

# THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

## DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

École Doctorale : Informatique & Télécommunications  
Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Thomas Haberkorn**

### **Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle**

Soutenue publiquement le 18 Octobre 2004 devant le jury composé de :

MM. B. Bonnard *Rapporteurs*  
G. Colasurdo

MM. R. Epenoy *Examineurs*  
J. Gergaud  
P. Legendre

M. Daydé *Invité*

M. J. Noailles *Directeur de thèse*



*Ce qui se paie n'a guère de valeur ; voilà la croyance  
que je cracherai au visage des esprits mercantiles.*  
(Friedrich Nietzsche)

Quelqu'un demandait à Antisthène ce qu'il enseignerait à son fils.  
Antisthène répondit :  
*La philosophie, s'il doit vivre en compagnie des dieux,  
la rhétorique, s'il vit avec les hommes.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Problème traité et difficultés</b>	<b>1</b>
1.1	Le problème physique . . . . .	1
1.2	Modélisation . . . . .	3
1.3	Contrôle optimal . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Méthodes homotopiques</b>	<b>23</b>
2.1	Présentation générale . . . . .	23
2.2	Homotopie associée à notre problème . . . . .	24
2.3	Homotopie discrète . . . . .	28
2.4	Homotopie simpliciale . . . . .	30
2.5	Homotopie différentielle . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Aspects numériques</b>	<b>37</b>
3.1	HOMPACK90 . . . . .	38
3.2	Jacobien . . . . .	44
3.3	Initialisation . . . . .	46
3.4	Mise à l'échelle . . . . .	49
3.5	Intégration . . . . .	52
3.6	Rubrique-à-brac . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Résultats et interprétations</b>	<b>59</b>
4.1	Les critères homotopiques . . . . .	60
4.2	Première formulation . . . . .	63
4.3	Traitement des minima locaux . . . . .	68
4.4	Troisième formulation . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Conditions initiales, lien impulsionnel</b>	<b>101</b>
5.1	Sensibilité . . . . .	101
5.2	Grandes variations . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Contrainte de cône</b>	<b>137</b>
6.1	Transfert coplanaire en temps minimum . . . . .	137
6.2	Transfert non coplanaire en temps minimum . . . . .	144
6.3	Transfert coplanaire, maximisation de la masse finale . . . . .	149

<b>7</b>	<b>Approche directe</b>	<b>155</b>
7.1	Méthode utilisée : Knitro . . . . .	155
7.2	Problèmes simples . . . . .	157
7.3	Transfert orbital . . . . .	162
<b>A</b>	<b>Détails des minimisations</b>	<b>181</b>
A.1	Critère convexe, commande $\mathcal{H}$ -minimale . . . . .	181
A.2	Critère puissance, commande $\mathcal{H}$ -minimale . . . . .	182
A.3	Système non autonome, minimisation du Hamiltonien . . . . .	183
<b>B</b>	<b>Des contraintes de cônes et des commandes <math>\mathcal{H}</math>-minimales</b>	<b>185</b>
B.1	Minimisation du temps de transfert . . . . .	185
B.2	Maximisation de la masse finale . . . . .	186
<b>C</b>	<b>Cas du transfert impulsif</b>	<b>189</b>
C.1	Le problème d'optimisation . . . . .	189
C.2	Application à nos transferts . . . . .	191

# Introduction

## Sujet

Le présent manuscrit se rapporte à l'application du contrôle optimal à l'un de ses domaines de prédilection, à savoir la mécanique spatiale. En effet, les problèmes de mécanique spatiale, en l'occurrence de transfert orbital, se prêtent naturellement à une écriture sous forme de problèmes de contrôle optimal. On s'intéresse dans notre cas au transfert d'un satellite d'une orbite initiale basse et fortement elliptique jusqu'à l'orbite géostationnaire équatoriale, le tout considéré dans un référentiel géocentrique. Ce satellite est de plus muni d'une propulsion de type électro-ionique et donc de faible magnitude. De tels transferts ont déjà été abondamment étudiés sous l'angle de la minimisation du temps de transfert [14, 34, 49], c'est-à-dire de la recherche d'une loi de commande (direction et magnitude de la propulsion au cours du temps) minimisant la durée nécessaire à l'accomplissement de la manœuvre. Notre travail quant à lui s'oriente pour la majeure partie vers la recherche d'une loi de commande minimisant la consommation de carburant et donc maximisant la charge utile de l'engin spatial. Un tel critère est dans la continuation logique du précédent tout comme pourrait l'être un enrichissement de la modélisation de nos transferts orbitaux par adjonction de contraintes opérationnelles supplémentaires (dont un aspect est également traité dans ce rapport).

