent. Sa preuve ne nécessite pas d'idées nouvelles, et consiste essentiellement en l'adaptation des techniques et résultats utilisés dans la preuve du lemme 3.3.8.

Pour tout  $R > 0$ , on conserve la notation  $l_R$  pour la longueur de la plus longue sous-suite monotone associée au processus de Poisson  $\xi$  (voir par exemple le paragraphe 1 de la preuve du lemme 3.3.8). On note  $\tilde{l}_R^d$  la quantité semblable associée au processus spatialement  $d$ -périodique  $\tilde{\xi}_d$  (on ordonne les points de  $\tilde{\xi}_d \cap [-R, R] \times [0, T]$  comme dans la définition de  $\tilde{\xi}_d \cdot \tilde{\chi}_d$ ). Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 3.2.4, on obtient que la famille de mesures  $(m_{\tilde{\chi}_d})_d$  est uniformément intégrable. Par conséquent, cette famille vérifie les hypothèses du lemme 3.3.8. En modifiant très légèrement le début de la preuve de ce lemme, on obtient l'existence d'une fonction  $R_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout  $d \geq 1$ , l'événement suivant est réalisé avec une probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$  :

$$\forall R \geq R_\varepsilon(Q), \quad l_R \leq \frac{1}{3} \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [Q, R]) \text{ et } l_R \leq \frac{1}{3} \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [-R, -Q]). \quad (3.19)$$

2. La fonction  $Q \mapsto R_\varepsilon(Q)/Q$  converge vers 1 quand  $Q$  tend vers l'infini.

Soit  $Q > 0$ . En reprenant le résultat obtenu dans le paragraphe 1) de la preuve du lemme 3.3.8, on obtient l'existence d'un entier  $d_0 \geq 2R_\varepsilon(Q)$ , que l'on fixe, vérifiant la relation suivante :

3. L'événement suivant est réalisé avec une probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$  :

$$\forall d \geq d_0, \quad l_{d/2} \leq d/6 \quad (3.20)$$

Considérons maintenant  $d \geq d_0$  et  $R \geq R_\varepsilon(Q)$ . Montrons que sur l'intersection  $A$  des événements décrits en (3.19) et (3.20) l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\tilde{l}_R^d \leq \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [Q, R]).$$

Le cas  $R < d/2$  est trivial du fait de l'égalité  $\tilde{l}_R^d = l_R$  et de la relation (3.19). Supposons maintenant  $d/2 \leq R < 3d/2$ . En exploitant la périodicité spatiale de  $\tilde{\xi}_d$  et la relation (3.19) on obtient l'inégalité recherchée par la chaîne d'inégalités suivante :

$$\tilde{l}_R^d \leq 3l_{d/2} \leq \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [Q, d/2]) \leq \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [Q, R]).$$

Supposons enfin  $R \geq 3d/2$  et notons  $k$  l'unique entier tel que l'inégalité  $d/2 + kd \leq R < d/2 + (k+1)d$  soit vérifiée. On obtient alors, en exploitant la périodicité spatiale de  $\tilde{\chi}_d$  et la propriété (3.20) les inégalités :

$$\tilde{l}_R^d \leq (2k+3)l_{d/2} \leq (2k+3)d/6.$$

Par ailleurs, en exploitant le fait que  $\tilde{\chi}_d$  possède  $d$  points dans tout intervalle semi-ouvert de longueur  $d$  et en utilisant les inégalités  $2Q \leq d_0 \leq d$  on obtient :

$$\text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [Q, R]) \geq \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [d/2, d/2 + kd]) = kd.$$

L'inégalité recherchée se déduit des deux relations précédemment écrites. On obtient similairement que, toujours pour  $d \geq d_0$  et  $R \geq R_\varepsilon(Q)$ , l'inégalité

$$\tilde{l}_R^d \leq \text{card}(\tilde{\chi}_d \cap [-R, -Q])$$

est vérifiée sur l'événement  $A$ . Comme la probabilité de l'événement  $A$  est minorée par  $1 - 2\varepsilon$ , on en déduit comme dans la preuve du lemme 3.3.8 que la propriété suivante est vérifiée :

4. Pour tout  $Q > 0$ , il existe  $d_0$  tel que la probabilité  $P(B_Q^{R_\varepsilon(Q)})$  de l'événement  $B_Q^{R_\varepsilon(Q)}$  associée au processus  $\tilde{\chi}_d$  est minorée par  $1 - 2\varepsilon$  pour  $d \geq d_0$ .

Le lemme maintenant se déduit des propriétés 2 et 4 par des arguments identiques à ceux utilisés dans la preuve du lemme 3.3.8.  $\square$

Nous aurons également besoin du résultat élémentaire suivant :

**Lemme 3.3.12** *Soit  $\Lambda$  une configuration multiple. On suppose que  $\Lambda$  possède une densité inférieure strictement positive à gauche et à droite. Soit  $x$  la position d'une particule de  $\Lambda$ . Alors, presque sûrement, l'une des particules de  $\Lambda$  initialement en  $x$  bouge au cours de la dynamique.*

**Preuve :** Notons  $y$  la position de la particule de  $\Lambda$  immédiatement (strictement) à droite de  $x$ . On vérifie qu'il existe p.s. un point  $(u, t)$  du processus de Poisson  $\xi$  vérifiant  $0 < u - x < (y - x)/2$  et  $\xi \cap [x, 2u - x] \times [0, t] = \emptyset$ . L'une des particules initialement en  $x$  a nécessairement bougé avant l'instant  $t$ . Plus précisément, si aucune des particules initialement en  $x$  n'a bougé strictement avant l'instant  $t$ , l'une d'entre elles bouge nécessairement avec le point  $(u, t)$ .  $\square$

**Lemme 3.3.13** *Soit  $\rho > 0$ . Il existe un processus simple, intégrable, stationnaire, invariant par la dynamique et de densité p.s.  $\rho$ .*

**Preuve :** Pour tout  $d \geq 1$ , le processus  $\widetilde{\chi}_d$ , défini par (3.16), est stationnaire, intégrable et admet la mesure de Lebesgue pour intensité. On en déduit l'existence d'une suite  $d_n$  tendant vers l'infini telle que  $\widetilde{\chi}_{d_n}$  converge en loi vers un processus que l'on note  $\chi$ .

Soit  $T > 0$ . Grâce au lemme 3.2.4, nous savons que, pour tout  $n$ , l'intégrale du cube de l'écart entre deux points du processus  $\widetilde{\chi}_{d_n}$  est majorée par  $3/2$ . Ainsi, par le lemme 3.3.10, on sait que  $\chi$  admet p.s. une densité strictement positive, que  $\xi_T \cdot \chi$  a un sens et que  $\xi_T \cdot \widetilde{\chi}_{d_n}$  converge en loi vers  $\xi_T \cdot \chi$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et à support compact. Pour toute fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée on a, par le lemme 3.3.11, la convergence de

$$|E(H(\widetilde{\chi_d}(f))) - E(H(\xi_T \cdot \widetilde{\chi_d}(f)))|$$

vers 0 quand  $d$  tend vers l'infini. Or, d'une part  $\widetilde{\chi_{d_n}}$  converge en loi vers  $\chi$  et d'autre part,  $\xi_T \cdot \widetilde{\chi_{d_n}}$  converge en loi vers  $\xi_T \cdot \chi$ . On en déduit l'égalité

$$E(H(\chi(f))) = E(H(\xi_T \cdot \chi(f))).$$

Les deux processus  $\chi$  et  $\xi_T \cdot \chi$  ont donc la même loi.

Le processus  $\chi$  est nécessairement simple. Pour prouver cela, considérons  $\chi$  comme une configuration initiale et faisons le évoluer suivant la dynamique que l'on considère. Pour tout  $T \geq 0$ , notons  $N_T$  le nombre de particules de  $\chi_T \cap [0, 1]$  diminué du nombre de sites occupés par des particules de  $\chi_T \cap [0, 1]$ . Raisonnons presque sûrement. Supposons qu'il existe un point de  $[0, 1]$  en lequel  $\chi_0$  possède plusieurs particules. Notons  $x$  l'un de ces points. La dynamique ne pouvant amener une particule en une position où une particule est déjà située, le lemme 3.3.12 appliqué à la configuration  $\chi_0$  et au point  $x$  nous permet de conclure qu'il existe un entier  $T > 0$  pour lequel l'inégalité  $N_T < N_0$ . Comme, d'une manière générale, la fonction  $t \mapsto N_t$  est décroissante (au sens large), si  $\chi_0$  possédait des particules multiples dans  $[0, 1]$  avec une probabilité positive, on conclurait à l'existence d'un temps  $T$  (déterministe) vérifiant  $E(N_T) < E(N_0)$ , ce qui contredirait l'invariance en loi de  $\chi$  par la dynamique. Le processus  $\chi$  est donc bien p.s. simple.

En se limitant à l'événement presque sûre sur lequel  $\chi$  admet une densité, et en conditionnant par cette densité, on obtient au moins une loi stationnaire, invariante par la dynamique et pour laquelle le processus ponctuel admet p.s. une certaine densité non nulle et est donc intégrable. Par homothétie, on obtient, pour tout  $\rho > 0$ , un processus ponctuel multiple stationnaire, invariant par la dynamique et de densité  $\rho$ .  $\square$

Nous nous intéressons maintenant à des questions d'unicité. Prouvons tout d'abord le lemme suivant.

**Lemme 3.3.14** *Soit  $\chi_0$  et  $\phi_0$  deux processus ponctuels simples, intégrables et invariants par les translations et par la dynamique. On suppose qu'ils ont tous deux p.s. une densité strictement positive. On couple ces deux processus en les faisant évoluer selon le même processus de poisson  $\xi$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on note  $\chi_t$  et  $\phi_t$  la valeur des deux processus au temps  $t$ . Soit  $a_n$  une suite de réels positifs tendant vers l'infini. On suppose que le produit  $(\chi_{a_n}, \phi_{a_n})$  converge en loi vers un produit que l'on note  $(\chi_\infty, \phi_\infty)$ . On a alors la convergence suivante :*

$$E(\text{card}(\chi_{a_n} \cap \phi_{a_n} \cap [0, 1])) \rightarrow E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1])).$$

**Preuve :** Pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et tout couple de configurations simples  $(\Lambda, \Lambda')$  on note  $A_I(\Lambda, \Lambda')$  la configuration constituée des particules  $x$  de  $\Lambda$  pour lesquelles il existe une particule  $y$  de  $\Lambda'$  vérifiant  $|x - y| \in I$ . Autrement dit, on pose :

$$A_I(\Lambda, \Lambda') = \Lambda \cap \left( (\Lambda' + I) \cup (\Lambda' - I) \right).$$

**Affirmation :** Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $T > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que, pour tout  $S \geq T$ , on ait  $E(\text{card}(A_{[0,\alpha]}(\chi_S, \phi_S) \cap [0, 1])) \leq \varepsilon$ .

Prouvons cette affirmation. Soient  $S \geq T > 0$  et  $\alpha > 0$ . Notons  $B_{S-T,S}$  la configuration constituée de l'ensemble des particules de  $\chi_S$  qui n'ont pas bougé pendant l'intervalle de temps  $[S-T, S]$ . Notons  $C_{S-T,S,\alpha}$  l'ensemble des points  $(a, U)$  de la restriction du processus de Poisson  $\xi$  à l'ensemble  $\mathbb{R} \times [S-T, S]$  vérifiant l'une des conditions suivantes :

1. Il existe un point  $(b, V)$  distincts de  $(a, U)$  appartenant à la restriction de  $\xi$  à l'ensemble  $\mathbb{R} \times [S-T, S]$  tel que  $|a - b|$  soit inférieur à  $\alpha$  ;
2. Il existe une particule  $b$  de  $\phi_{S-T}$  telle que  $|a - b|$  soit inférieure à  $\alpha$ .

Considérons (s'il en existe) une particule  $x$  appartenant à  $A_{[0,\alpha]}(\chi_S, \phi_S)$  mais pas à  $B_{S-T,S}$ . Notons  $(x, U)$  le point de  $\xi$  responsable du dernier déplacement de  $x$  (en tant que particule de  $\chi_S$ ). Le point  $U$  appartient à  $[S-T, S]$ . En distinguant les différents cas possibles, on constate que  $x$  appartient à  $\pi_1(C_{S-T,S,\alpha})$  où  $\pi_1$  désigne la projection sur la première coordonnée. On a donc

$$A_{[0,\alpha]}(\chi_S, \phi_S) \subset B_{S-T,S} \cup \pi_1(C_{S-T,S,\alpha}).$$

Remarquons que le cardinal de l'intersection de  $B_{0,T}$  et de  $[0, 1]$  tend p.s. vers 0 quand  $T$  tend vers l'infini. Cela découle du lemme 3.3.12. Comme ce cardinal est majoré par la quantité intégrable  $\text{card}(\chi_0 \cap [0, 1])$ , on obtient l'existence de  $T > 0$  tel que  $E(\text{card}(B_{0,T} \cap [0, 1]))$  soit inférieur  $\varepsilon/2$ . Fixons un tel  $T$ . Par stationnarité, on a, pour tout  $S \geq T$ , l'inégalité  $E(\text{card}(B_{S-T,S} \cap [0, 1])) \leq \varepsilon/2$ .

Comme le cardinal de  $\pi_1(C_{0,T,\alpha}) \cap [0, 1]$  tend p.s. vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0 et comme ce cardinal est dominé par la quantité intégrable  $\text{card}(\xi \cap [0, 1] \times [0, T])$ , on obtient l'existence de  $\alpha > 0$  pour lequel l'espérance de  $\text{card}(\pi_1(C_{0,T,\alpha}) \cap [0, 1])$  est majoré par  $\varepsilon/2$ . Ici encore, par stationnarité, cette majoration est également valide pour la quantité  $E(\text{card}(\pi_1(C_{S-T,S,\alpha}) \cap [0, 1]))$ , pour tout réel  $S \geq T$ . La conclusion de l'affirmation est vérifiée pour un tel  $T$  et un tel  $\alpha$ , ce qui conclut la preuve de cette affirmation.

Montrons maintenant comment on peut en déduire le lemme. Tout d'abord, quitte à changer d'espace de probabilité, on peut, sans changer la loi de chacun des couples en jeu, supposer que  $(\chi_{a_n}, \phi_{a_n})$  converge simplement vers  $(\chi_\infty, \phi_\infty)$ . Soit  $\alpha > 0$ . Presque sûrement, pour  $n$  suffisamment grand, on a la minoration suivante :

$$\text{card}(A_{[0,\alpha]}(\chi_\infty, \phi_\infty) \cap [0, 1]) \geq \text{card}(\chi_{a_n} \cap \phi_{a_n} \cap [0, 1]).$$

On en déduit

$$E(\text{card}(A_{[0,\alpha]}(\chi_\infty, \phi_\infty) \cap [0, 1])) \geq \limsup E(\text{card}(\chi_{a_n} \cap \phi_{a_n} \cap [0, 1])).$$

En faisant tendre  $\alpha$  vers 0 on obtient

$$E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1])) \geq \limsup E(\text{card}(\chi_{a_n} \cap \phi_{a_n} \cap [0, 1])).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha$  suffisamment petit pour que les conclusions de l'affirmation soient vérifiées. Presque sûrement, pour  $n$  suffisamment grand, on a

$$\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1]) \leq \text{card}(A_{[0,\alpha]}(\chi_{a_n}, \phi_{a_n}) \cap [0, 1]).$$

On en déduit

$$E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1])) \leq \liminf E(\text{card}(A_{[0, \alpha]}(\chi_{a_n}, \phi_{a_n}) \cap [0, 1]))$$

et donc

$$E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1])) \leq \liminf E(\text{card}(\chi_{a_n} \cap \phi_{a_n} \cap [0, 1])) + \varepsilon.$$

Il reste à faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour obtenir la relation qui nous manquait pour établir le lemme.  $\square$

**Lemme 3.3.15** *Soit  $\rho > 0$ . Il existe une unique loi de processus ponctuel simple, intégrable, invariant par les translations et par la dynamique et de densité p.s.  $\rho$ .*

**Preuve :** Le lemme 3.3.13 nous fournit l'existence d'un processus  $\chi_0$  satisfaisant les conditions de l'énoncé. Soit  $\phi_0$  un deuxième processus satisfaisant ces conditions. Il nous reste à montrer que les deux processus  $\chi_0$  et  $\phi_0$  admettent la même loi. Pour cela, nous couplons ces deux processus en les faisant évoluer selon le même processus de poisson  $\xi$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on note  $\chi_t$  et  $\phi_t$  la valeur des deux processus au temps  $t$  ( $\chi_t = \xi_t \cdot \chi_0$  et  $\phi_t = \xi_t \cdot \phi_0$ ).