## Idée générale

Afin de traiter les problèmes de contrôle optimal, nous disposons d'un outil très puissant qui est le Principe du Maximum de Pontryagin [24, 11]. Ce principe a donné naissance aux méthodes de résolution dites indirectes. Parmi celles-ci notre choix s'est porté sur le tir simple qui consiste à ramener la résolution d'un problème aux deux bouts à la recherche d'un zéro d'une application non linéaire. L'avantage de cette méthode (et de toutes les méthodes indirectes) est sans conteste sa rapidité et sa précision qui sont des caractéristiques (spécialement la dernière) indispensables en aérospatial. Le revers de la médaille est une grande sensibilité du tir simple par rapport au point de départ de l'algorithme de recherche de zéro, encore exacerbée par la nature de nos lois de poussées optimales. Cette sensibilité, déjà présente,

dans une moindre mesure, dans le problème de transfert en temps minimum avait dans ce cas été traitée avec une stratégie de continuation sur le module de la poussée [14]. Pour notre part nous avons choisi d'employer une méthode homotopique [3] permettant d'initialiser de manière plus que satisfaisante notre méthode de tir simple. L'homotopie considérée relie un critère de minimisation de l'énergie à celui désiré de maximisation de la masse finale. De part les propriétés de régularité de l'homotopie, nous utilisons une continuation différentielle qui s'est révélée tout à fait adaptée. En effet, nous avons avec succès résolu le problème de transfert pour des poussées descendant jusqu'à 20  $mN$  (milli-Newton) ce pour un satellite d'une masse initiale de 1500  $kg$ . Plus que la poussée minimale atteinte, l'efficacité de cette méthode vient du fait que pour obtenir un transfert solution, elle ne nécessite aucune connaissance *a priori* sur la structure de la stratégie de poussée solution. En effet, les transferts à masse finale maximum sont connus pour engendrer des commandes discontinues de norme soit maximale soit nulle. On peut traiter de tels problèmes grâce à une méthode de tir multiple [50] mais cela nécessite de connaître les instants de commutation (nombre, localisation) du contrôle solution. Or, dans notre cas, le nombre d'instant de commutation est inconnu et très élevé (de l'ordre de 1700 pour une poussée de 0.1 Newton).

Notre travail a débouché sur l'élaboration de 2 logiciels, **MfMax-v0** [39, 41] et **MfMax-v1** [40, 41], basés sur le logiciel **TfMin** [20] pour le tir simple et le paquetage **HOMPACK90** [61] pour l'homotopie différentielle.

## Organisation du rapport

Ce rapport est structuré en 7 chapitres distincts. Le premier introduit le problème de transfert orbital qu'on se propose de résoudre ainsi que la modélisation choisie qui est celle des coordonnées de Gauss, principalement pour des raisons de stabilité numérique. Nous présentons également la méthode de tir simple de façon succincte ainsi que les difficultés particulières engendrées par notre critère de maximisation de la masse finale. Ceci nous amène directement au second chapitre qui est une réponse au problème de sensibilité du tir simple.

Ce second chapitre présente de manière générale les méthodes homotopiques pour ensuite donner spécifiquement l'approche retenue pour pallier la sensibilité excessive du tir simple. Elle consiste à relier le critère de minimisation de l'énergie (carré de la norme  $L^2$  du contrôle) à celui de minimisation de la consommation (norme  $L^1$  du contrôle) qui est équivalent à la maximisation de la masse finale. On continue en donnant quelques propriétés de l'application homotopique utilisée qui justifieront notre choix de méthode du suivi de chemin de zéros. Nous enchaînons alors tout naturellement sur une présentation de trois de ces méthodes qui sont la continuation discrète, l'homotopie simpliciale et la continuation différentielle. Nous utilisons en

pratique cette dernière.

Le troisième chapitre est consacré aux aspects numériques de notre méthode de résolution. On commence par préciser l'algorithme de suivi de chemin de zéros qui fait partie du paquetage **HOMPACK90** [61] et correspond à l'intégration par une méthode de prédiction-corrrection du problème à valeur initiale associé au chemin de zéros. Nous présentons ensuite divers aspects numériques tels que le calcul du jacobien, l'initialisation de notre méthode de résolution, la mise à l'échelle des différentes variables ou l'intégrateur numérique utilisé.

Le quatrième chapitre donne les principaux résultats obtenus sur notre problème de transfert orbital avec maximisation de la masse finale. Dans un premier temps on compare deux façons différentes de relier *homotopiquement* le critère de minimisation de l'énergie à celui de minimisation de la consommation. On présente ensuite les résultats de la première formulation employée qui nous montre clairement l'existence de minima locaux que nous traitons par une reformulation de notre problème. Cette reformulation nous permet de donner des résultats tout à fait satisfaisants, ainsi que de nombreuses interprétations, notamment sur l'évolution de la masse finale en fonction du temps de transfert alloué. Nous finissons par une troisième formulation basée sur la plus grande régularité du système dynamique exprimé en fonction de la longitude par rapport au système autonome. Cette dernière formulation donne des résultats similaires à la précédente en termes de stratégie optimale mais permet d'atteindre des poussées plus faibles avec des temps d'exécution moindres et une mise en œuvre plus pratique. On note de plus que cette formulation nous a donné la possibilité d'effectuer les nombreux tests ayant donné naissance au chapitre suivant.

Le cinquième chapitre traite ensuite de la sensibilité de notre transfert par rapport à l'orbite initiale. On y étudie l'influence de faibles changements sur la forme de l'orbite initiale et sur l'inclinaison. On poursuit par l'étude de plusieurs jeux de transferts orbitaux qui sont cette fois-ci relativement éloignés du transfert nominal. Ceci nous permettant d'établir quelques constatations sur la spécificité de notre transfert orbital et sur l'influence de l'orbite initiale sur le problème de minimisation du temps de transfert ou de maximisation de la masse finale. Nous relevons également quelques similitudes entre le transfert à poussée faible et le transfert impulsif. Ce chapitre peut aussi être vu comme une validation de la robustesse de notre méthode de résolution.

L'avant dernier chapitre étudie l'introduction d'une contrainte de cône (double puis quadruple) dans notre problème de transfert orbital avec comme critère la minimisation du temps de transfert suivi de la minimisation de la consommation. L'approche utilisée ici est encore une fois homotopique bien qu'à l'usage il apparaisse que cette approche ne soit pas toujours adaptée, notamment dans le cas d'un transfert non-coplanaire. Il s'agit cependant d'une étude préliminaire qui nous permet tout de même d'exposer un certain

nombre de résultats intéressants comme la faisabilité pratique (augmentation non prohibitive du temps de transfert et incidemment de la consommation) de tels transferts.

Le dernier chapitre présente une approche directe pour la résolution du problème de transfert orbital avec maximisation de la masse finale. Cette approche est basée sur la discrétisation totale de l'état et du contrôle mais ne donne pas de résultats très prometteurs du fait, entre autre, de la non régularité du critère considéré. Nous notons cependant que l'approche directe a été la première approche nous ayant donné des résultats sur le transfert en masse maximum [35, 42] mais avec cette fois une paramétrisation du contrôle uniquement.

## Collaborations

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une longue et fructueuse collaboration entre le groupe Contrôle de l'équipe APO <sup>1</sup> située à l'ENSEEIH et composante de l'IRIT <sup>2</sup>, Unité Mixte de Recherche du CNRS, avec la Division de Mécanique Spatiale du CNES <sup>3</sup> de Toulouse. Les thèses [44, 14, 34] et les rapports [16, 19, 18, 22, 17] témoignent du travail accompli sur cette thématique des transferts orbitaux à poussée faible.

---

<sup>1</sup>Algorithmique Parallèle et Optimisation

<sup>2</sup>Institut de Recherche en Informatique de Toulouse

<sup>3</sup>Centre National d'Etude Spatiale

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Joseph Noailles, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT), pour m'avoir accordé sa confiance ainsi que pour m'avoir transmis le goût de cette discipline que sont les mathématiques appliqués. Sans lui, ce doctorat n'eut pas été possible et je lui en suis très reconnaissant. Il me faut également remercier Joseph Gergaud, Maître de Conférence à l'INPT, pour son encadrement des plus efficace, sa patience face à mes questions pas toujours des plus pertinentes ainsi que pour ses qualités humaines. Je suis aussi redevable à Jean-Baptiste Caillau, Maître de Conférence à l'INPT, pour son travail relatif au problème de transfert en temps minimum mais également pour son indéfectible disponibilité. Ma gratitude va aussi à Richard Epenoy, Ingénieur au Centre National d'Études Spatiales (CNES), pour m'avoir fait profiter de ses compétences spatiales tout comme humoristiques ainsi que pour avoir fait partie de mon jury. Mes remerciements vont également à mes *colocataires* du bureau F201, les doctorants Pierre Martinon et Ming Chau, à Dorin Préda et Romain Dujol, également doctorants. Je souhaite également remercier tout les membres du Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées (LIMA) de l'École National Supérieure d'Électrotechnique d'Électronique d'Informatique d'Hydraulique et des Télécommunications (ENSEEIH) de Toulouse ainsi que celui de toute l'ENSEEIH.

Ma gratitude va aussi à Bernard Bonnard, Professeur à l'Université de Dijon, et à Guido Colasurdo, Professeur à la Politecnico di Torino, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail en tant que spécialistes de la théorie du contrôle et de la mécanique spatiale respectivement. Je remercie tout aussi chaleureusement Paul Legendre, Ingénieur CNES, pour l'intérêt qu'il a porté a mes travaux, pour avoir abreuvé notre équipe de cette thématique qu'est le transfert orbital et pour avoir accepté d'être membre du jury de ma soutenance. Mes remerciements vont également à Michel Daydé, Professeur à l'INPT et directeur du LIMA, pour avoir accepté de faire partie de mon jury.



# Chapitre 1

## Problème traité et difficultés

Ce chapitre est décomposé en trois sections dont la première est consacrée à l'introduction du problème physique traité dans cette thèse (qu'on retrouve aussi dans [14],[34]). La seconde section se penche sur la modélisation du problème introduit. Finalement, la dernière section s'attache à appliquer le principe du maximum de Pontryagin au problème modélisé et à mettre en évidence les difficultés de la méthode de tir simple.