Pour tout  $t \geq 0$ , chacun des deux processus admet pour intensité la mesure  $\rho dx$  (voir la preuve du lemme 3.3.5). Ainsi, pour tout  $A, B > 0$ , nous avons, en appliquant l'inégalité de Tchebichev :

$$\forall t \geq 0, \quad P\left(\text{card}(\chi_t \cap [-A, A]) > B \text{ ou } \text{card}(\phi_t \cap [-A, A]) > B\right) \leq 4A\rho/B. \quad (3.21)$$

Nous adaptons la preuve du lemme 4.5 de [35] pour prouver la relative compacité de la famille  $(\chi_t, \phi_t)_t$  pour la convergence en loi. Soit  $\varepsilon > 0$ . La propriété (3.21) nous permet de choisir, pour tout entier  $n \geq 1$ , un réel  $b_n$  tel que la propriété

$$\forall t \geq 0, \quad P\left(\text{card}(\chi_t \cap [-n, n]) > b_n \text{ ou } \text{card}(\phi_t \cap [-n, n]) > b_n\right) \leq \varepsilon 2^{-n}$$

soit vérifiée. Notons  $K$  l'ensemble

$$K = \{\Lambda \in \mathcal{M}_\sigma^m : \forall n \geq 1, \text{card}(\Lambda \cap [-n, n]) \leq b_n\}.$$

Cet ensemble est relativement compact (voir [35], 15.7.5) D'après ce qui précède, pour tout  $t \geq 0$ , le couple  $(\chi_t, \phi_t)$  appartient au compact  $\overline{K} \times \overline{K}$  avec une probabilité minorée par  $1 - \varepsilon$ . Cela prouve la tension de la famille, et donc sa relative compacité. Fixons alors  $(t_n)_n$  une suite tendant vers l'infini telle que la suite de processus  $(\chi_{t_n}, \phi_{t_n})_n$  converge en loi. Notons  $(\chi_\infty, \phi_\infty)$  une v.a. admettant pour loi cette loi limite.

Remarquons que la fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $t$  associe  $E(\text{card}(\chi_t \cap \phi_t \cap [0, 1]))$  est croissante et majorée par  $E(\text{card}(\chi_0 \cap [0, 1])) = \rho$ . Elle admet donc une limite finie. Notons  $\lambda$  cette limite. Par le lemme 3.3.14, nous obtenons

$$\lambda = E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1])).$$

Nous allons montrer l'égalité  $\lambda = \rho$ . Cela conclura la preuve du lemme. Supposons en effet cette égalité prouvée. De l'inclusion de  $\chi_\infty \cap \phi_\infty$  dans  $\chi_\infty$  et des égalités  $E(\text{card}(\chi_\infty \cap$

$[0, 1]) = \rho = \lambda = E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1]))$  on déduit  $E(\text{card}((\chi_\infty \setminus \phi_\infty) \cap [0, 1])) = 0$  et donc l'inclusion p.s. de  $\chi_\infty$  dans  $\phi_\infty$ . L'inclusion p.s. réciproque étant symétriquement vérifiée, on dispose de l'égalité p.s. des deux processus  $\chi_\infty$  et  $\phi_\infty$ , et donc de l'égalité en loi des deux processus  $\chi_0$  et  $\phi_0$ .

Prouvons donc l'égalité  $\lambda = \rho$ . Vérifions tout d'abord la convergence en loi de la suite  $(\chi_{t_n+1}, \phi_{t_n+1})_n$  vers  $(\zeta_1 \cdot \chi_\infty, \zeta_1 \cdot \phi_\infty)$  où  $\zeta$  est un processus de Poisson indépendant sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  admettant la mesure de Lebesgue pour intensité. Considérons, sur un nouvel espace de probabilité, une suite de variables aléatoires  $(\tilde{\chi}_{t_n}, \tilde{\phi}_{t_n})$ , de mêmes lois que  $(\chi_{t_n}, \phi_{t_n})$ , convergeant simplement vers une limite  $(\tilde{\chi}_\infty, \tilde{\phi}_\infty)$ , de même loi que  $(\chi_\infty, \phi_\infty)$ . On a donc la convergence simple de  $\tilde{\chi}_{t_n}$  vers  $\tilde{\chi}_\infty$ . Par le lemme 3.3.10, on obtient la convergence en probabilité de  $\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\chi}_{t_n}$  vers  $\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\chi}_\infty$  où  $\tilde{\zeta}$  est un processus de Poisson indépendant sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  admettant la mesure de Lebesgue pour intensité. On vérifie de même la convergence en probabilité de  $\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\phi}_{t_n}$  vers  $\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\phi}_\infty$ . De ces deux convergences, on déduit la convergence en probabilité de la suite de couples  $(\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\chi}_{t_n}, \tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\phi}_{t_n})$  vers le couple  $(\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\chi}_\infty, \tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\phi}_\infty)$ . On a donc la convergence en loi de  $(\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\chi}_{t_n}, \tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\phi}_{t_n})$  vers  $(\tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\chi}_\infty, \tilde{\zeta}_1 \cdot \tilde{\phi}_\infty)$ , c'est-à-dire la convergence en loi de  $(\chi_{t_n+1}, \phi_{t_n+1})$  vers  $(\zeta_1 \cdot \chi_\infty, \zeta_1 \cdot \phi_\infty)$ . Le lemme 3.3.14 nous donne alors la convergence de

$$E(\text{card}(\chi_{t_n+1} \cap \phi_{t_n+1} \cap [0, 1]))$$

vers

$$E(\text{card}(\zeta_1 \cdot \chi_\infty \cap \zeta_1 \cdot \phi_\infty \cap [0, 1])).$$

Comme  $E(\text{card}(\chi_{t_n+1} \cap \phi_{t_n+1} \cap [0, 1]))$  converge vers  $\lambda$ , on obtient finalement

$$E(\text{card}(\zeta_1 \cdot \chi_\infty \cap \zeta_1 \cdot \phi_\infty \cap [0, 1])) = \lambda.$$

Par hypothèse, le processus  $\chi_0$  admet p.s.  $\rho$  pour densité. Il en est donc de même du processus  $\chi_\infty$ , qui admet la même loi que  $\chi_0$ . Similairement,  $\phi_\infty$  admet p.s.  $\rho$  pour densité. Le processus  $\chi_\infty \cap \phi_\infty$  admet p.s. une densité. L'espérance de sa densité est  $\lambda$ . Supposons que  $\lambda$  est strictement inférieur à  $\rho$ . Alors le processus  $\chi_\infty \cap \phi_\infty$  admet une densité strictement inférieure à  $\rho$  avec une probabilité strictement positive. Les deux processus  $\chi_\infty \setminus \phi_\infty$  et  $\phi_\infty \setminus \chi_\infty$  admettent donc simultanément une densité strictement positive avec une probabilité non nulle. Comme cela entraîne  $E(\text{card}(\zeta_1 \cdot \chi_\infty \cap \zeta_1 \cdot \phi_\infty \cap [0, 1])) > E(\text{card}(\chi_\infty \cap \phi_\infty \cap [0, 1]))$  et que cela contredit le fait que ces deux espérances valent  $\lambda$ , on en déduit que  $\lambda$  est égal  $\rho$ , ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

## 3.4 Appendice : simulations

Nous présentons dans cette section quelques résultats de simulations réalisées sous Matlab dans le cas d'un nombre fini de particules distribuées sur le cercle. Fixons une suite  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de v.a.i.i.d. uniformes sur le cercle et une configuration initiale  $\xi \in \mathcal{C}_d$  dont les  $d$  particules sont distribuées indépendamment et uniformément sur le cercle. Pour simuler un échantillon dont la distribution approche celle de la loi stationnaire, nous avons repris les idées de la preuve de la proposition 3.1.1.

Dans le cas  $d = 3$ , nous avons simulé un échantillon  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{10^5}$  de  $\phi(\xi, U_{100}, \dots, U_0)$  et un échantillon  $\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{10^5}$  de  $\phi(\xi, U_{50}, \dots, U_0)$  (en utilisant les mêmes réalisations de  $\xi$  et des  $U_i$  pour les deux échantillons). L'égalité  $\Lambda_i = \Lambda'_i$  était vérifiée pour une fraction

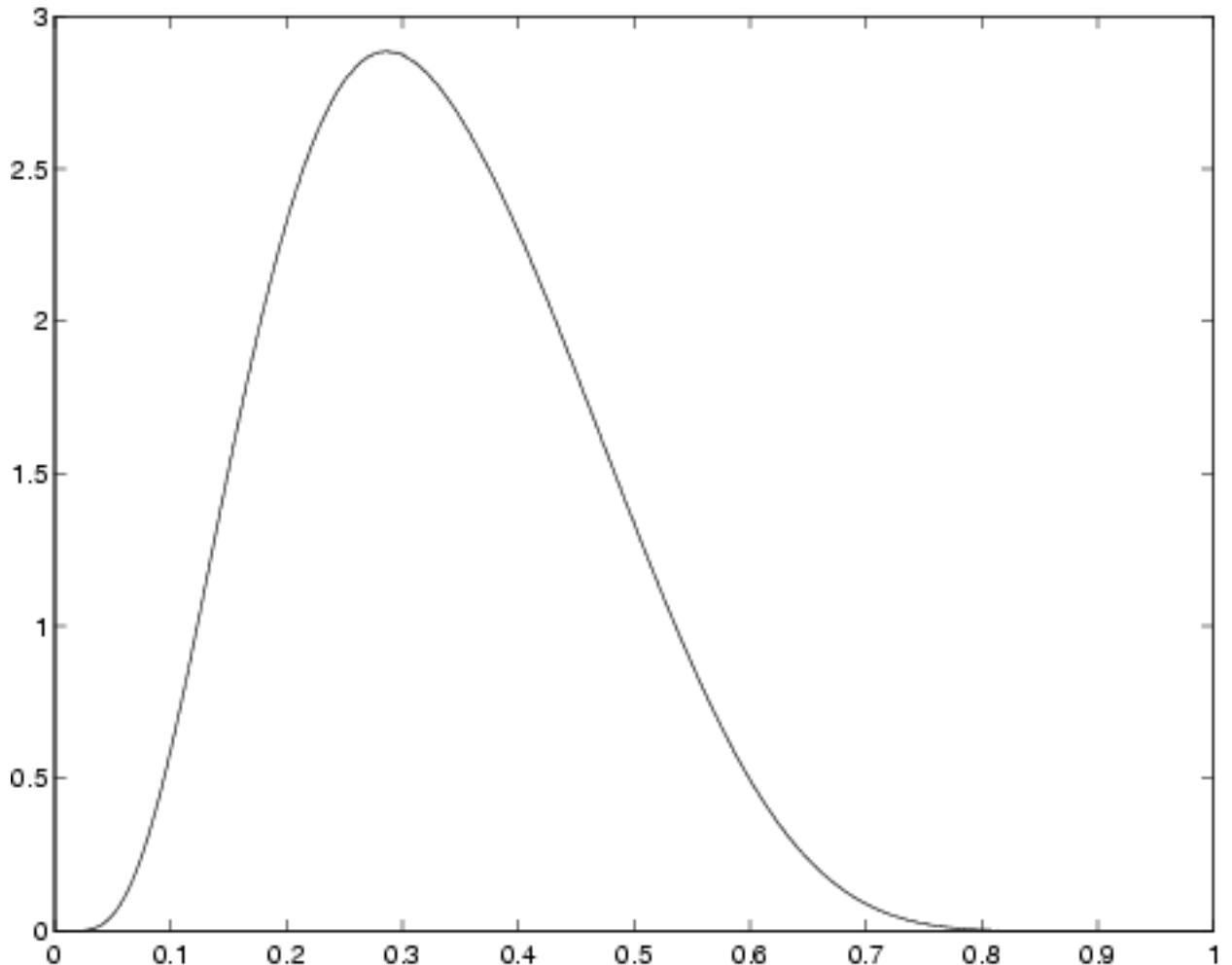


FIG. 3.1 – Densité empirique de  $X$  pour  $d = 3$

supérieure à 0.999 des indices. Nous avons pris l'échantillon  $\Lambda$  comme loi initiale, avons effectué 15000 pas de la dynamique et avons considérés l'ensemble des  $10^5 * 15000$  réalisations ainsi obtenus pour obtenir une approximation de la loi stationnaire. La figure 3.1 représente la densité empirique de la distance  $X$  entre deux particules successives. La figure 3.2 représente la densité empirique du couple  $(X, Y)$  où  $X$  et  $Y$  sont les longueurs de deux intervalles successifs.

Dans le cas  $d = 6$ , nous avons adopté la même démarche, simulant tout d'abord un échantillon de taille  $10^5$  de  $\phi(\xi, U_{600}, \dots, U_0)$  et de  $\phi(\xi, U_{400}, \dots, U_0)$ , observant une coïncidence entre les deux réalisations pour une fraction supérieure à 0.999 des indices. Nous avons ensuite effectué  $10^4$  pas à partir du premier échantillon pour obtenir un échantillon de taille  $10^9$ . La figure 3.3 représente la densité empirique de la distance  $X$  entre deux particules successives.