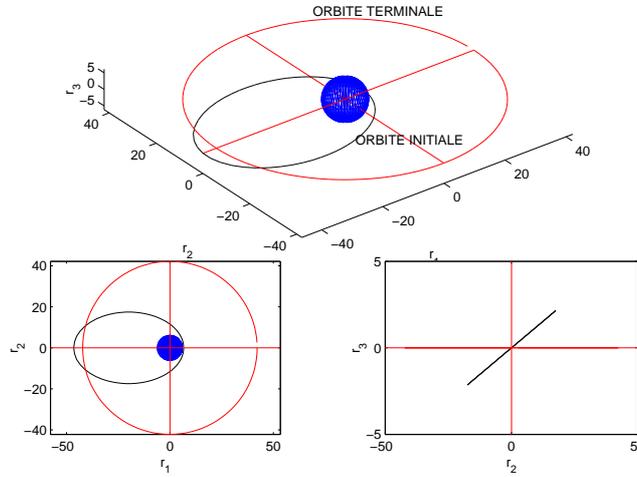
### 1.1 Le problème physique

#### Transfert orbital

On considère un satellite en orbite autour de la Terre. On souhaite transférer ce satellite de son orbite initiale basse fortement elliptique et légèrement inclinée (par rapport au plan équatorial) jusqu'à l'orbite géostationnaire équatoriale (cf. figure 1.1). Le satellite est représenté par un point matériel d'une masse initiale de 1500 kg. Les forces agissant sur le satellite seront le potentiel gravitationnel terrestre en  $1/r^2$  et la poussée exercée par les moteurs de l'engin. Vu les altitudes considérées, on ne prendra pas en compte les ordres supérieurs du potentiel terrestre et les perturbations gravitationnelles luni-solaires. De plus on pourra prendre en compte des contraintes sur la direction de la poussée (contraintes de cônes) dans des modèles plus élaborés du transfert. Finalement on ne tiendra pas compte de la contrainte d'éclipse qui empêche les moteurs de fonctionner quand les panneaux solaires du satellite se situent dans le cône d'ombre de la Terre [31].

#### Poussée faible

En ce qui concerne la propulsion, elle est assurée par des moteurs de type électro-ioniques. Ces moteurs ont l'avantage d'avoir un rendement bien supérieur à celui des moteurs chimiques ce qui permet d'augmenter la charge

FIG. 1.1 – *transfert orbital*

utile du satellite ou bien sa durée de vie dans le cas d'un maintien à poste. L'inconvénient majeur de ce mode de propulsion est que la poussée engendrée est très faible en comparaison de celle fournie par des moteurs chimiques. Ces poussées étant de l'ordre du dixième de Newton, les temps de transfert deviennent très importants et la modélisation impulsionnelle n'est alors plus adaptée. D'un point de vue numérique on considérera des poussées allant de 10 Newtons (on parlera alors improprement de poussée forte) à 0.1 Newton principalement pour des raisons de visibilité des résultats. En effet, pour des poussées faibles, le transfert comporte de nombreuses révolutions autour de la Terre ce qui donne des trajectoires visuellement inexploitables.

### Masse maximale

Le cas du transfert en temps minimum ayant déjà été abondamment étudié [14] pour le problème sans contrainte de cône, on s'intéressera ici au problème de la maximisation de la masse utile. Maximiser la masse utile reviendra à maximiser la masse finale ou encore à minimiser la consommation de carburant, la perte de masse du satellite étant uniquement due à la consommation de carburant des moteurs. On verra dans la suite du chapitre les difficultés particulières engendrées par cet objectif. De plus, pour la prise en compte de la contrainte de cône, on s'intéressera tout d'abord au problème de minimisation du temps de transfert afin de pouvoir traiter correctement le problème de la maximisation de la masse finale (on comprend bien qu'une maximisation de la masse utile se doit de ne pas engendrer de temps de transfert prohibitif en regard du temps de transfert minimum).

De part sa plus grande régularité le problème de minimisation de l'énergie (carré de la norme  $L^2$  du contrôle) sera également envisagé.

## 1.2 Modélisation

### Dynamique

L'accélération subie par le satellite étant due au potentiel terrestre ainsi qu'à la poussée exercée par les moteurs, le mouvement de l'engin s'écrit sous la forme :

$$\ddot{r} = -\mu_0 \frac{r}{|r|^3} + \frac{u}{m} \quad (1.1)$$

avec  $r = (r_1, r_2, r_3)$  le vecteur position,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  la poussée (c'est-à-dire le contrôle),  $m$  la masse du satellite et  $\mu_0$  la constante gravitationnelle de la Terre ( $\mu_0 = \mathcal{G}m_T$ ,  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation universelle et  $m_T$  la masse de la Terre ce qui donne  $\mu_0 = 398600.47 km^3 \cdot s^{-2}$ ). La norme  $|\cdot|$  est la norme euclidienne ce qui sera le cas pour toute la suite du rapport.

En posant l'état  $x = (r, v)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  la vitesse du satellite ( $\dot{r} = v$ ), on peut réécrire la dynamique comme suit :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^3 \frac{u_i}{m} f_i(x). \quad (1.2)$$

De plus comme on compte maximiser la masse finale (et donc qu'on considère forcément le modèle à masse variable), on introduit la dynamique de la masse  $m$  dont la variation est proportionnelle à la poussée :

$$\dot{m} = -\beta|u|. \quad (1.3)$$

La constante  $\beta$  est l'inverse de la vitesse d'éjection des ions ( $v_e$ ) qui est supposée constante. La vitesse d'éjection est proportionnelle à l'accélération gravitationnelle terrestre à la surface de la Terre ( $g_0 = 9.8 m \cdot s^{-2}$ ) et à l'impulsion spécifique du moteur ( $I_{sp} = 2000 s$  qui est, avec la poussée, la caractéristique essentielle du moteur). Avec nos valeurs on a :

$$\beta = \frac{1}{v_e} = \frac{1}{I_{sp}g_0} \approx 1.42 \cdot 10^{-5} km^{-1} \cdot h.$$

Afin de garder un modèle valide on imposera que la distance du satellite à la Terre reste supérieure au rayon  $r_T$  ( $\approx 6378 km$ ) de cette dernière. De plus pour garder des trajectoires elliptiques il faut que la vitesse de l'engin reste inférieure à la vitesse de libération. D'où les deux contraintes (qui ne seront jamais actives pour nos transferts) :

$$|r| > r_T, \quad |v| < \sqrt{\frac{2\mu_0}{|r|}}.$$

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, les champs de vecteurs de la dynamique (1.2) sont donc :

$$f_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -\mu_0 \frac{r_1}{|r|^3} \\ -\mu_0 \frac{r_2}{|r|^3} \\ -\mu_0 \frac{r_3}{|r|^3} \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cette formulation, brillant par sa simplicité, est particulièrement adaptée à l'établissement de résultats théoriques préliminaires. Cependant, notre travail étant surtout orienté vers la résolution numérique du problème de maximisation de la masse finale, la grande variation des vecteurs position et vitesse due au grand nombre de révolutions du satellite impliquera une grande instabilité numérique de ce système de coordonnées.

### Eléments orbitaux

Un bon choix de système de coordonnées consisterait en un système ayant, pour une faible poussée exercée sur le satellite, une faible variation des coordonnées. Le système généralement utilisé est celui correspondant aux intégrales premières du mouvement képlérien non perturbé. Ce système remplace les coordonnées cartésiennes par les éléments orbitaux décrivant l'orbite osculatrice du satellite, c'est-à-dire l'orbite que décrirait le satellite si on le laissait évoluer librement (sans lui appliquer de poussée). Ces coordonnées sont notées  $(P, e, \nu, \Omega, \omega, i)$  où (cf. figure 1.2 et [62]) :

- $P$  est le paramètre de l'ellipse ;
- $e$  est son excentricité ;
- $\nu$  est l'anomalie vraie ;
- $\Omega$  est la longitude du noeud ascendant ;
- $\omega$  est l'argument du périhélie ;

- $i$  est l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial.

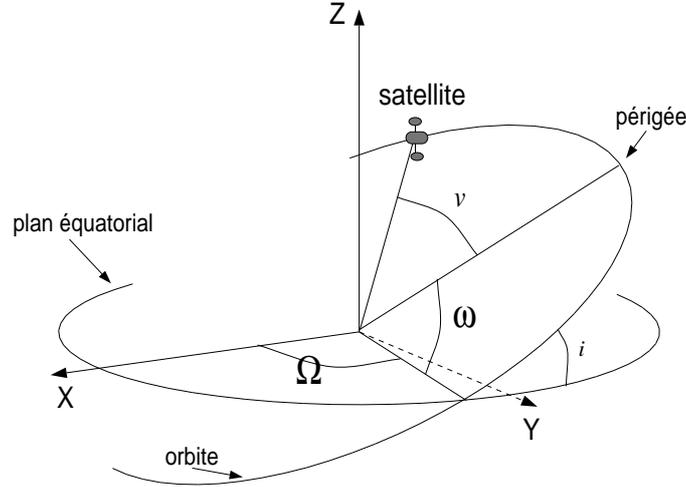


FIG. 1.2 – éléments orbitaux

$P$  et  $e$  définissent la forme de l'orbite osculatrice. Les angles  $\omega$ ,  $\Omega$  et  $i$  nous donne la position de l'orbite par rapport au repère terrestre. Enfin, l'anomalie vraie  $\nu$  indique la position du satellite par rapport au périgée de l'orbite.

Notre orbite terminale étant l'orbite géostationnaire équatoriale (qui rappelons-le est circulaire) certains de ces paramètres ne sont plus définis à la fin du transfert (ce sont  $\nu$ ,  $\omega$  et  $\Omega$ ). C'est pourquoi nous utilisons les éléments orbitaux modifiés  $(P, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \\ e_x = e \cos(\omega + \Omega) \\ e_y = e \sin(\omega + \Omega) \\ h_x = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \cos(\Omega) \\ h_y = \tan\left(\frac{i}{2}\right) \sin(\Omega) \\ L = \nu + \omega + \Omega \end{array} \right. \quad (1.4)$$

La longitude  $L$  décrit alors la position du satellite sur son orbite et vu les poussées prises en compte elle est toujours croissante (la poussée est négligeable devant l'inertie du satellite). Notons que dans le cas d'un problème de transfert avec rendez-vous sur l'orbite finale c'est  $L$  qu'il faudrait fixer (à  $2\pi$  près, car comme le temps de transfert est fixé, on connaît donc la position exacte du rendez-vous). De plus, les poussées considérées étant faibles, tous ces paramètres sont, à l'exception de la longitude, à variation lente.

**Remarque 1.1.** *La longitude utilisée par la suite sera une longitude cumulée qui, en plus de déterminer une position sur l'ellipse osculatrice, indiquera également le nombre de révolutions déjà effectués par le satellite. On peut alors voir  $L$  comme une mesure de longueur.*

A noter qu'il est tout aussi habituel de remplacer le paramètre de l'ellipse  $P$  par la valeur de son demi-grand axe  $a$ , la relation les liant étant :

$$P = (1 - e^2)a.$$

Il peut être utile d'exprimer les coordonnées cartésiennes en fonction des éléments orbitaux. Les formules de changement de variables sont les suivantes :

$$r = \frac{P}{CW} \begin{bmatrix} (1 + h_x^2 - h_y^2) \cos L + 2h_x h_y \sin L \\ (1 - h_x^2 + h_y^2) \sin L + 2h_x h_y \cos L \\ CZ \end{bmatrix}$$

$$v = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{\mu_0}{P}} \begin{bmatrix} 2h_x h_y (e_x + \cos L) - (1 + h_x^2 - h_y^2)(e_y + \sin L) \\ (1 - h_x^2 + h_y^2)(e_x + \cos L) - 2h_x h_y (e_y + \sin L) \\ 2(h_x(e_x + \cos L) + h_y(e_y + \sin L)) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \\ Z &= h_x \sin L - h_y \cos L \\ C &= 1 + h_x^2 + h_y^2 \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$|r| = \frac{P}{W}. \quad (1.5)$$