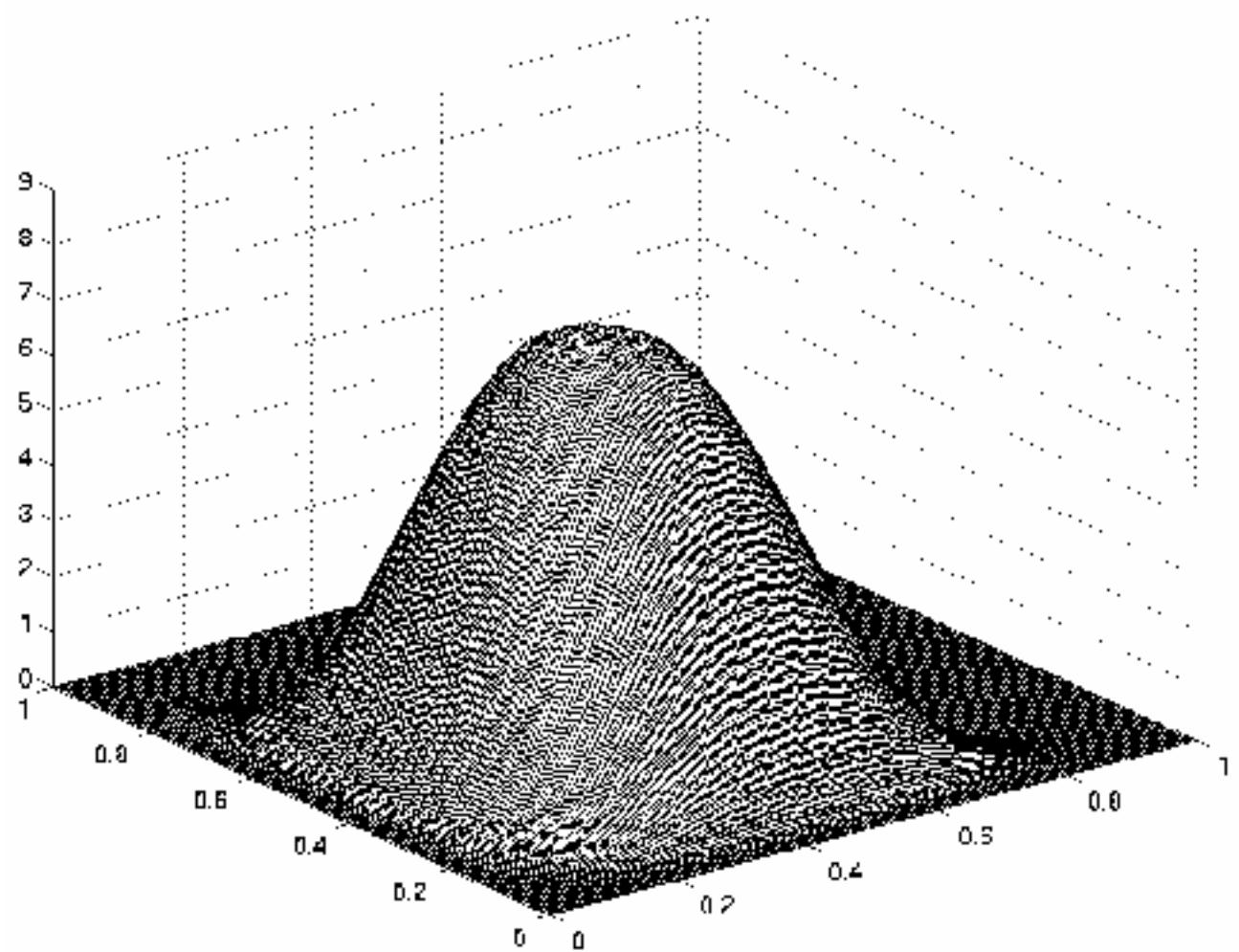


FIG. 3.2 – Densité empirique de  $(X, Y)$  pour  $d = 3$

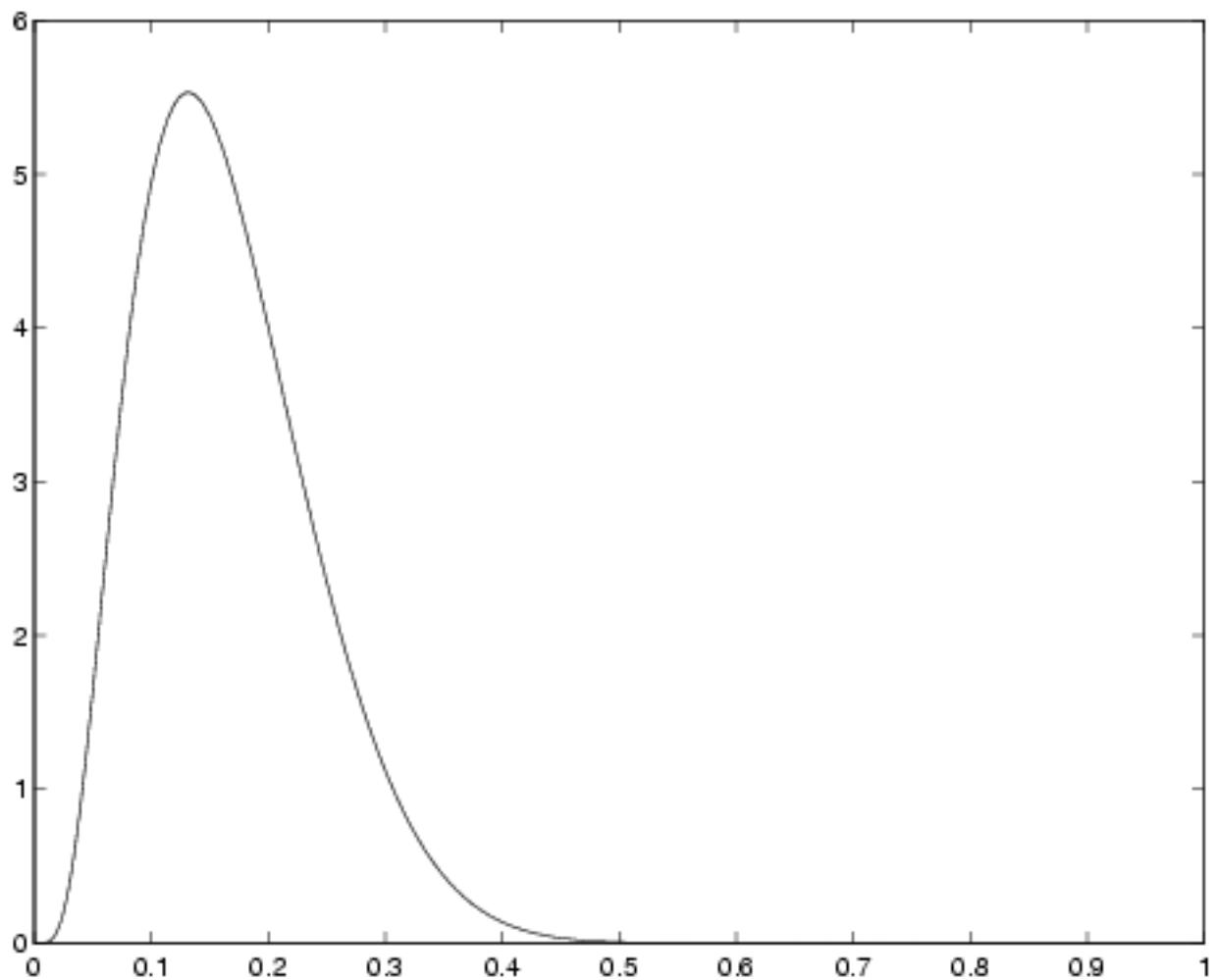


FIG. 3.3 – Densité empirique de  $X$  pour  $d = 6$

# Chapitre 4

## Annexes

### 4.1 Diffraction d'un processus de renouvellement

Les résultats démontrés dans cette section sont très vraisemblablement connus, mais nous ne connaissons pas de références.

Soit  $\mu$  une loi sur  $]0, \infty[$ . On suppose que  $m := \int x d\mu(x)$  est fini. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite i.i.d de variables aléatoires de loi  $\mu$ . Posons pour  $n$  positif  $T_n := X_1 + \dots + X_n$  et  $T_{-n} := -X_{-1} - \dots - X_{-n}$ . On considère dans cette section le processus ponctuel  $\chi$  défini par  $\chi = \cup_{n \in \mathbb{Z}} T_n$ . Remarquons que, quitte à se restreindre à un événement presque sûr, la loi des grands nombres assure que  $\chi$  est bien localement fini. On prouve le résultat suivant.

**Proposition 4.1.1** *Le processus  $\chi$  admet presque sûrement l'autocorrélation*

$$\gamma = \frac{1}{m} \left( \sum_{n \geq 1} \mu^{*n} + \sum_{n \geq 1} \check{\mu}^{*n} + \delta_0 \right) \quad (4.1)$$

où  $\check{\mu}$  est la mesure inversée :  $\check{\mu}(C) = \mu(-C)$ . Supposons maintenant que  $\chi$  admet un moment d'ordre 2. Si  $\mu$  est non arithmétique, posons  $A = \{0\}$ . Sinon, le groupe engendré par le support de  $\mu$  s'écrit  $\frac{1}{\alpha} \mathbb{Z}$  avec  $\alpha > 0$  et on pose dans ce cas  $A = \alpha \mathbb{Z}$ . L'intensité de diffraction est alors donnée par

$$\widehat{\gamma} = \frac{1}{m} \frac{1 - |\widehat{\mu}|^2}{|1 - \widehat{\mu}|^2} dx + \frac{1}{m^2} \sum_{x \in A} \delta_x. \quad (4.2)$$

Nous pourrions considérer une version stationnaire de ce processus et appliquer le théorème 1.1.1 pour obtenir l'existence et l'expression de la mesure d'autocorrélation. Il est cependant plus élémentaire de raisonner directement. La preuve découle des lemmes suivants.

**Lemme 4.1.2** *Le processus  $\chi$  admet presque sûrement l'autocorrélation  $\gamma$  définie par (4.1).*

**Preuve :** Remarquons tout d'abord que la mesure  $\gamma$  est localement finie, c'est un résultat classique en théorie du renouvellement. Soit  $C$  un borélien borné de  $\mathbb{R}$ . Notons

$$\gamma_R(C) = \frac{1}{2R} \sum_{x,y \in \chi \cap [-R,R]} 1_C(x-y).$$

Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que  $\gamma_R(C)$  converge presque sûrement vers  $\gamma(C)$ . D'après le lemme 1.2.3, il suffit en fait de prouver la convergence presque sûre de

$$b_R := \frac{1}{2R} \sum_{x \in \chi \cap [-R,R]} \text{card}[(\chi - x) \cap C]$$

vers  $\gamma(C)$ . Introduisons, pour  $p$  et  $q$  deux entiers positifs,

$$\tilde{b}_{p,q} := \frac{1}{p+q+1} \sum_{n=-p, \dots, q} \text{card}[(\chi - T_n) \cap C].$$

Remarquons la relation

$$b_R = \frac{p(R) + q(R) + 1}{2R} \tilde{b}_{p(R),q(R)}.$$

où

$$p(R) := \max\{n : T_{-n} \in [-R, R]\} \text{ et } q(R) := \max\{n : T_n \in [-R, R]\}.$$

Comme  $p(R)$  et  $q(R)$  sont tous deux équivalents à  $R/EX$  quand  $R$  tend vers l'infini, il suffit pour conclure de montrer que  $\tilde{b}_{p,q}$  converge vers  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu^{*n}(C)$  quand  $p$  et  $q$  convergent vers l'infini. Mais c'est une conséquence immédiate de l'érgodicité de  $\left( \text{card}[(\chi - T_n) \cap C] \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ .  $\square$

**Lemme 4.1.3** *Si  $\mu$  admet un moment d'ordre 2, l'autocorrélation  $\gamma$  donnée par (4.1) admet la transformée de Fourier donnée par (4.2).*

**Preuve :** Le lemme est une conséquence directe de la formule sommatoire de Poisson dans le cas où  $\mu$  est un Dirac. Nous supposons dorénavant ne pas nous trouver dans ce cas. Dans toute cette preuve,  $X$  désignera une variable aléatoire de loi  $\mu$ .

- Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans lui-même appartenant à la classe de Schwartz. On veut montrer

$$\widehat{\sigma}(f) = \lambda(f) \tag{4.3}$$

où

$$\sigma = m\gamma = \sum_{n \geq 1} \mu^{*n} + \sum_{n \geq 1} \check{\mu}^{*n} + \delta_0$$

et

$$\lambda = \frac{1 - |\widehat{\mu}|^2}{|1 - \widehat{\mu}|^2} dx + \frac{1}{m} \sum_{x \in A} \delta_x.$$

On a

$$\widehat{\sigma}(f) = \sigma(\widehat{f}) = \sum_{n \geq 1} \mu^{*n}(\widehat{f}) + \sum_{n \geq 1} \check{\mu}^{*n}(\widehat{f}) + \delta_0(\widehat{f})$$

où les dernières sommes sont absolument convergentes. En évaluant terme à terme et en exploitant le fait que  $f$  est à valeurs réelles, on obtient

$$\widehat{\sigma}(f) = \sum_{n \geq 1} \int f \widehat{\mu}^n + \overline{\sum_{n \geq 1} \int f \widehat{\mu}^n} + \int f.$$

Pour simplifier l'écriture par la suite, écrivons plutôt

$$\widehat{\sigma}(f) = \nu(f) + \overline{\nu(f)} - \int f \quad (4.4)$$

où

$$\nu(f) = \sum_{n \geq 0} \int f \widehat{\mu}^n.$$

- Dans l'évaluation de cette somme interviennent les deux ensembles

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid \widehat{\mu}(t) = 1\}$$

et

$$B = \{t \in \mathbb{R} \mid |\widehat{\mu}(t)| = 1\}.$$

L'ensemble  $B$  est aussi l'ensemble des  $t$  tels que  $tX$  est p.s. constant modulo  $\mathbb{Z}$ . C'est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ . Supposons  $B = \mathbb{R}$ . Il existe alors une suite  $(a_n)$  telle que  $X/n \in a_n + \mathbb{Z}$  p.s. On peut imposer  $a_n \in [-1/2, 1/2[$ . Sur l'événement  $\{X < n/2\}$  on a alors  $X/n = a_n$  p.s. On en déduit que  $X$  est constant, cas qui a été exclu.  $B$  est donc un sous-groupe de la forme  $\beta\mathbb{Z}$  pour un réel  $\beta$  positif.

La relation  $t \in A$  s'écrit  $tX \in \mathbb{Z}$  p.s. Si  $X$  est non arithmétique, on a donc  $A = \{0\}$ . Dans le cas arithmétique, la relation équivaut à  $tS \subset \mathbb{Z}$ , en notant  $S$  le groupe engendré par le support de  $\mu$ . Si l'on écrit  $S = 1/\alpha\mathbb{Z}$  on a donc  $A = \alpha\mathbb{Z}$  (c'est le même ensemble  $A$  que dans l'énoncé de la proposition 4.1).

- On peut supposer que  $f$  est à support compact. Comme  $B$  est localement fini et comme  $A$  est inclus dans  $B$ , on peut, par linéarité, supposer que l'on se trouve dans l'un des trois cas suivants :

- $\text{supp } f \cap B = \emptyset$ ;
- $\text{supp } f \cap B = \{x_0\}$  et  $\text{supp } f \cap A = \emptyset$ ;
- $\text{supp } f \cap A = \{x_0\}$ .

Pour traiter le premier cas, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée. En effet, l'application  $t \mapsto |1 - \widehat{\mu}(t)|$  est continue et ne s'annule pas sur le support de  $f$ . Il existe donc une constante  $c > 0$  telle que  $|1 - \widehat{\mu}(t)| \geq c$  pour  $t$  appartenant au support de  $f$ . Par conséquent, pour tout entier  $n$ ,

$$\left| \sum_{k=0}^n f \widehat{\mu}^k \right| \leq \frac{2|f|}{c}.$$

L'intégrabilité de cette fonction assure alors, en passant à la limite,

$$\nu(f) = \int \frac{f}{1 - \widehat{\mu}}$$

( $|\widehat{\mu}(t)| < 1$  sur le support de  $f$ ). On obtient alors la relation (4.3).

Le deuxième cas se traite de la même façon après avoir remarqué que l'on ne changeait pas la valeur des intégrales en jeu en posant par exemple  $\widehat{\mu}(t) = 0$  pour  $t \in B$ .

Il nous reste à traiter le troisième cas. Si le point  $x_0$  de  $A \cap \text{supp } f$  n'est pas l'origine alors, de la relation  $x_0 X \in \mathbb{Z}$  p.s., on déduit la  $x_0$ -périodicité de  $\widehat{\mu}$ . En notant  $T_{x_0}$  la translation de vecteur  $x_0$ , on obtient alors  $\widehat{\sigma}(f \circ T_{x_0}) = \widehat{\sigma}(f)$  (regarder (4.4)) et  $\lambda(f \circ T_{x_0}) = \lambda(f)$ . Il suffit donc de traiter le cas où  $x_0 = 0$ .