### Repère ortho-radial

En plus du passage aux coordonnées de Gauss (les éléments orbitaux modifiés), on va changer le repère dans lequel est exprimé le contrôle  $u$ . En effet, l'expression du contrôle dans le repère inertiel terrestre n'est, avec nos nouveaux paramètres, pas très parlante. De plus, certaines contraintes telles que la contrainte sur la direction de poussée ne sont pas facilement exprimables sans le changement de repère que nous allons introduire. On choisit d'exprimer le contrôle dans le repère mobile  $(q, s, w)$  attaché au satellite qui est défini suivant le vecteur position de l'engin (cf. figure 1.3). L'expression du nouveau repère est alors :

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{r}{|r|} \\
 s &= w \wedge q \\
 w &= \frac{r \wedge v}{|r \wedge v|}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

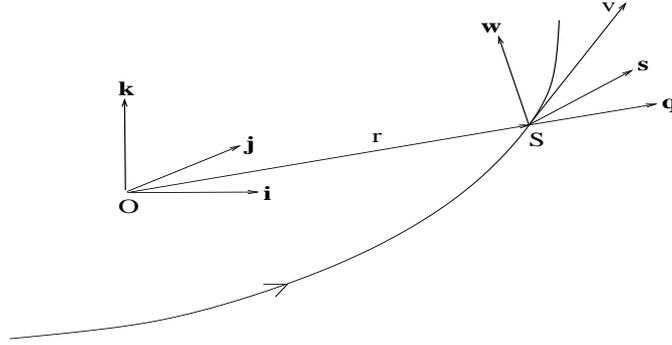


FIG. 1.3 – Repère ortho-radial

Un autre choix possible de repère pour l'expression du contrôle est le repère tangentiel-normal  $(t, n, z)$ , toujours mobile et attaché au satellite, dont le vecteur  $t$  est orienté suivant le vecteur vitesse du satellite.

Dans le nouveau système de coordonnées et le repère ortho-radial, les champs de vecteurs définissant la dynamique (1.2) sont :

$$f_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{P}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ W^2/P \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{P}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin L \\ -\cos L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{P}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 2P/W \\ \cos L + (e_x + \cos L)/W \\ \sin L + (e_y + \sin L)/W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$f_3 = \frac{1}{W} \sqrt{\frac{P}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 0 \\ -Ze_y \\ Ze_x \\ \frac{C}{2} \cos L \\ \frac{C}{2} \sin L \\ Z \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

On sera, notamment dans l'application de la contrainte de cône, amené à considérer un transfert coplanaire où le plan de l'orbite de départ est confondu avec le plan équatorial (inclinaison  $i$  nulle). Dans ce cas les champs de vecteurs pour les équations de Gauss s'écrivent (on ne considère plus que deux contrôles, on ne tient plus compte du contrôle hors-plan) :

$$f_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{P}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W^2/P \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \sqrt{\frac{P}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin L \\ -\cos L \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2 = \sqrt{\frac{P}{\mu_0}} \begin{bmatrix} 2P/W \\ \cos L + (e_x + \cos L)/W \\ \sin L + (e_y + \sin L)/W \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Contraintes

La première contrainte imposée au système consiste à restreindre les trajectoires à une zone de sécurité et à imposer à la masse du satellite de rester supérieure à sa masse à vide  $\chi^0$  (masse sans carburant). Cette zone de sécurité est notée  $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^7$  :

$$(x, m) \in \mathbf{A} = \{(x, m) | P \geq \Pi^0, |(e_x, e_y)| \leq \epsilon^0 \text{ et } m \geq \chi^0\}. \quad (1.11)$$

avec  $\Pi^0 > 0$  et  $0 < \epsilon^0 < 1$  qui garantissent un éloignement suffisant de la Terre et une trajectoire elliptique. Bien entendu, on peut exprimer une zone de sécurité similaire en coordonnées cartésiennes.

Ces contraintes ne seront prises en compte que pour l'étude de la contrôlabilité du système et l'existence de solution. Lors de la résolution on suppose qu'elles sont respectées ce qui sera le cas étant donné qu'elles sont peu restrictives.

Les contraintes relatives aux orbites initiale et terminale s'écrivent comme des conditions aux deux bouts :

$$x(0) = x^0, m(0) = m^0, h(x(t_f)) = 0. \quad (1.12)$$

avec

$$h(x) = (P - P^f, e_x - e_x^f, e_y - e_y^f, h_x - h_x^f, h_y - h_y^f).$$

et

$$\begin{aligned} P^0 &= 11625km & P^f &= 42165km \\ e_x^0 &= 0.75 & e_x^f &= 0 \\ e_y^0 &= 0 & e_y^f &= 0 \\ h_x^0 &= 0.0612 & h_x^f &= 0 \\ h_y^0 &= 0 & h_y^f &= 0 \\ L^0 &= \pi & L^f &= \text{libre} \\ m^0 &= 1500kg & m^f &= \text{libre} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ce qui correspond bien à une orbite initiale fortement elliptique ( $e = 0.75$ ) et légèrement inclinée (ici  $i = 7^\circ$ ). L'orbite finale est bien l'orbite géostationnaire équatoriale. On commence le transfert à l'apogée de l'orbite initiale ( $L^0 = \pi$  et  $e_y = 0$ ) et la longitude finale est libre (on se permettra néanmoins de la fixer si nécessaire).

Une autre contrainte importante de notre problème est celle concernant la magnitude de la poussée :

$$|u| \leq T_{max}. \quad (1.14)$$

où  $|\cdot|$  sera toujours la norme euclidienne ( $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq T_{max}^2$ ) et  $T_{max}$  est la poussée, exprimée en Newton, délivrée par le moteur du satellite. Pour des raisons numériques, on ramènera cette contrainte sous la forme :

$$|u| \leq 1. \quad (1.15)$$

ce qui impliquera de redéfinir la dynamique (1.2)-(1.3) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=0}^3 u_i f_i(x) \\ \dot{m} &= -\beta T_{max} |u| \end{cases} \quad (1.16)$$

On a aussi la possibilité de rajouter une contrainte dites de cône sur le contrôle, contrainte qui sera en partie traitée au chapitre 5. Cette contrainte concerne la direction de la poussée qui est restreinte à un cône de révolution (double ou simple) d'axe  $s$  et de demi-angle au sommet  $\alpha$  (cf. figure 1.4).

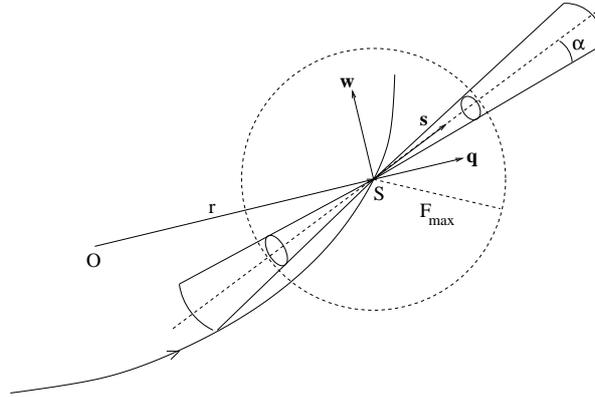


FIG. 1.4 – Contrainte de cône

### Temps final fixé

Jusqu'à présent, on ne s'est pas encore préoccupé du temps de transfert. N'ayant aucune garantie quant à l'existence d'une solution au problème de maximisation de la masse finale à temps final libre et ayant également pour contrainte d'effectuer les transferts dans un temps raisonnable, on se fixe le temps de transfert. Notre problème a déjà été étudié sous l'angle de la minimisation du temps de transfert ([14]), on va donc fixer notre temps de transfert ( $t^f$ ) comme un multiple du temps de transfert minimum ( $t_{min}^f$ ) :

$$t^f = c_{tf} \cdot t_{min}^f, \quad c_{tf} \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

$c_{tf}$  étant pris strictement supérieur à 1 pour que notre système reste contrôlable. Le terme *strictement* vient du fait que si on fixe un temps de transfert égal au temps de transfert minimum, on aura une solution optimale qui sera la même que celle du transfert en temps minimum ce qui du point de vue de la maximisation de la masse finale n'a d'intérêt que de donner la masse finale de référence.

Il est important de noter qu'on a une relation empirique liant proportionnellement l'inverse du temps de transfert minimum à la poussée maximale, observée pour la première fois dans [49] :

$$t_{min}^{f, T_{max}} T_{max} \approx 850 N.h. \quad (1.18)$$

où  $t_{min}^{f, T_{max}}$  est le temps de transfert minimum pour une poussée  $T_{max}$ . Ceci n'est bien entendu vérifié que pour notre jeu de conditions aux limites.

Cette relation sera très utile notamment pour comparer des transferts avec des poussées différentes. En effet, on ne paramétrera pas le problème de transfert par  $t^f$  mais par  $c_{tf}$ . De plus il sera intéressant d'observer l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{tf}$ , ce qui est fait au chapitre 4.

### Objectif

Comme indiqué au début du chapitre, on s'intéresse à la maximisation de la masse finale  $m(t^f)$ . Etant donné l'équation de variation de la masse (1.3), on peut réécrire la maximisation de la masse finale comme la minimisation de la consommation. Or, la poussée maximale  $T_{max}$  et  $\beta$  sont constants donc minimiser la consommation revient à minimiser la norme  $L^1$  du contrôle :

$$\max m(t^f) \Leftrightarrow \min (m(0) - m(t^f)) \Leftrightarrow \min \int_0^{t^f} |u| dt. \quad (1.19)$$

pour des raisons d'application d'une méthode homotopique (cf. chapitre 2.), on choisira d'écrire le critère sous la dernière forme.

Notons également qu'étant donné que la résolution du problème en temps minimum est nécessaire pour pouvoir se fixer un temps de transfert permettant la contrôlabilité du système, et vu que la minimisation de ce temps de transfert n'a pas été étudiée pour le problème avec contrainte de cône, une partie du chapitre 5 sera dédiée à cet objectif.