Considérons une fonction pour laquelle nous pouvons estimer les intégrales en jeu :

$$g = 1_{[-a,a]} \frac{\widehat{\mu}'}{2i\pi EX}$$

où  $a$  est tel que  $[-a, a] \cap A = \{0\}$ . Cette fonction vaut 1 en l'origine.

$$\int f \widehat{\mu}^n = \int [f - f(0)g] \widehat{\mu}^n + f(0) \int g \widehat{\mu}^n.$$

Le facteur de  $f(0)$  à droite se calcule et vaut

$$\frac{1}{2i\pi EX} \frac{1}{n+1} [\widehat{\mu}(a)^{n+1} - \widehat{\mu}(-a)^{n+1}].$$

Ainsi, en exploitant  $|\widehat{\mu}(\pm a)| < 1$ , on obtient

$$\sum_{n \geq 0} \int g \widehat{\mu}^n = \frac{1}{2i\pi EX} [-\ln(1 - \widehat{\mu}(a)) + \ln(1 - \widehat{\mu}(-a))].$$

Considérons la fonction  $h = f - f(0)g$ . Raisonnons au voisinage de l'origine. Cette fonction est de classe  $C^1$  et elle est nulle en l'origine. On a  $h(t) = O(t)$ . Comme  $\widehat{\mu}(t) = 1 + 2i\pi EXt + o(t)$  avec  $EX > 0$ , on obtient que  $h/(1 - \widehat{\mu})$  est localement borné. Comme son support, compact, ne rencontre  $A$  qu'en 0, on obtient l'intégrabilité de  $h/(1 - \widehat{\mu})$ . Par conséquent,  $\sum_{k=0..n} \int [f - f(0)g] \widehat{\mu}^k$  converge vers  $\int [f - f(0)g] \frac{1}{1 - \widehat{\mu}}$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \int [f - f(0)g] \frac{1}{1 - \widehat{\mu}} + f(0) \frac{1}{2i\pi EX} [-\ln(1 - \widehat{\mu}(a)) + \ln(1 - \widehat{\mu}(-a))] \\ &= \int [f - f(0)g] \frac{1}{1 - \widehat{\mu}} + f(0) \frac{1}{\pi EX} \Im[-\ln(1 - \widehat{\mu}(a))]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\nu(f) + \overline{\nu(f)} = 2 \int \Re \left[ \frac{f - f(0)g}{1 - \widehat{\mu}} \right] + f(0) \frac{2}{\pi EX} \Im[-\ln(1 - \widehat{\mu}(a))]. \quad (4.5)$$

Remarquons que  $\Re \left[ \frac{1}{1 - \widehat{\mu}} \right]$  est localement borné au voisinage de 0 (on le vérifie à partir de  $1 - \widehat{\mu}(t) = -2i\pi EXt + 2\pi^2 EX^2 t^2 + o(t^2)$ ). Par conséquent  $f \Re(1/(1 - \widehat{\mu}))$  est intégrable et

$$\int \Re \left[ \frac{f - f(0)g}{1 - \widehat{\mu}} \right] = \int f \Re \left[ \frac{1}{1 - \widehat{\mu}} \right] - f(0) \int \Re \left[ \frac{g}{1 - \widehat{\mu}} \right]. \quad (4.6)$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int \Re \left[ \frac{g}{1 - \widehat{\mu}} \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-a, a] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \Re \left[ \frac{\widehat{\mu}'}{2i\pi EX(1 - \widehat{\mu})} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi EX} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-a, a] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \Im \left[ \frac{\widehat{\mu}'}{1 - \widehat{\mu}} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi EX} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Im \int_{[-a, a] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \left[ \frac{\widehat{\mu}'}{1 - \widehat{\mu}} \right] \\
&= \frac{1}{\pi EX} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Im [-\ln(1 - \widehat{\mu}(a)) + \ln(1 - \widehat{\mu}(\varepsilon))].
\end{aligned}$$

Comme  $1 - \widehat{\mu}(\varepsilon) \sim -2i\pi EX\varepsilon$  au voisinage de l'origine, on obtient la convergence de  $\Im \ln(1 - \widehat{\mu}(\varepsilon))$  vers  $-\pi/2$ . Ainsi

$$\int \Re \left[ \frac{g}{1 - \widehat{\mu}} \right] = \frac{1}{\pi EX} \Im [-\ln(1 - \widehat{\mu}(a))] - \frac{1}{2EX}. \quad (4.7)$$

En combinant (4.5), (4.6) et (4.7) on obtient enfin

$$\nu(f) + \overline{\nu(f)} = \int f 2\Re \left[ \frac{1}{1 - \widehat{\mu}} \right] + \frac{f(0)}{EX}$$

ce qui permet de conclure dans le troisième et dernier cas.  $\square$

## 4.2 Topologie et tribus sur les ensembles ponctuels

### 4.2.1 Ensembles localement finis

Notons  $\mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des sous-ensembles localement finis de  $\mathbb{R}^n$ . Nous noterons  $\mathcal{M}_\sigma$  quand il n'y aura pas d'ambiguités. Les résultats de cette sous-section sont classiques. Nous définissons sur  $\mathcal{M}_\sigma$  une métrique déjà introduite par exemple dans [69]. Cette métrique induit une topologie  $\tilde{\mathcal{T}}$  sur  $\mathcal{M}_\sigma$ . Nous donnons une deuxième définition équivalente de cette topologie en suivant [46]. Enfin, nous rappelons la définition de la tribu  $\mathcal{A}$  des processus ponctuels.

#### Topologie

Notons  $B_M$  la boule fermé de  $\mathbb{R}^n$  centrée en l'origine et de rayon  $M$ . Soient  $S, S' \in \mathcal{M}_\sigma$ . Notons

$$D(S, S') = \{a > 0 : S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a \text{ et } S' \cap B_{1/a} \subset S + B_a\}.$$

Remarquons que  $a \in D(S, S')$  entraîne  $[a, +\infty[ \subset D(S, S')$ . Posons

$$d(S, S') = \min\{1/\sqrt{2}, \inf D(S, S')\}.$$

**Proposition 4.2.1** *L'application  $d$  définit une métrique sur  $\mathcal{M}_\sigma$ .*

**Preuve :** L'application  $d$  est à valeurs dans  $[0, 1/\sqrt{2}]$ . Elle est symétrique. Si  $d(S, S') = 0$  alors  $S = S'$ . En effet, on a dans ce cas  $D(S, S') = ]0, +\infty[$ . Par conséquent, pour tout  $a > 0$ ,  $S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a$ . S'il existait  $x \in S$  tel que  $x \notin S'$ , alors, comme  $S'$  est localement fini, la distance  $\delta$  de  $x$  à  $S'$  serait strictement positive. Pour  $a < \min(1/\|x\|, \delta)$  on aurait  $x \in S \cap B_{1/a}$  et  $x \notin S' + B_a$ . On aurait alors  $S \cap B_{1/a} \not\subset S' + B_a$ , absurde. On a donc  $S \subset S'$  et symétriquement  $S' \subset S$ .

Il reste donc à vérifier l'inégalité triangulaire. Soient  $S, S', S'' \in \mathcal{M}_\sigma$ . Montrons  $d(S, S'') \leq d(S, S') + d(S', S'')$ . Si  $d(S, S') = 1/\sqrt{2}$  ou  $d(S', S'') = 1/\sqrt{2}$  c'est immédiat. Supposons donc le contraire. Soit  $a \in D(S, S') \cap ]0, 1/\sqrt{2}]$  et  $b \in D(S', S'') \cap ]0, 1/\sqrt{2}]$  (qui sont nécessairement non vides). Posons  $c = a + b$ . Alors

$$S \cap B_{1/c} \subset S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a.$$

On a donc aussi

$$S \cap B_{1/c} \subset S' \cap B_{a+\frac{1}{c}} + B_a.$$

Or  $a + \frac{1}{c} \leq 1/b$ . En effet

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} - a = \frac{c - b - abc}{bc} = \frac{a}{bc}(1 - bc) \geq 0$$

car  $b \leq 1/\sqrt{2}$  et  $c \leq \sqrt{2}$ . Par conséquent on a

$$S \cap B_{1/c} \subset S' \cap B_{1/b} + B_a \subset S'' + B_b + B_a$$

d'où  $S \cap B_{1/c} \subset S'' + B_c$ . Par symétrie, on dispose également de  $S'' \cap B_{1/c} \subset S + B_c$ . Ainsi  $c \in D(S, S'')$ . On en déduit  $d(S, S'') \leq d(S, S') + d(S', S'')$ .  $\square$

**Remarque :** Voici une autre définition naturelle pour  $D$  :

$$\tilde{D}(S, S') = \{a > 0 : S \cap B_{1/a} \subset S' \cap B_{1/a} + B_a \text{ et } S' \cap B_{1/a} \subset S \cap B_{1/a} + B_a\}.$$

Posons

$$\tilde{d}(S, S') = \min\{c, \inf D(S, S')\}$$

où  $c$  est une constante strictement positive. Cela ne définit pas une métrique. Pour voir cela, plaçons-nous sur  $\mathbb{R}$  ( $n = 1$ ). Soient  $x$  et  $y$  des réels strictement positifs tels que  $x < y$ . Alors pour tout  $a > 0$  :

1. Si  $1/a < x$  alors  $a \in \tilde{D}(\{x\}, \{y\})$ .
2. Si  $x \leq 1/a < y$  alors  $a \notin \tilde{D}(\{x\}, \{y\})$ .
3. Si  $1/a \geq y$  alors  $a \in \tilde{D}(\{x\}, \{y\})$  si et seulement si  $|x - y| \leq a$ .

Ainsi,

1. Si  $\frac{1}{|x-y|} < y$  alors  $\inf \tilde{D}(\{x\}, \{y\}) = 1/x$ .
2. Sinon,  $\inf \tilde{D}(\{x\}, \{y\}) = |x - y|$ .

Considérons  $r$  un réel strictement positif tel que  $r \leq c$ ,  $2r^2 < 1$  et  $\frac{2r}{1-2r^2} \leq c$ . Posons  $y = \frac{1}{2r}$ ,  $x = y - r$  et  $z = y + r$ . On vérifie  $\tilde{d}(\{x\}, \{y\}) = \tilde{d}(\{y\}, \{z\}) = r$  et  $\tilde{d}(\{x\}, \{z\}) = \frac{2r}{1-2r^2}$ . En particulier,  $\tilde{d}(\{x\}, \{z\}) > \tilde{d}(\{x\}, \{y\}) + \tilde{d}(\{y\}, \{z\})$ . Cela prouve que  $\tilde{d}$  ne définit pas une métrique.

**Lemme 4.2.2** *L'espace métrique  $(\mathcal{M}_\sigma, d)$  est séparable. Plus précisément, l'ensemble  $\mathcal{M}_F(\mathbb{Q}^n)$  des sous-ensembles finis de  $\mathbb{Q}^n$  est dense et dénombrable.*

**Preuve :** L'ensemble  $\mathcal{M}_F(\mathbb{Q}^n)$  est dénombrable. Il reste à vérifier qu'il est dense. Considérons  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  et  $a > 0$ . L'ensemble  $S \cap B_{1/a}$  est fini. A chaque point  $x$  de  $S \cap B_{1/a}$  on associe un point  $y$  de  $\mathbb{Q}^n$  tel que  $\|x - y\| \leq a$ . Notons  $S'$  la réunion de tous les  $y$  ainsi obtenus. Cet ensemble appartient à  $\mathcal{M}_F(\mathbb{Q}^n)$ . On a  $S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a$  et  $S' \cap B_{1/a} \subset S' \subset S + B_a$ . D'où  $d(S, S') \leq a$ .  $\square$

Notons  $\tilde{\mathcal{T}}_m$  la topologie induite par la métrique  $d$ . Voici une manière équivalente de définir cette topologie [46]. Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , on note :

$$\mathcal{F}^K = \{\chi \in \mathcal{M}_\sigma : \chi \cap K = \emptyset\}.$$

Si  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on note :

$$\mathcal{F}_O = \{\chi \in \mathcal{M}_\sigma : \chi \cap O \neq \emptyset\}.$$

Notons  $\tilde{\mathcal{T}}$  la topologie engendrée par la réunion des familles  $\mathcal{F}^K$ ,  $K$  compact et  $\mathcal{F}_O$ ,  $O$  ouvert.

**Lemme 4.2.3** *Les topologies  $\tilde{\mathcal{T}}$  et  $\tilde{\mathcal{T}}_m$  sont égales.*

**Preuve :**

- Montrons  $\tilde{\mathcal{T}}_m \subset \tilde{\mathcal{T}}$ . Soient  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  et  $a > 0$ . Il suffit d'établir que

$$\overset{\circ}{B}_a(S) := \{S' \in \mathcal{M}_\sigma : d(S, S') < a\}$$

appartient à  $\tilde{\mathcal{T}}$ . Si  $a > 1/\sqrt{2}$ , c'est immédiat, car alors  $\overset{\circ}{B}_a(S) = \mathcal{M}_\sigma$ . Supposons maintenant  $a \leq 1/\sqrt{2}$ . Alors

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}_a(S) &= \bigcup_{b < a} \{S' \in \mathcal{M}_\sigma : b \in D(S, S')\} \\ &= \bigcup_{b < a} \{S' \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap B_{1/b} \subset S' + B_b \text{ et } S' \cap B_{1/b} \subset S + B_b\} \\ &= \bigcup_{b < a} \{S' \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap B_{1/b} \subset S' + \overset{\circ}{B}_b \text{ et } S' \cap B_{1/b} \subset S + \overset{\circ}{B}_b\} \end{aligned}$$

où  $\overset{\circ}{B}_M$  désigne la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  centrée en l'origine et de rayon  $M$ . Mais

$$\left\{S' \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap B_{1/b} \subset S' + \overset{\circ}{B}_b\right\} = \bigcap_{x \in S \cap B_{1/b}} \mathcal{F}_{x + \overset{\circ}{B}_b}$$

et

$$\left\{S' \in \mathcal{M}_\sigma : S' \cap B_{1/b} \subset S + \overset{\circ}{B}_b\right\} = \mathcal{F}^{B_{1/b} \setminus (S + \overset{\circ}{B}_b)}.$$

Ainsi  $\overset{\circ}{B}_a(R) \in \tilde{\mathcal{T}}$ .

- Montrons  $\tilde{\mathcal{T}} \subset \tilde{\mathcal{T}}_m$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $M > 0$  tel que  $K$  soit inclus dans

$B_M$ . Soit  $S \in \mathcal{F}^K$ . Alors  $S$  et  $K$  sont disjoints. Si  $S$  est vide, posons  $\delta = 1$ . Sinons, notons  $\delta$  la distance (strictement positive) entre  $S$  et  $K$ . Posons

$$a = \min \left( \frac{1}{M}, \frac{\delta}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Si  $S' \in \mathcal{M}_\sigma$  est tel que  $d(S, S') < a$ , alors  $a \in D(S, S')$  et en particulier  $S' \cap B_{1/a} \subset S + B_a$ . Par conséquent  $S' \cap B_M \subset S + B_{\delta/2}$  et donc  $S' \in \mathcal{F}^K$ . Ainsi  $\mathcal{F}^K \in \tilde{\mathcal{T}}_m$ . Soit maintenant  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $S \in \mathcal{F}_O$ . Considérons un point  $x$  quelconque de l'ensemble (non vide)  $S \cap O$ . La distance  $\delta$  de  $x$  au complémentaire de  $O$  est strictement positive. Posons

$$a = \min \left( \frac{1}{1 + \|x\|}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \delta/2 \right).$$

Si  $S' \in \mathcal{M}_\sigma$  est tel que  $d(S, S') < a$ , alors  $a \in D(S, S')$  et donc  $S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a$ . En particulier,  $x \in S' + B_a$ . L'ensemble  $S'$  possède donc un point  $y$  dans  $x + B_a$ . Nécessairement,  $y$  appartient à  $O$ . Ainsi  $S'$  appartient à  $\mathcal{F}_O$ . Ce dernier ensemble appartient donc à  $\tilde{\mathcal{T}}_m$ .  $\square$

**Lemme 4.2.4** *Les translations de  $(\mathcal{M}_\sigma, \tilde{\mathcal{T}})$  sont des homéomorphismes.*

**Preuve :** Immédiat avec la définition de  $\tilde{\mathcal{T}}$ .  $\square$

**Lemme 4.2.5** *Soit  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ . Alors l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(\mathcal{M}_\sigma, \tilde{\mathcal{T}})$  définie par  $t \mapsto S - t$  est continue.*

**Preuve :** Soit  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ . Notons  $\phi$  l'application  $t \mapsto S - t$ . Il suffit de constater que, si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\phi^{-1}(\mathcal{F}^K) = \bigcap_{x \in S} (x - K)$ , et si  $O$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\phi^{-1}(\mathcal{F}_O) = \bigcup_{x \in S} (x - O)$ .  $\square$

## Tribu

Notons  $\mathcal{B}$  la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}^n$ . On définit,  $A$  de  $\mathcal{B}$ , l'application

$$N_A : \begin{cases} \mathcal{M}_\sigma & \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ S & \mapsto \text{card}(S \cap A). \end{cases}$$

On munit  $\mathcal{M}_\sigma$  de la tribu  $\mathcal{A}$  engendrée par la famille d'applications  $(N_A)_A$  où  $A$  parcourt l'ensemble des boréliens bornés de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 4.2.6** *Soit  $\mathcal{V}$  une base de voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que tout les éléments  $V$  de  $\mathcal{V}$  sont boréliens. Alors*

$$\mathcal{G} = \left\{ \{S \in \mathcal{M}_\sigma : (x + V) \cap S \neq \emptyset\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, V \in \mathcal{V} \right\}$$

est une partie génératrice de  $\mathcal{A}$ .

**Preuve :** Pour tout  $n \geq 1$  on choisit  $V_n \in \mathcal{V}$  tel que  $V_n \subset B_{1/n}$ . On pose

$$\mathcal{H} = \left\{ \{S \in \mathcal{M}_\sigma : (x + V_n) \cap S \neq \emptyset\}, \quad x \in \mathbb{Q}^n, \quad n \geq 1 \right\}.$$

Il suffit de montrer que  $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{A}$ .

1) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Posons

$$U' = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^n \cap U, y + V_n \subset U} y + V_n. \quad (4.8)$$

Soit  $x \in U$ . Soit  $n \geq 1$  tel que  $x + B_{1/n} \subset U$ . Soit  $a > 0$  tel que  $B_a \subset V_{n+1}$ . Soit maintenant  $y \in \mathbb{Q}^n$  tel que  $\|y - x\| \leq a$  et  $y + B_{1/(n+1)} \subset x + B_{1/n}$ . Alors

$$x \in y + B_a \subset y + V_{n+1} \subset y + B_{1/(n+1)} \subset x + B_{1/n} \subset U.$$

On en déduit tout d'abord que  $y + V_{n+1}$  intervient dans la réunion (4.8) puis que  $x$  appartient à  $U'$ . On a donc  $U = U'$ . Ainsi

$$\{S \in \mathcal{M}_\sigma : U \cap S = \emptyset\} = \bigcap_{y \in \mathbb{Q}^n \cap U, y + V_n \subset U} \{S \in \mathcal{M}_\sigma : (y + V_n) \cap S = \emptyset\}$$

d'où

$$\{S \in \mathcal{M}_\sigma : U \cap S = \emptyset\} \in \sigma(\mathcal{H}).$$

2) Considérons maintenant un rectangle semi-ouvert de  $\mathbb{R}^n$  c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$R = [a_1, b_1[ \times \cdots \times [a_d, b_d[.$$

En utilisant le caractère localement fini des éléments  $S$  de  $\mathcal{M}_\sigma$  on obtient

$$\{S \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap R = \emptyset\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ S \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap ]a_1 - 1/n, b_1[ \times \cdots \times ]a_d - 1/n, b_d[ = \emptyset \right\}.$$

On en déduit avec le point 1) que  $\{S \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap R = \emptyset\} \in \sigma(\mathcal{H})$  pour tout rectangle  $R$ .

3) Considérons un ouvert borné  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Notons  $\mathcal{R}_n$  l'ensemble des rectangles semi-ouverts de la forme

$$R = [k_1/n, l_1/n[ \times \cdots \times [k_d/n, l_d/n[$$

où les  $k_i$  et les  $l_i$  sont des entiers. En utilisant le caractère localement fini des éléments de  $\mathcal{M}_\sigma$  on obtient, pour tout  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ ,

$$\text{card}(S \cap U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{R \in \mathcal{R}_n : R \subset U} 1_{S \cap R \neq \emptyset}.$$

On en déduit avec le point 2) que toutes les applications  $S \mapsto \text{card}(S \cap U)$  sont  $\sigma(\mathcal{H})$ -mesurables.

4) Soit  $n \geq 1$ . Notons

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{B} : S \mapsto \text{card}(S \cap \overset{\circ}{B}_n \cap C) \text{ est } \sigma(\mathcal{H})\text{-mesurable}\}.$$

Par le point 3),  $\mathcal{C}$  contient tous les ouverts. Mais  $\mathcal{C}$  est stable différence stricte, par union dénombrable croissante et contient  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ .

5) Soit  $C$  un borélien de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ ,

$$\text{card}(S \cap C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(S \cap \overset{\circ}{B}_n \cap C).$$

On en déduit par le point 4) que  $S \mapsto \text{card}(S \cap C)$  est  $\sigma(\mathcal{H})$ -mesurable, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Notons  $\sigma(d)$  la tribu engendrée par la topologie  $\tilde{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{T}}_m$ .

**Lemme 4.2.7**  $\sigma(d) = \mathcal{A}$ .

**Preuve :** Montrons  $\sigma(d) \subset \mathcal{A}$ . Comme  $(\mathcal{M}_\sigma, d)$  est métrique et séparable, il suffit de montrer que toute boule ouverte appartient à  $\mathcal{A}$ . Soient  $a > 0$  et  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ . Considérons la boule ouverte

$$\overset{\circ}{B}_a(S) := \{S' \in \mathcal{M}_\sigma : d(S, S') < a\}.$$

Si  $a > 1/\sqrt{2}$ , alors  $\overset{\circ}{B}_a(S) = \mathcal{M}_\sigma$  et donc  $\overset{\circ}{B}_a(S)$  appartient à  $\mathcal{A}$ . Supposons maintenant  $a \leq 1/\sqrt{2}$ . En précisant le raisonnement du lemme 4.2.3 on obtient :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}_a(S) &= \bigcup_{b \in \mathbb{Q}, 0 < b < a} \{S' \in \mathcal{M}_\sigma : S \cap B_{1/b} \subset S' + \overset{\circ}{B}_b \text{ et } S' \cap B_{1/b} \subset S + \overset{\circ}{B}_b\} \\ &= \bigcup_{b \in \mathbb{Q}, 0 < b < a} \left( \bigcap_{x \in S \cap B_{1/b}} \mathcal{F}_{x + \overset{\circ}{B}_b} \right) \cap \left( \mathcal{F}^{B_{1/b} \setminus (S + \overset{\circ}{B}_b)} \right). \end{aligned}$$

On obtient alors que  $\overset{\circ}{B}_a(S)$  appartient à  $\mathcal{A}$  en constatant que  $\mathcal{F}^K$  (resp.  $\mathcal{F}_O$ ) appartient à  $\mathcal{A}$  pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  (resp. pour tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}^n$ ). L'inclusion  $\mathcal{A} \subset \sigma(d)$  découle du lemme 4.2.6.  $\square$

## 4.2.2 Ensemble uniformément discrets

Soit  $r > 0$ . Un ensemble  $S \in \mathcal{M}_\sigma(\mathbb{R}^n)$  est dit uniformément discret de paramètre  $r$  si deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $S$  vérifient  $\|x - y\| \geq r$ . Notons  $U_r(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des ensembles uniformément discrets de paramètre  $r$  de  $\mathbb{R}^n$ . Nous noterons  $U_r$  quand il n'y aura pas d'ambiguités. Du lemme 4.2.7 résulte que la tribu engendrée par la métrique  $d$  sur  $U_r$  est la restriction de la tribu  $\mathcal{A}$  à  $U_r$ .

**Lemme 4.2.8** Soit  $C$  un borélien borné de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une constante finie  $M_C$  telle que, pour tout  $S \in U_r$ , on ait :

$$\text{card}(S \cap C) \leq M_C.$$

On peut choisir  $M_C = |C + B_{r/3}|/|B_{r/3}|$ . En particulier,

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{|B_R|} \text{card}(S \cap B_R) \leq \frac{1}{|B_{r/3}|}.$$

**Preuve :** Soit  $S \in U_r(C)$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux points distincts de  $S$ , alors  $x + B_{r/3}$  et  $y + B_{r/3}$  sont disjoints. Par conséquent

$$|C + B_{r/3}| \geq \left| \bigcup_{x \in S \cap C} (x + B_{r/3}) \right| = \text{card}(S \cap C) |B_{r/3}|.$$

La relation du lemme est donc vérifiée avec  $M_C = |C + B_{r/3}|/|B_{r/3}|$ .  $\square$

### L'espace métrique $(U_r, d)$

Le résultat suivant est classique :

**Proposition 4.2.9** *L'espace métrique  $(U_r, d)$  est compact.*

**Preuve :**

1)  $U_r$  est fermé dans  $\mathcal{M}_\sigma$ . En effet, supposons  $S \notin U_r$ . Alors il existe  $x$  et  $y$  deux points distincts de  $S$  tels que  $\|x - y\| < r$ . Soit  $a \in ]0, 1/\sqrt{2}[$  tel que  $1/a > \|x\|$ ,  $1/a > \|y\|$ ,  $2a < \|x - y\|$  et  $2a + \|x - y\| < r$ . Soit  $S' \in \mathcal{M}_\sigma$  tel que  $d(S, S') < a$ . Alors  $S \cap B_{1/a} \subset S' + B_a$ . Comme  $x$  appartient à  $S \cap B_{1/a}$ , il appartient à  $S' + B_a$ . Ainsi  $S'$  possède un point  $x'$  dans  $x + B_a$ . Il possède de même un point  $y'$  dans  $y + B_a$ . Des hypothèses faites sur  $a$  on déduit que ces deux points sont nécessairement distincts et vérifient  $\|x' - y'\| < r$ . Par conséquent  $S' \notin U_r$  et  $U_r$  est fermé.

2) Soit  $C$  un borélien borné de  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $U_r(C)$  l'ensemble des sous-ensembles uniformément discrets de paramètre  $r$  inclus dans  $C$  :

$$U_r(C) = \{S \in U_r : S \subset C\}.$$

Montrons que l'espace métrique  $(U_r(C), d)$  est relativement compact dans  $\mathcal{M}_\sigma$ . Soit  $S_n$  une suite d'éléments de  $U_r(C)$ . Comme  $\text{card}(S_n) \leq M_C$  (lemme 4.2.8), quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que le cardinal de  $S_n$  est constant égal à un certain  $k \geq 0$ . Numérotons arbitrairement les points de  $S_n$  :  $S_n = \{x_n^1, \dots, x_n^k\}$ . Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que chaque suite  $(x_n^i)_n$ , qui est à valeurs dans un ensemble compact, converge. Notons  $x^i$  la limite de  $(x_n^i)_n$ . Posons  $S = \{x^1, \dots, x^k\} \subset \overline{C}$ . Cet ensemble appartient à  $\mathcal{M}_\sigma$ . On vérifie que  $S_n$  converge vers  $S$  pour la métrique  $d$ , ce qui prouve la relative compacité de  $U_r(C)$  dans  $\mathcal{M}_\sigma$ .

3) Notons  $C_1 = B_1$  et  $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$  pour  $n \geq 2$ . Les ensembles  $C_i$  partitionnent  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $S_n$  une suite à valeur dans  $U_r$ . Pour tout entier  $i \geq 0$  on définit la suite  $S_n^i$  par

$$S_n^i = S_n \cap C_i.$$

Cette suite est à valeur dans  $U_r(C_i)$ . Par le point 2) et par le procédé diagonal on peut, quitte à extraire, supposer que chacune de ces suites converge vers un ensemble  $S^i \subset \overline{C_i}$ . Posons  $S = \cup_i S^i$ . Alors  $S \in \mathcal{M}_\sigma$  et on vérifie facilement que  $d(S_n, S)$  converge vers 0. Comme  $U_r$  est fermé,  $S \in U_r$  et le lemme est prouvé.  $\square$

**Lemme 4.2.10** *Soit  $H : \mathcal{M}_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que*

1. *Il existe  $\rho > 0$  tel que, pour tout  $S \in \mathcal{M}_\sigma$ ,  $H(S) = H(S \cap B_\rho)$ .*

2. Pour tout  $n \geq 0$ , la fonction  $H_n$  de  $\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n : i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x_1, \dots, x_n)$  associe  $H(\{x_1, \dots, x_n\})$  est continue.

Alors la restriction de  $H$  à  $(U_r, d)$  est continue.

**Preuve :** Soit  $S \in U_r$  et  $\varepsilon > 0$ . Notons  $S \cap B_\rho = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Remarquons  $H_n(x_1, \dots, x_n) = H(S)$ . Soit  $\eta \in ]0, r/2[$  tel que  $|H_n(y_1, \dots, y_n) - H_n(x_1, \dots, x_n)| \leq \varepsilon$  dès que les  $y_i$  sont distincts et vérifie  $\|x_i - y_i\| \leq \eta$  pour tout  $i$ . Notons  $O = \bigcup_i (x_i + \overset{\circ}{B}_\eta)$  et considérons l'ouvert suivant de  $\mathcal{M}_\sigma$  :

$$\omega = \mathcal{F}^{B_\rho \setminus O} \cap \mathcal{F}_{x_1 + \overset{\circ}{B}_\eta} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{x_n + \overset{\circ}{B}_\eta}.$$

Soit  $S' \in \omega \cap U_r$ . Alors

$$S' \cap B_\rho = [S' \cap O \cap B_\rho] \cup [S' \cap (B_\rho \setminus O)] = S' \cap O \cap B_\rho$$

et par conséquent

$$H(S') = H(S' \cap B_\rho) = H(S' \cap O \cap B_\rho) = H(S' \cap O).$$

Mais  $O$  est la réunion disjointe des  $x_i + \overset{\circ}{B}_\eta$  (car  $S \in U_r$  et  $\eta < r/2$ ). Par ailleurs, chaque ensemble  $S' \cap (x_i + \overset{\circ}{B}_\eta)$  est non vide et comporte au plus un point. Ainsi  $S' \cap (x_i + \overset{\circ}{B}_\eta) = \{y_i\}$  pour un certain  $y_i$  vérifiant  $\|y_i - x_i\| \leq \eta$  et  $O \cap S' = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Par conséquent  $|H(S' \cap O) - H(x_1, \dots, x_n)| \leq \varepsilon$  et donc  $|H(S) - H(S')| \leq \varepsilon$ . Comme  $\omega \cap U_r$  est un ouvert de  $U_r$  contenant  $S$ , cela conclut la preuve.  $\square$

### L'espace pseudo-métrique $(\mathcal{U}_r, \bar{d})$

Notons  $\mathcal{U}_r$  l'espace topologique  $(U_r, \bar{d})$  quotienté par la relation d'équivalence  $S \sim S' \Leftrightarrow \bar{d}(S, S') = 0$ . L'espace  $\mathcal{U}_r$  est ainsi métrisable. Nous garderons les mêmes notations pour les éléments de  $U_r$  et ceux de  $\mathcal{U}_r$  et commettrons d'autres abus du même ordre.

**Théorème 4.2.11** *L'espace  $\mathcal{U}_r$  est complet pour la métrique  $\bar{d}$*

**Preuve :** Il suffit de montrer que toute suite de Cauchy dans  $(U_r, \bar{d})$  admet une sous-suite qui converge. Soit  $f$  une fonction non identiquement nulle, continue et à support dans  $B_{r/5}$ . Supposons  $\|f\|_\infty \leq 1$ . La proposition 2.3.1 nous permet de travailler avec la pseudo-métrique  $\bar{d}_f$ . Soit  $S_p$  une suite de Cauchy dans  $(U_r, \bar{d}_f)$ . Quitte à extraire, on peut supposer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\bar{d}_f(S_p, S_{p+1}) < \frac{1}{2^p}.$$

Soit alors  $r_p$  une suite de réels strictement positifs vérifiant

1. Pour tout  $p$ ,  $r_p \geq 2r$ .
2. Pour tout  $p$ ,  $r_p^n \leq \frac{1}{2}r_{p+1}^n$  ( $n$  est la dimension de l'espace).
3. Pour tout  $p$ , pour tout  $R \geq r_p$ , on a

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_{S_{p+1}} * f| \leq \frac{1}{2^p}. \quad (4.9)$$

Remarquons que la suite  $r_p$  est nécessairement strictement croissante et converge vers  $+\infty$ . Pour tout couple de réels positifs  $(a, b)$  notons

$$C(a, b) = B_b \setminus B_a.$$

Posons

$$S = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} C(r_p + r, r_{p+1} - r) \cap S_p.$$

On a bien  $S \in U_r$ . Nous allons montrer que  $S_p$  converge vers  $S$ , ce qui conclura la preuve. Soit  $R > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_S * f| &= \int_{B_{r_0} \cap B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_S * f| + \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{C(r_k, r_{k+1}) \cap B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_S * f| \\ &\leq \int_{B_{r_0} \cap B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_S * f| + \sum_{k \in \mathbb{N}} [A_{p,k}(R) + B_{p,k}(R)] \end{aligned}$$

où

$$A_{p,k}(R) = \int_{C(r_k, r_{k+1}) \cap B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_{S_k} * f|$$

et

$$B_{p,k}(R) = \int_{C(r_k, r_{k+1}) \cap B_R} |\mu_{S_k} * f - \mu_S * f|.$$

Pour  $R > r_0$ , le terme  $\int_{B_{r_0} \cap B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_S * f|$  est constant, ainsi

$$\frac{1}{|B_R|} \int_{B_{r_0} \cap B_R} |\mu_{S_p} * f - \mu_S * f|$$

converge vers 0. Par conséquent

$$\bar{d}_f(S_p, S) \leq \bar{A} + \bar{B} \quad (4.10)$$

où

$$\bar{A} = \limsup \frac{1}{|B_R|} \sum_{k \in \mathbb{N}} A_{p,k}(R)$$

et

$$\bar{B} = \limsup \frac{1}{|B_R|} \sum_{k \in \mathbb{N}} B_{p,k}(R).$$

• Evaluons  $\bar{A}$ . Soit  $R \geq r_0$ . Notons  $l$  l'unique entier tel que  $r_l \leq R < r_{l+1}$ . Si  $k > l$ , alors  $r_k > R$  et donc  $A_{p,k}(R) = 0$ . Supposons maintenant  $p < k \leq l$ . Pour tout  $i \in \{p, \dots, k-1\}$  on a  $m_k \geq r_i$  où  $m_k = \min(R, r_{k+1})$ . On a donc, d'après (4.9),

$$\frac{1}{|B_{m_k}|} \int_{B_{m_k}} |\mu_{S_i} * f - \mu_{S_{i+1}} * f| \leq \frac{1}{2^i}.$$

En sommant pour  $i \in \{p, \dots, k-1\}$ , on obtient,

$$\frac{1}{|B_{m_k}|} \int_{B_{m_k}} |\mu_{S_p} * f - \mu_{S_k} * f| \leq \frac{2}{2^p}$$

et donc

$$A_{p,k}(R) \leq \int_{B_{m_k}} |\mu_{S_p} * f - \mu_{S_k} * f| \leq \frac{2|B_{m_k}|}{2^p}.$$

On obtient

$$\sum_{k=p+1}^l A_{p,k}(R) \leq \left[ \sum_{k=p+1}^{l-1} \frac{2|B_{r_{k+1}}|}{2^p} \right] + \frac{2|B_R|}{2^p}.$$

Mais, pour  $k \in \{p, \dots, l-1\}$ ,  $r_{k+1}^n \leq 2^{(k+1)-l} r_l^n$ . On a donc

$$|B_{r_{k+1}}| \leq 2^{k+1-l} |B_{r_l}| \leq 2^{k+1-l} |B_R|.$$

On en déduit

$$\sum_{k=p+1}^l A_{p,k}(R) \leq \frac{2}{2^p} 2|B_R| + \frac{2|B_R|}{2^p} \leq \frac{6|B_R|}{2^p}.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{|B_R|} \sum_{k \in \mathbb{N}} A_{p,k}(R) \leq \sum_{k=0}^p \frac{A_{p,k}(R)}{|B_R|} + \frac{6}{2^p}.$$

Comme, pour  $R > r_{p+1}$ , les quantités  $A_{p,k}$  sont constantes pour  $k \in \{0, \dots, p\}$ , on obtient :

$$\overline{A} \leq \frac{6}{2^p}.$$

• Evaluons  $\overline{B}$ . Soit  $R \geq r_0$ . De par la définition de  $S$ ,  $S$  et  $S_k$  coïncident sur  $C(r_k + r, r_{k+1} - r)$ . Par conséquent, comme  $f$  est à support dans  $B_{r/5}$ ,  $\mu_S * f$  et  $\mu_{S_p} * f$  coïncide sur  $C(r_k + 2r, r_{k+1} - 2r)$ . On a donc

$$B_{p,k}(R) \leq \int_{[C(r_k, r_k + 2r) \cup C(r_{k+1} - 2r, r_{k+1})] \cap B_R} |\mu_{S_k} * f - \mu_S * f|.$$

Par ailleurs, si  $u \in \mathbb{R}^n$  et si  $S' \in U_r$ , alors

$$\mu_{S'} * f(u) = \sum_{x \in S'} f(u - x).$$

Comme  $f$  est à support dans  $B_{r/5}$  et comme  $S'$  appartient à  $U_r$ , cette somme comporte au plus un terme non nul. On en déduit  $\|\mu_{S'} * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq 1$ . Ainsi

$$B_{p,k}(R) \leq 2 \left| [C(r_k, r_k + 2r) \cup C(r_{k+1} - 2r, r_{k+1})] \cap B_R \right|.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} B_{p,k}(R) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2 \left| [C(r_k, r_k + 2r) \cup C(r_{k+1} - 2r, r_{k+1})] \cap B_R \right| \\ &\leq 2|C(r_0, r_0 + 2r) \cap B_R| + \sum_{k \geq 1} 2|C(r_k - 2r, r_k + 2r) \cap B_R| \end{aligned}$$

d'où, en notant  $l$  l'unique entier tel que  $r_l \leq R + 2r < r_{l+1}$ ,

$$\begin{aligned}\overline{B} &\leq \limsup \frac{1}{|B_R|} \sum_{k \geq 1} 2|C(r_k - 2r, r_k + 2r) \cap B_R| \\ &\leq \limsup \frac{1}{|B_R|} \sum_{k=1}^l 2|C(r_k - 2r, r_k + 2r) \cap B_R|.\end{aligned}$$

Mais, pour  $0 \leq a \leq b$ ,  $|C(a, b)| = |B_1|(b^n - a^n) \leq |B_1|nb^{n-1}(b - a)$ . Par ailleurs, toutes les couronnes non vides  $|C(a, b)|$  qui interviennent dans la somme précédente vérifient  $b - a \leq 4r$  et  $b \leq R$ . On a donc

$$\overline{B} \leq \limsup \frac{1}{|B_R|} MR^{n-1}l$$

avec  $M = 8r|B_1|n$ . Mais  $r_0^n \leq 2^{-l}r_l^n \leq 2^{-l}(R + 2r)^n$  donc  $2^l \leq ((R + 2r)/r_0)^n$  et

$$l \leq n \ln_2(R + 2r) - n \ln_2(r_0).$$

On en déduit  $\overline{B} = 0$ .

- En reprenant (4.10) on obtient  $\overline{d}_f(S_p, S) \leq \frac{6}{2^p}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 4.3 Presque périodicité

Nous rappelons dans cette section quelques résultats classiques sur la notion de presque-périodicité. Nous avons cherché à prouver le plus simplement possible les résultats nécessaires pour le chapitre 2. Nous renvoyons à [38] pour une référence générale sur le sujet.

### 4.3.1 Fonctions presque-périodiques

Soit  $A$  un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $A$  est relativement dense s'il existe  $R > 0$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x + B_R) \cap A \neq \emptyset \quad (4.11)$$

Soit  $E$  un espace de Banach. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$ . A tout  $t \in \mathbb{R}^n$  on associe la fonction  $f_t$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$  définie par  $f_t(x) = f(x - t)$ . On dit d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$  qu'elle est presque-périodique (au sens de Bohr) si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des  $\varepsilon$ -périodes

$$P_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}_d : \|f - f_t\|_\infty < \varepsilon\}$$

est relativement dense.

**Lemme 4.3.1** *Soit  $f$  une application presque-périodique et continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$ . Alors  $f$  est uniformément continue.*

**Preuve :** Fixons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $R > 0$  tel que (4.11) soit vérifiée pour  $A = P_\varepsilon$ . La fonction  $f$  étant uniformément continue sur  $B_{R+1}$  on peut choisir  $\alpha < 1$  tel que, sur  $B_{R+1}$ ,  $|x - y| < \alpha$  entraîne  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ . Soient maintenant  $x$  et  $y$  deux points de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $|x - y| < \alpha$ . Soit  $h \in (x + B_R) \cap P_\varepsilon$ . Posons  $\tilde{x} = x - h$  et  $\tilde{y} = y - h$ . Remarquons que  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  appartiennent tous deux à  $B_{R+1}$  et que  $|\tilde{x} - \tilde{y}| = |x - y| < \alpha$ . Par conséquent

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\| &\leq \|f(x) - f(\tilde{x})\| + \|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})\| + \|f(\tilde{y}) - f(y)\| \\ &\leq \|f - f_h\|_\infty + \varepsilon + \|f - f_h\|_\infty \\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Cela conclut le lemme.  $\square$

**Lemme 4.3.2** *Soit  $f$  une application presque-périodique et continue de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$ . Alors  $f$  est bornée.*

**Preuve :** Soit  $R > 0$  tel que (4.11) soit vérifiée pour  $P_1$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Choisissons  $y \in (x + B_R) \cap P_1$ . Alors  $f(x) = f(x - y) + f(x) - f(x - y)$  et donc  $\|f(x)\| \leq \|f(x - y)\| + 1 \leq M + 1$  où  $M$  est le maximum de  $\|f\|$  sur  $B_R$ .  $\square$

Notons  $C_b(\mathbb{R}^n, E)$  l'espace de Banach pour la norme uniforme des applications continues et bornées de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$ . Introduisons par ailleurs

$$T_f := \left\{ x \xrightarrow{f_t} f(x - t), : t \in \mathbb{R}^n \right\}$$

l'ensemble des translatées d'une fonction  $f \in C_b(\mathbb{R}^n, E)$ . Le critère suivant est dû à Böchner.

**Théorème 4.3.3** *Soit  $f$  une fonction continue et bornée de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction  $f$  est presque-périodique ;*
2. *L'ensemble des translaté de  $f$  est relativement compact dans  $C_b(\mathbb{R}^n, E)$ .*

**Preuve :** Supposons 1) et montrons que  $T_f$  est précompact, ce qui suffit pour établir 2) car  $C_b(\mathbb{R}^n, E)$  est complet. Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$  étant presque-périodique, il existe  $R > 0$  tel que (4.11) soit vérifié pour  $A = P_\varepsilon$ . Le lemme 4.3.1 assure par ailleurs l'existence de  $\alpha > 0$  tel que  $|x - y| \leq \alpha$  entraîne  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ . Soit  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble fini de points de  $B_R$  tel que

$$B_R \subset \bigcup_i (x_i + B_\alpha).$$

Montrons que

$$T_f \subset \bigcup_i (f_{x_i}) + B_{2\varepsilon}$$

(où  $B_{2\varepsilon}$  désigne la boule de  $C^b(\mathbb{R}^n, E)$  centrée en l'origine et de rayon  $2\varepsilon$ ). Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Choisissons  $y \in (x + B_R) \cap P_\varepsilon$ . Alors  $\|f_x - f_{x-y}\|_\infty \leq \varepsilon$ , car  $y \in P_\varepsilon$ . Par ailleurs, comme  $x - y \in B_R$ , il existe un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|x_i - (x - y)| \leq \alpha$ . Mais alors

$\|f_{x-y} - f_{x_i}\|_\infty \leq \varepsilon$ . Par conséquent  $\|f_x - f_{x_i}\|_\infty \leq 2\varepsilon$ , ce qui prouve la précompacité de  $T_f$  et donc 2).

Supposons maintenant 2). L'ensemble  $T_f$  est alors relativement compact. Par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un ensemble fini de points  $x_1, \dots, x_n$  tel que

$$T_f \subset \bigcup_i (f_{x_i} + B_\varepsilon).$$

Notons  $R := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\|f_x - f_{x_i}\|_\infty \leq \varepsilon$  c'est-à-dire tel que  $\|f - f_{x_i-x}\|_\infty \leq \varepsilon$ . Autrement dit  $x - x_i \in P_\varepsilon$ . Mais  $|x - (x - x_i)| \leq R$ . L'ensemble  $P_\varepsilon$  est donc relativement dense, ce qui prouve la presque-périodicité de  $f$ .  $\square$

**Corollaire 4.3.4** Soit  $f$  (resp.  $g$ ) une application continue et presque-périodique de  $\mathbb{R}^n$  dans un espace de Banach  $E$  (resp.  $F$ ). Notons  $(f, g)$  la fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E \times F$  définie par  $(f, g)(t) = (f(t), g(t))$ . Alors la fonction  $(f, g)$  est continue et presque-périodique.

**Preuve :** Le lemme 4.3.2 assure que  $f$  et  $g$  sont bornées. Le théorème 4.3.3 assure alors que les ensembles  $T_f$  et  $T_g$  sont relativement compact. Comme

$$T_{(f,g)} \subset T_f \times T_g,$$

$T_{(f,g)}$  est également relativement compact. La fonction  $(f, g)$  étant continue et bornée, le théorème 4.3.3 permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 4.3.5** Soit  $f$  (resp.  $g$ ) une application continue et presque-périodique de  $\mathbb{R}^n$  dans un espace de Banach  $E$  (resp.  $F$ ). Alors

$\forall \varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R}^n : \|f - f_t\|_\infty \leq \varepsilon \text{ et } \|g - g_t\|_\infty \leq \varepsilon\}$  est relativement dense.

**Preuve :** Cela découle du corollaire 4.3.4.  $\square$

**Corollaire 4.3.6** La somme de deux fonctions continues et presques-périodiques de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$  est presque-périodique.

**Preuve :** Cela découle du corollaire 4.3.4 et du caractère uniformément continue de la somme dans  $E$ .  $\square$

### 4.3.2 Mesures presque-périodiques

Nous ne considérons que des mesures positives. Le résultat suivant est prouvé, sous des hypothèses plus générales, dans [21, 30, 63]. Notre objectif dans cette partie est d'en donner une preuve élémentaire.

**Théorème 4.3.7** Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction  $\hat{\mu}$  est presque-périodique ;
2. La mesure  $\mu$  est purement atomique.

La preuve découle des lemmes suivants.

**Lemme 4.3.8** *Soit  $f$  une fonction continue et presque-périodique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$ . On suppose que*

$$\frac{1}{(2R)^n} \int_{[-R,R]^n} |f(x)|^2 dx \longrightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

*Alors la fonction  $f$  est nulle.*

**Preuve :** Supposons en effet que la fonction  $f$  est non nulle. Il existe alors  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  pour lequel  $a := \|f(x_0)\|$  est non nul. Soit  $\alpha > 0$  tel que  $x \in (x_0 + B_\alpha)$  entraîne  $\|f(x)\| \geq 2a/3$ . Notons

$$A = x_0 + B_\alpha + P_{a/3}.$$

Pour tout  $x \in A$  on a  $\|f(x)\| \geq a/3$ . Comme  $P_{a/3}$  est relativement dense, on en déduit facilement

$$\limsup \frac{1}{(2R)^n} \int_{[-R,R]^n} \|f(x)\|^2 dx > 0.$$

Comme ce résultat est contraire à nos hypothèses, le lemme s'en déduit.  $\square$

**Lemme 4.3.9** *Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors*

$$\frac{1}{(2R)^n} \int_{[-R,R]^n} \widehat{\mu} \longrightarrow \mu(\{0\}).$$

**Preuve :** Remarquons

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2R)^n} \int_{[-R,R]^n} \widehat{\mu} &= \frac{1}{(2R)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) \int_{[-R,R]^n} dt e^{-2i\pi x \cdot t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) \prod_{k=1..n} \frac{\sin(2\pi x_k R)}{2\pi x_k R}. \end{aligned}$$

La mesure  $\mu$  étant finie, on en déduit le résultat par convergence dominée.  $\square$

Voici une version d'un lemme de Wiener :

**Lemme 4.3.10** *Soit  $\mu$  une mesure finie sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors*

$$\frac{1}{(2R)^n} \int_{[-R,R]^n} |\widehat{\mu}|^2 \longrightarrow \sum_{x \in \mathbb{R}^n} |\mu(\{x\})|^2.$$

**Preuve :** Il suffit d'appliquer le lemme 4.3.9 à  $\gamma = \mu * \check{\mu}$  où  $\check{\mu}$  est la mesure définie par  $\check{\mu}(A) = \mu(-A)$  ( $A$  borélien de  $\mathbb{R}^n$ ).  $\square$

**Preuve théorème 4.3.7 :** Il est clair que 2) entraîne 1). Le corollaire 4.3.6 montre en effet que le résultat est vrai si  $\mu$  n'a qu'un nombre fini d'atomes. Le cas général s'en déduit en remarquant qu'une limite uniforme de fonctions presque-périodiques est presque-périodique. Réciproquement, supposons que  $\widehat{\mu}$  est presque-périodique. Notons  $\mu_p$  sa partie atomique. Comme  $\widehat{\mu_p}$  est presque-périodique (d'après 2)  $\Rightarrow$  1)), la mesure  $\nu = \mu - \mu_p$  vérifie

1. La fonction  $\widehat{\nu}$  est presque-périodique;
2. La mesure  $\nu$  est finie et sans atomes.

Il suffit donc de prouver qu'une mesure  $\nu$  vérifiant ces deux propriétés est nulle. Or, d'après le lemme 4.3.10

$$\frac{1}{(2R)^n} \int_{[-R,R]^n} |\widehat{\nu}|^2 \longrightarrow 0.$$

Le lemme 4.3.8 entraîne alors  $\widehat{\nu} = 0$ . Le théorème s'en déduit.  $\square$

### 4.3.3 Extension

Soit  $(E, d)$  un espace pseudo-métrique. On considère une action de  $\mathbb{R}^n$  sur  $E$  telle que

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto x - t$  est une isométrie.
2. Pour tout  $x \in E$ ,  $t \mapsto x - t$  est continue.

On dit qu'un élément  $x \in E$  est presque-périodique si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble

$$P_\varepsilon := \{t \in \mathbb{R}^n : d(x - t, x) \leq \varepsilon\}$$

est relativement dense. Si  $x \in E$ , on note

$$O_x = \{x - t, t \in \mathbb{R}^n\}.$$

**Théorème 4.3.11** *Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $x$  est presque-périodique si et seulement si l'ensemble  $O_x$  est précompact dans  $E$ .*

**Preuve :** Supposons que  $x$  est presque-périodique. Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $R > 0$  tel que (4.11) soit vérifiée pour  $P_\varepsilon$ . L'application

$$\begin{cases} B_R & \rightarrow E \\ u & \mapsto x - u \end{cases}$$

est continue et donc uniformément continue. Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $u, v \in B_R$  vérifiant  $\|u - v\| \leq \alpha$ , on ait  $d(x - u, x - v) \leq \varepsilon$ . Soient  $v_1, \dots, v_n \in B_R$  tels que

$$B_R \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} (v_i + B_\alpha).$$

Soit maintenant  $t \in \mathbb{R}^n$ . Il existe  $s \in \mathbb{R}^n$  tel que

1.  $d(x, x + s) \leq \varepsilon$ .
2.  $t - s \in B_R$ .

Comme  $\mathbb{R}^n$  agit de manière isométrique, la première condition peut s'écrire  $d(x - (t - s), x - t) \leq \varepsilon$ . Comme  $t - s \in B_R$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $t - s \in v_i + B_\alpha$ . De  $\|(t - s) - v_i\| \leq \alpha$ ,  $t - s \in B_R$  et  $v_i \in B_R$ , on déduit  $d(x - (t - s), x - v_i) \leq \varepsilon$ . On a donc finalement  $d(x - t, x - v_i) \leq 2\varepsilon$  ce qui prouve

$$O_x \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} (x - v_i) + B_{2\varepsilon}.$$

L'ensemble  $O_x$  est ainsi précompact.

Supposons maintenant que  $O_x$  est précompact. Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $v_1, \dots, v_n$  tels que

$$O_x \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} (x - v_i) + B_\varepsilon.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $i$  tel que  $x - t \in (x - v_i) + B_\varepsilon$  c'est-à-dire  $d(x - t, x - v_i) \leq \varepsilon$ . Comme  $\mathbb{R}^n$  agit de manière isométrique, on a  $d(x, x - (t - v_i)) \leq \varepsilon$  et donc  $t - v_i$  appartient à  $P_\varepsilon$ . La relation (4.11) est donc vérifiée pour  $P_\varepsilon$  avec  $R = \max \|v_i\|$ .  $\square$

**Remarque :** Si  $(E, d)$  est métrique et complet, alors le théorème 4.3.11 peut s'écrire :  $x$  est presque-périodique si et seulement si  $O_x$  est relativement compact dans  $E$ .

## 4.4 Théorème ergodique uniforme

Nous établissons dans cette partie un résultat de convergence uniforme pour les moyennes ergodiques de fonctions continues en presque tout point utilisé dans le chapitre 2. Ce résultat est relativement connu et sa preuve ne repose que sur des idées classiques. Néanmoins, ne connaissant pas de références, nous avons jugé utile de produire une preuve.

Soit  $X$  un espace métrique compact. Soit  $(T_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$  une famille d'applications de  $X$  dans lui-même telle que

1. L'application

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times X & \rightarrow X \\ (t, x) & \mapsto T_t(x) \end{cases}$$

est mesurable.

2. Pour tout  $s, t \in \mathbb{R}^d$ , on a  $T_t \circ T_s = T_{s+t}$ .

3.  $T_0$  est l'identité de  $X$ .

Notons  $C(X)$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $R$ . Parmi les suites de boréliens de  $\mathbb{R}^d$  de mesure finie et non nulle on distingue les éléments de

$$\mathcal{M} = \left\{ (C_n)_n : \forall x \in \mathbb{R}^d, \frac{|C_n \Delta(C_n + x)|}{|C_n|} \rightarrow 0 \right\}.$$

**Exemple :** Soit  $B$  un borélien de mesure finie et non nulle. Soit  $(r_n)_n$  une suite de réels strictement positifs tendant vers  $+\infty$ . Posons  $C_n = r_n B$ . Alors  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$ . En effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}^s$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{|C_n \Delta(C_n + x)|}{|C_n|} = \frac{|r_n B \Delta(r_n B + x)|}{|r_n B|} = \frac{|B \Delta(B + \frac{x}{r_n})|}{|B|}$$

et la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto |B \Delta(B + t)| \end{cases}$$

est continue.  $\square$

Si  $f \in C(X)$ ,  $x \in X$  et  $C$  est un borélien de  $\mathbb{R}^d$  de mesure finie et non nulle, on pose

$$M_C(f)(x) = \frac{1}{|C|} \int_C f \circ T_t(x) dt.$$

Notre objectif est de prouver le résultat suivant.

**Théorème 4.4.1** *Supposons que  $(X, (T_t))$  est uniquement ergodique. Notons  $\mu$  l'unique probabilité invariante sur  $X$ . Soit  $f$  une application mesurable et bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable pour  $\mu$ . Alors pour tout suite  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$ ,  $M_{C_n}(f)$  converge uniformément vers  $\mu(f)$ .*

Notons  $M(X)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $X$  et  $M(X, T)$  l'ensemble des probabilités sur  $X$  invariantes par les applications  $T_t$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

**Théorème 4.4.2**  *$M(X)$  est compact pour la topologie de la convergence faible.*

**Preuve :** [71, Th 6.5]. □

**Lemme 4.4.3** *Soit  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$  et  $(\gamma_n)_n$  une suite de probabilités sur  $X$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mu_n \in M(X)$  par*

$$\mu_n(A) = \frac{1}{|C_n|} \int_{C_n} \gamma_n(T_{-t}A) dt, \quad A \text{ borélien de } X.$$

*Alors toute valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_n)_n$  appartient à  $M(X, T)$ .*

**Preuve :** Quitte à extraire, on peut supposer que  $\mu_n$  converge vers une certaine probabilité  $\mu$ . Soit  $s \in \mathbb{R}^d$  et  $f \in C(X)$ . On a

$$\mu(f) = \lim \mu_n(f) = \lim \frac{1}{|C_n|} \int_{C_n} dt \int_X \gamma_n(dx) f \circ T_t(x)$$

et donc

$$\mu(f \circ T_s) = \lim \frac{1}{|C_n|} \int_{C_n} dt \int_X \gamma_n(dx) f \circ T_{t+s}(x) = \lim \frac{1}{|C_n|} \int_{C_n+s} dt \int_X \gamma_n(dx) f \circ T_t(x).$$

On a donc

$$|\mu(f \circ T_s) - \mu(f)| \leq \limsup \frac{1}{|C_n|} \int_{C_n \Delta (s+C_n)} \|f\|_\infty dt \leq \limsup \frac{\|f\|_\infty |C_n \Delta (s+C_n)|}{|C_n|} = 0.$$

Cela conclut la preuve. □

**Théorème 4.4.4**  *$M(X, T)$  est non vide.*

**Preuve :** On pose  $C_n = nB_1$  où  $B_1$  est la boule centrée en l'origine et de rayon 1. On pose  $\gamma_n = \delta_x$  où  $x$  est un point fixé de  $X$ . Le lemme 4.4.3 nous donne une suite de probabilités  $(\mu_n)$  dont toute valeur d'adhérence est invariante. La compacité de  $M(X)$  permet de conclure. □

**Théorème 4.4.5** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Pour toute suite  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$  et pour toute  $f \in C(X)$  on a :  $M_{C_n}(f)$  converge uniformément vers une constante.
2. Il existe une suite  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$  telle que, pour toute  $f \in C(X)$ , on a :  $M_{C_n}(f)$  converge simplement vers une constante.
3.  $(X, (T_t))$  est uniquement ergodique.

Dans ces conditions, pour toute suite  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$  et pour toute  $f \in C(X)$ , la suite  $M_{C_n}(f)$  converge uniformément vers  $\mu(f)$  où  $\mu$  désigne l'unique probabilité invariante.

**Preuve :**

1  $\Rightarrow$  2 est clair.

2  $\Rightarrow$  3. Soit  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$  vérifiant 2. Soit  $\mu \in M(X, T)$ . Si  $f \in C(X)$ , on sait que  $M_{C_n}(f)$  converge simplement vers une constante. Notons  $M(f)$  cette constante. Comme  $\mu$  est invariante par les translations on a :

$$\int_X M_{C_n}(f)(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx).$$

Par convergence dominée on en déduit donc

$$\int_X M_{C_n}(f)(x) \mu(dx) \rightarrow \int_X M(f) \mu(dx).$$

Par conséquent,

$$\mu(f) = M(f).$$

Si on considère maintenant deux mesures  $\mu, \nu \in M(X, T)$ , on a alors  $\mu(f) = \nu(f)$  pour toute  $f \in C(X)$ . On a donc  $\mu = \nu$  [71, Th 6.2]).

3  $\Rightarrow$  1. Notons  $P$  l'unique élément de  $M(X, T)$ . Soit  $f \in C(X)$  et  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$ . Si  $M_{C_n}(f)$  converge uniformément vers une constante, alors cette constante est nécessairement  $E(f)$  (car  $E(M_{C_n}(f)) = E(f)$ ). Si la dernière assertion est vraie, la première est donc équivalente à

$$\forall (C_n)_n \in \mathcal{M} \forall f \in C(X), M_{C_n}(f) \text{ converge uniformément vers } E(f).$$

Raisonnons par l'absurde. Il existe alors  $(C_n)_n \in \mathcal{M}$ ,  $f \in C(X)$  telles que  $M_{C_n}(f)$  ne converge pas uniformément vers  $E(f)$ . Il existe donc  $\varepsilon > 0$  tel que, quitte à extraire,  $\|M_{C_n}(f) - E(f)\|_\infty > \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  notons  $x_n$  un point de  $X$  tel que  $|M_{C_n}(f)(x_n) - E(f)| \geq \varepsilon$ . Remarquons que  $M_{C_n}(f)(x_n) = \mu_n(f)$  où  $\mu_n \in M(X)$  est définie par

$$\mu_n(A) = \frac{1}{|C_n|} \int_{C_n} 1_A(T_t(x_n)) dt.$$

C'est-à-dire que  $\mu_n$  est la mesure associée à  $C_n$  et  $\gamma_n = \delta_{x_n}$  par le lemme 4.4.3. Par compacité de  $M(X)$ , quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que  $\mu_n$  converge vers une certaine probabilité  $\mu$ , qui appartient à  $M(X, T)$  par le lemme 4.4.3. On a alors  $\mu(f) = \lim \mu_n(f)$  et donc  $|\mu(f) - E(f)| \geq \varepsilon$ . Cela exclut  $\mu = P$  et contredit la troisième assertion.  $\square$

La preuve du théorème 4.4.1 découle du théorème 4.4.5 et des lemmes suivants.

**Lemme 4.4.6** Pour tout  $x \in X$  et pour tout  $r > 0$  il existe  $s \in ]0, r[$  tel que  $\mu(\partial B_s(x)) = 0$  où  $B_s(x)$  désigne la boule de rayon  $s$  centrée en  $x$ .

**Preuve :** Il suffit de constater que l'ensemble des  $s \in ]0, r[$  vérifiant  $\mu(\partial B_s(x)) > 0$  est au plus dénombrable.  $\square$

**Lemme 4.4.7** Si  $A$  et  $B$  sont deux boréliens de  $X$  de frontière négligeable, alors il en est de même de  $A \cup B$  et de  $A \setminus B$ .  $\square$

**Lemme 4.4.8** Soit  $f$  une application mesurable et borné de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable pour  $\mu$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction simple

$$s = \sum_i a_i 1_{A_i}$$

telle que

1.  $\forall i, \mu(\partial A_i) = 0$ .
2. Les  $A_i$  forment une partition de  $X$ .
3.  $s \leq f$ .
4.  $\mu(f - s) \leq \varepsilon$ .

**Preuve :** Soit  $D$  un borélien de mesure nulle pour  $\mu$  en dehors duquel  $f$  est continue. Par régularité de  $\mu$  [71, Th 6.1], il existe un ouvert  $V$  contenant  $D$  tel que  $\mu(V) \leq \varepsilon$ . Notons  $K$  le complémentaire de  $V$  dans  $X$ . L'ensemble  $K$  est compact. Soit  $x \in K$ . Comme tout point de  $K$  est un point de continuité de  $f$ , il existe, grâce au lemme 4.4.6,  $r_x > 0$  tel que  $O_x = B_{r_x}(x)$  vérifie

1.  $\mu(\partial O_x) = 0$ .
2.  $\forall y, z \in O_x, |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$ .

La compacité de  $K$  nous permet de choisir parmi les  $(O_x)$ ,  $x \in K$  une sous famille finie  $(O_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  telle que  $K \subset \bigcup_i O_i$ . Posons, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$A_i = O_i \setminus \bigcup_{j < i} O_j.$$

Grâce au lemme 4.4.7, les  $A_i$  sont de frontière négligeable. Ils forment par ailleurs une partition de  $\bigcup O_i$ . Notons  $B$  le complémentaire de  $\bigcup O_i$ . La frontière de  $B$  est négligeable. Soit  $m = \inf f$ . Posons

$$a_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$$

et

$$s = m 1_B + \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i 1_{A_i}.$$

La fonction  $s$  est une fonction simple qui vérifie les trois premiers points du lemme.

$$\mu(f - s) = \int_B (f(x) - m) \mu(dx) + \sum_i \int_{A_i} (f(x) - a_i) \mu(dx).$$

Mais  $A_i \subset O_i$  donc, pour tout  $x, y \in A_i$ ,  $f(x) - f(y) \leq \varepsilon$ . En particulier,  $f(x) - a_i \leq \varepsilon$ . On a donc

$$\sum_i \int_{A_i} (f(x) - a_i) \mu(dx) \leq \sum_i \mu(A_i) \varepsilon \leq \varepsilon$$

car les  $A_i$  sont disjoints. Notons  $M = \sup f$ . On a  $\int_B (f(x) - m) \mu(dx) \leq (M - m) \mu(B)$ . Mais  $B$  est le complémentaire de  $\bigcup O_i$ ,  $\bigcup O_i$  contient  $K$  et  $K$  est le complémentaire de  $V$ . Par conséquent,  $B \subset V$ . On a donc  $\mu(B) \leq \mu(V) \leq \varepsilon$ . Ainsi

$$\int_B (f(x) - m) \mu(dx) \leq (M - m) \varepsilon.$$

On a donc

$$\mu(f - s) \leq (1 + M - m) \varepsilon.$$

Le lemme est prouvé.  $\square$

**Lemme 4.4.9** *Soit  $f$  une application mesurable et bornée de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable pour  $\mu$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction continue  $g$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que*

1.  $g \leq f$ .
2.  $\mu(f - g) \leq \varepsilon$ .

**Preuve :** Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit

$$s = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i 1_{A_i}$$

la fonction simple donnée par le lemme 4.4.8. Notons  $m$  (resp.  $M$ ) le minimum (resp. le maximum) de  $s$ . Posons

$$T = (M - m)n.$$

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Comme la frontière de  $A_i$  est négligeable, on a

$$\mu(\overset{\circ}{A_i}) = \mu(A_i).$$

La régularité de  $\mu$  [71, Th 6.1.] assure l'existence d'un fermé  $K_i \subset \overset{\circ}{A_i}$  tel que  $\mu(K_i) \geq \mu(\overset{\circ}{A_i}) - \varepsilon/T = \mu(A_i) - \varepsilon/T$ . Soit maintenant  $g_i$  une application continue de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$1_{K_i} \leq g_i \leq 1_{\overset{\circ}{A_i}}.$$

Posons

$$g = m + \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} (a_i - m) g_i.$$

Cette application est continue. Pour tout  $i$ ,  $a_i - m$  est positif, par conséquent

$$(a_i - m) g_i \leq (a_i - m) 1_{\overset{\circ}{A_i}} \leq (a_i - m) 1_{A_i}.$$

On a donc

$$g \leq m - \sum_i m 1_{A_i} + \sum_i a_i 1_{A_i} \leq \sum_i a_i 1_{A_i} \leq s \leq f$$

car les  $A_i$  forment une partition de  $X$ . La fonction  $g$  vérifie donc le premier point du lemme.

$$\mu(g) = m + \sum_i (a_i - m)\mu(g_i)$$

Mais

$$\mu(g_i) \geq \mu(K_i) \geq \mu(A_i) - \varepsilon/T.$$

Comme les  $a_i - m$  sont positifs, on a donc

$$\mu(g) \geq m + \sum_i (a_i - m)\mu(1_{A_i}) - \sum_i (a_i - m)\varepsilon/T \geq \mu(s) - \sum_i (a_i - m)\varepsilon/T$$

en utilisant le fait que les  $A_i$  forment une partition. Finalement, on a

$$\mu(g) \geq \mu(s) - \varepsilon.$$

On a donc  $\mu(f - g) \leq 2\varepsilon$ . □

**Preuve du théorème 4.4.1 :** Soit  $\varepsilon > 0$ . Le lemme 4.4.9 assure l'existence d'une fonction continue  $f_1 \leq f$  vérifiant  $\mu(f - f_1) \leq \varepsilon$ . En l'appliquant à  $-f$  on obtient une fonction continue  $f_2 \geq f$  vérifiant  $\mu(f_2 - f) \leq \varepsilon$ . Le théorème 4.4.5 s'applique pour  $f_1$  et  $f_2$  :  $M_{C_n}(f_1)$  converge uniformément vers  $\mu(f_1)$  et  $M_{C_n}(f_2)$  converge uniformément vers  $\mu(f_2)$ . Mais, pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $x \in X$

$$M_{C_n}(f_1)(x) \leq M_{C_n}(f)(x) \leq M_{C_n}(f_2)(x).$$

Par conséquent, pour  $n$  assez grand et pour tout  $x \in X$  on a :

$$\mu(f_1) - \varepsilon \leq M_{C_n}(f)(x) \leq \mu(f_2) + \varepsilon$$

et donc

$$\mu(f) - 2\varepsilon \leq M_{C_n}(f)(x) \leq \mu(f) + 2\varepsilon.$$

Le théorème s'en déduit. □



# Problèmes ouverts

## Diffraction

Dans le domaine de la diffraction, nous avons donné des caractérisations topologiques et dynamiques des ensembles de Patterson, c'est-à-dire des ensembles dont la mesure de diffraction est discrète. Dans l'optique de comprendre les cristaux, dont le spectre de diffraction n'est qu'essentiellement discret, il serait intéressant d'essayer d'affaiblir l'hypothèse faite sur la mesure de diffraction.

## Système de particules avec migration

### Nombre fini de particules sur le cercle - dynamique discrète

**Lois stationnaires.** Considérons une configuration stationnaire  $\chi$  comportant  $n$  particules sur le cercle. Notons  $X$  la longueur typique d'un intervalle entre deux particules successives. Nous ne sommes pas parvenu à obtenir une description satisfaisante de la loi de  $\chi$ , ni même de celle de  $X$ , en dehors du cas  $n = 2$ . Les résultats que nous avons obtenus dans le cas général concernent essentiellement la loi de  $X$ .

Le premier de ces résultats donne un contrôle des premiers moments de  $X$ . Nous nous sommes en fait limité à ce dont nous avions besoin pour prouver l'existence d'une configuration stationnaire sur la droite. Il est sans doute possible de réussir à contrôler davantage de moments. Les techniques que nous avons employé ne nous permettent cependant pas d'expliquer ces moments (même en se limitant aux premiers moments et au cas  $n = 3$ ).

Le second de ces résultats donne un équivalent logarithmique de la queue de la distribution en zéro. Il serait intéressant d'obtenir un meilleur contrôle de cette queue. En particulier, en posant  $A = nX$ , où  $n$  désigne le nombre de particules, il serait intéressant d'avoir un contrôle de la queue de la distribution de  $A$  n'explosant pas lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il serait également souhaitable par exemple d'étudier la queue de la distribution à l'infini.

Enfin, il serait intéressant d'obtenir des informations plus globales sur la répartition des particules sous la loi stationnaire, par exemple en étudiant les corrélations entre les longueurs des différents intervalles.

**Vitesse de convergence.** Notre preuve de la convergence exponentielle en loi vers l'unique loi stationnaire nous donne une minoration explicite de la vitesse de convergence.

Cette estimation est cependant très médiocre, il serait intéressant d'en donner une plus précise.

## Cas de la droite - dynamique continue

Dans le cas de la dynamique sur la droite, il reste de nombreuses questions importantes non résolues. Nous en citons quelques unes.

**Unicité de la loi stationnaire.** Nous avons prouvé l'unicité en loi d'une configuration  $\chi$  vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. convergence presque sûre de  $(2R)^{-1}\text{card}(\chi \cap [-R, R])$  vers 1 ;
2. invariance en loi par la dynamique ;
3. invariance en loi par translation.

Il est naturel de se demander si ce résultat d'unicité reste vrai sans la troisième hypothèse, autrement dit si les deux premières hypothèses entraînent la troisième.

### Convergence vers la loi stationnaire.

**Description de la loi stationnaire.** Notons  $\chi$  une configuration sur la droite vérifiant les propriétés 1-3 ci-dessus. Pour tout entier  $n \geq 2$ , considérons  $\bar{\chi}_n$  une configuration stationnaire sur le cercle comportant  $n$  particules. Notons  $\chi_n$  la configuration  $n$ -périodique associée sur la droite. Nous avons obtenu l'existence d'une configuration stationnaire sur la droite à partir de la suite  $(\chi_n)_n$ , mais n'avons pu établir la convergence de  $\chi_n$  vers  $\chi$ . Il serait souhaitable d'établir, ou d'infirmer, cette convergence.

A défaut de décrire explicitement la loi de  $\chi$ , on peut se demander par exemple si les propriétés obtenus dans le cas du cercle restent vrai dans le cas de la droite : contrôle des moments, répulsion.

**Diffusion.** On peut par exemple se donner une configuration stationnaire et considérer l'évolution de l'une des particules de la configuration.

## Extensions à la dimension supérieure

Pour se rapprocher de la réalité physique, il seraient intéressant d'étudier ce modèle en dimensions 2 ou 3. Il serait notamment alors possible de considérer les propriétés de diffusion dans un tel modèle.

Plusieurs des arguments que nous avons employés étaient spécifiques au cas de la droite et ne se généralisent pas directement en dimension supérieure. Il est en ainsi par exemple de l'argument suivant : si l'on modifie la position d'une particule à l'instant initial, sans modifier l'ordre des particules, la perturbation introduite ne peut se propager, au cours du temps, que de particules voisines en particules voisines.

Notons par ailleurs que la définition même de la dynamique amène tout naturellement à introduire et à étudier la mosaïque de Voronoï associée à la configuration (une particule se déplaçant en un point de migration si ce point appartient à sa cellule de Voronoï).

# Liste de publications

- [1] J.-B. Gouéré. Diffraction et mesure de Palm des processus ponctuels. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(1) :57–62, 2003.
- [2] J.-B. Gouéré. Quasicrystals and almost periodicity. *Comm. Math. Phys.* A paraître.
- [3] J.-B. Gouéré. Système de particules avec migration. En préparation.



# Bibliographie

- [1] D. Aldous and P. Diaconis. Hammersley's interacting particle process and longest increasing subsequences. *Probab. Theory Related Fields*, 103(2) :199–213, 1995.
- [2] E.D. Andjel and H. Guiol. Long range exclusion processes, generator and invariant measures. *Ann. Probab.*, 2004. To appear.
- [3] Michael Baake and Moritz Höffe. Diffraction of random tilings : some rigorous results. *J. Statist. Phys.*, 99(1-2) :216–261, 2000.
- [4] Michael Baake and Daniel Lenz. Deformation of delone dynamical systems and pure point diffraction. Preprint, 2004.
- [5] Michael Baake and Daniel Lenz. Dynamical systems on translation bounded measures : Pure point dynamical and diffraction spectra. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2004. To appear.
- [6] Michael Baake and Robert V. Moody. Diffractive point sets with entropy. *J. Phys. A*, 31(45) :9023–9039, 1998.
- [7] Michael Baake and Robert V. Moody, editors. *Directions in mathematical quasicrystals*, volume 13 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [8] Michael Baake and Robert V. Moody. Weighted Dirac combs with pure point diffraction. Preprint, 2002.
- [9] Michael Baake, Robert V. Moody, and Peter A. B. Pleasants. Diffraction from visible lattice points and  $k$ th power free integers. *Discrete Math.*, 221(1-3) :3–42, 2000. Selected papers in honor of Ludwig Danzer.
- [10] François Baccelli and Pierre Brémaud. *Elements of queueing theory*, volume 26 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. Palm martingale calculus and stochastic recurrences, Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [11] Guillaume Bernuau and Michel Duneau. Fourier analysis of deformed model sets. In *Directions in mathematical quasicrystals*, pages 43–60. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [12] Abram S. Besicovitch and Harald Bohr. Almost periodicity and general trigonometric series. *Acta Math.*, 57 :203–292, 1931.
- [13] R. Blüher, P. Scharwaechter, W. Frank, and H. Kronmüller. First low-temperature radiotracer studies of diffusion in icosahedral quasicrystals. *Phys. Rev. Lett.*, 80(5) :1014, 1998.

- [14] E. Bombieri and J. E. Taylor. Which distributions of matter diffract ? An initial investigation. *J. Physique*, 47(7, Suppl. Colloq. C3) :C3–19–C3–28, 1986. International workshop on aperiodic crystals (Les Houches, 1986).
- [15] Enrico Bombieri and Jean E. Taylor. Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory : some preliminary connections. In *The legacy of Sonya Kovalevskaya (Cambridge, Mass., and Amherst, Mass., 1985)*, volume 64 of *Contemp. Math.*, pages 241–264. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [16] Robert Burton and Robin Pemantle. Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances. *Ann. Probab.*, 21(3) :1329–1371, 1993.
- [17] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai. *Ergodic theory*. Springer-Verlag, New York, 1982. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ.
- [18] J.M. Cowley. *Diffraction Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1995. 3rd ed.
- [19] Richard Durrett. *Probability : theory and examples*. Duxbury Press, Belmont, CA, second edition, 1996.
- [20] Steven Dworkin. Spectral theory and x-ray diffraction. *J. Math. Phys.*, 34(7) :2965–2967, 1993.
- [21] W. F. Eberlein. A note on Fourier-Stieltjes transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 :310–312, 1955.
- [22] Michael E. Fisher and John Stephenson. Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. II. Dimer correlations and monomers. *Phys. Rev. (2)*, 132 :1411–1431, 1963.
- [23] Jesús Gil de Lamadrid and Loren N. Argabright. Almost periodic measures. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 85(428) :vi+219, 1990.
- [24] Jean-Baptiste Gouéré. Quasicrystals and almost periodicity. *Comm. Math. Phys.* A paraître.
- [25] Jean-Baptiste Gouéré. Système de particules avec migration. En préparation.
- [26] Jean-Baptiste Gouéré. Diffraction et mesure de Palm des processus ponctuels. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(1) :57–62, 2003.
- [27] H. Guiol. Un résultat pour le processus d'exclusion à longue portée. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(4) :387–405, 1997.
- [28] H. Guiol. About the long range exclusion process. *Markov Process. Related Fields*, 10(3) :457–476, 2004.
- [29] J. M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I : Theory of statistics*, pages 345–394, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [30] Edwin Hewitt. Representation of functions as absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 :663–670, 1953.
- [31] S. Hocker and F. Gähler. Aluminium diffusion in decagonal quasicrystals. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 2004.
- [32] A. Hof. Diffraction by aperiodic structures at high temperatures. *J. Phys. A*, 28(1) :57–62, 1995.

- [33] A. Hof. On diffraction by aperiodic structures. *Comm. Math. Phys.*, 169(1) :25–43, 1995.
- [34] M.V. Jaric and E.S. Sorensen. Self-diffusion in random-tiling quasicrystals. *Phys. Rev. Lett.*, 73(18) :2464, 1994.
- [35] Olav Kallenberg. *Random measures*. Akademie-Verlag, Berlin, fourth edition, 1986.
- [36] P.A. Kalugin and André Katz. A mechanism for self-diffusion in quasi-crystals. *Europhysics Letters*, 21 :921, 1993.
- [37] André Katz. Introduction aux quasicristaux. *Astérisque*, (252) :Exp. No. 838, 3, 81–103, 1998. Séminaire Bourbaki. Vol. 1997/98.
- [38] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.
- [39] Richard Kenyon. Local statistics of lattice dimers. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(5) :591–618, 1997.
- [40] Jeffrey C. Lagarias. Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. In *Directions in mathematical quasicrystals*, volume 13 of *CRM Monogr. Ser.*, pages 61–93. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [41] Jeffrey C. Lagarias and Peter A. B. Pleasants. Repetitive Delone sets and quasicrystals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(3) :831–867, 2003.
- [42] J.-Y. Lee, R. V. Moody, and B. Solomyak. Pure point dynamical and diffraction spectra. *Ann. Henri Poincaré*, 3(5) :1003–1018, 2002.
- [43] Jeong-Yup Lee, Robert V. Moody, and Boris Solomyak. Consequences of pure point diffraction spectra for multiset substitution systems. *Discrete Comput. Geom.*, 29(4) :525–560, 2003.
- [44] Ron Lifshitz. Quasicrystals : a matter of definition. *Found. Phys.*, 33(12) :1703–1711, 2003. Special issue dedicated to David Mermin, Part III.
- [45] Thomas M. Liggett. Long range exclusion processes. *Ann. Probab.*, 8(5) :861–889, 1980.
- [46] G. Matheron. *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1975. With a foreword by Geoffrey S. Watson, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [47] Yves Meyer. Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers. In *Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994)*, pages 3–16. Springer, Berlin, 1995.
- [48] Jesper Møller. *Lectures on random Voronoi tessellations*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [49] Robert V. Moody, editor. *The mathematics of long-range aperiodic order*, volume 489 of *NATO Advanced Science Institutes Series C : Mathematical and Physical Sciences*, Dordrecht, 1997. Kluwer Academic Publishers Group.
- [50] Robert V. Moody. Meyer sets and their duals. In *The mathematics of long-range aperiodic order (Waterloo, ON, 1995)*, pages 403–441. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [51] Robert V. Moody. Model sets : a survey. Preprint, 2001.

- [52] Robert V. Moody. Uniform distribution in model sets. *Canad. Math. Bull.*, 45(1) :123–130, 2002.
- [53] Robert V. Moody. Mathematical quasicrystals : A tale of two topologies. To appear in the Proceedings of the International Congress of Mathematical Physics, Lisbon, 2003.
- [54] Robert V. Moody and Nicolae Strungaru. Point sets and dynamical systems in the autocorrelation topology. *Canad. Math. Bull.*, 47(1) :82–99, 2004.
- [55] J. Neveu. Processus ponctuels. In *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour, VI—1976*, pages 249–445. Lecture Notes in Math., Vol. 598. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [56] International Union of Crystallography. *Acta Cryst. A*, 48 :922–946, 1992.
- [57] Martine Queffélec. *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, volume 1294 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [58] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [59] Stuart A. Rice. Dynamical theory of diffusion in crystals. I. *Phys. Rev. (2)*, 112 :804–811, 1958.
- [60] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [61] Walter Rudin. *Fourier analysis on groups*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [62] Martin Schlottmann. Generalized model sets and dynamical systems. In *Directions in mathematical quasicrystals*, pages 143–159. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [63] I. E. Segal. The class of functions which are absolutely convergent Fourier transforms. *Acta Sci. Math. Szeged*, 12(Leopoldo Fejer et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatus, Pars B) :157–161, 1950.
- [64] Marjorie Senechal. *Quasicrystals and geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [65] Timo Seppäläinen. A microscopic model for the Burgers equation and longest increasing subsequences. *Electron. J. Probab.*, 1 :no. 5, approx. 51 pp. (electronic), 1996.
- [66] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J.W. Cahn. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1951–1953, 1984.
- [67] A. N. Shiryaev. *Probability*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1996. Translated from the first (1980) Russian edition by R. P. Boas.
- [68] Boris Solomyak. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(3) :695–738, 1997.
- [69] Boris Solomyak. Spectrum of dynamical systems arising from Delone sets. In *Quasicrystals and discrete geometry (Toronto, ON, 1995)*, pages 265–275. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

- [70] Frank Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Math.*, 5 :246–290 (1970), 1970.
- [71] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [72] N. Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math.*, 5 :1–18, 1939.