### Synthèse

Pour résumer, notre problème (sans contrainte de cône) s'écrit :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^{t^f} |u| dt \\ \dot{x} = f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x) \\ \dot{m} = -\beta T_{max} |u| \\ |u| \leq 1 \\ t^f = c_{tf} t_{min}^{f, T_{max}} \\ x(0) = x^0 \\ m(0) = m^0 \\ h(x(t^f)) = 0 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Il est à noter que l'auteur est bien conscient que  $(P)$  dépend de  $T_{max}$  et de  $c_{tf}$ . Cependant, faire apparaître explicitement cette dépendance sur la notation de  $(P)$ , par exemple en le notant  $(P_{c_{tf}}^{T_{max}})$ , serait trop lourd. D'autant plus que  $(P)$  se verra encore adjoindre d'autres paramètres.

### 1.3 Contrôle optimal

Dans cette section nous nous intéresserons à l'application du Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) et aux difficultés engendrées par le choix de notre critère. Nous ne présenterons pas le PMP et renvoyons le lecteur à [24, 11] pour les détails relatifs à la théorie. Dans un premier temps nous exposerons les résultats relatifs à la contrôlabilité et à l'existence de solution pour notre problème ( $P$ ). Ensuite nous appliquerons le PMP à (1.20). Pour finir nous illustrerons les difficultés de la méthode de tir sur un exemple simple.

#### Contrôlabilité et existence

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de contrôlabilité et d'existence de solutions.

**Proposition 1.1.** *Pour toute poussée  $T_{max} > 0$  (et  $t^f > t_{min}^f$ ), il existe une masse propre  $\chi^0 > 0$  du satellite qui rend le système sans contrainte de cône contrôlable.*

*Démonstration.* Vient de [14] proposition (2.2) avec  $t^f > t_{min}^f$ . Ou encore [50].

**Proposition 1.2.** *Pour toute poussée maximale  $T_{max} > 0$ , le système avec contrainte de cône double et demi-angle au sommet  $\alpha \geq 0$  est contrôlable à la condition que la masse propre du satellite soit suffisamment petite.*

*Démonstration.* Voir [14] corollaire (2.3).

La masse propre de notre satellite étant toujours suffisamment faible, les deux propositions précédentes nous assurent la contrôlabilité de notre système.

Voici maintenant un résultat d'existence de solution.

**Proposition 1.3.** *Si l'hypothèse (1.11) est vérifiée et que  $c_{tf} > 1$  alors le problème ( $P$ ) a une solution.*

*Démonstration.* Voir [36] proposition (3.2) pour une démonstration utilisant la formulation cartésienne. Voir également [50] pour une démonstration utilisant une formulation en coordonnées sphériques du contrôle.

Nous avons également un résultat d'existence pour un cas très restreint du problème avec contrainte de cône double.

**Proposition 1.4.** *Si les hypothèses (1.11) et  $c_{tf} > 1$  sont vérifiées alors le problème avec contrainte de cône double et demi-angle au sommet  $\alpha$  nul possède une solution.*

A noter que nous n'avons pas de résultat sur l'existence de solution pour le problème avec contrainte de cône si le demi-angle au sommet n'est pas nul. En effet si  $\alpha > 0$ , l'ensemble des commandes admissibles n'est plus convexe (pour  $\alpha = 0$  c'est un segment) et on ne peut plus appliquer le théorème d'existence de Phillipov.

### Méthode de tir

La méthode employée pour la résolution de ( $P$ ) est une méthode de tir simple basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP). Nous ne rappellerons pas la théorie mais appliquerons directement le PMP.

Le choix du tir simple pour la résolution de ( $P$ ) s'explique par les avantages bien connus de cette méthode, à savoir une grande précision (indispensable dans les problèmes spatiaux) et une bonne rapidité de convergence (quand il y a convergence). L'inconvénient majeur du tir simple est sa grande sensibilité à l'initialisation, sensibilité qui, nous allons le voir, est encore accrue par le choix du critère à minimiser.

Dans toute cette section, on travaillera en coordonnées cartésiennes. En annexe A le lecteur trouvera les équations correspondant à l'application du PMP avec les coordonnées de Gauss.

Toutes les démonstrations données dans cette partie sont tirées de [36] et dues à J. Gergaud et sont données pour la complétude du manuscrit, l'article cité n'étant, à l'heure actuelle, pas disponible.

On introduit les états adjoints  $(p_0, p, p_m) = (p_0, p_r, p_v, p_m)$  associés au critère et aux états  $(x, m) = (r, v, m)$ . Le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, m, u, p_0, p, p_m) &= (p_0 - \beta T_{max} p_m) |u| + \frac{T_{max}}{m} (u |p_v) \\ &+ (v |p_r) - \frac{\mu_0}{|r|^3} (r |p_v) \end{aligned} \quad (1.21)$$

La dynamique des états adjoints est alors :

$$\begin{cases} \dot{p}_r &= {}^t \left( \frac{\mu_0}{|r|^3} r \right)' p_v \\ \dot{p}_v &= -p_r \\ \dot{p}_m &= \frac{T_{max}}{m^2(t)} (u |p_v) \end{cases} \quad (1.22)$$

Soit les hypothèses suivantes :

**(H1) les orbites initiale et finale sont différentes**

**(H2) le temps de transfert est strictement supérieur au temps de transfert minimum ( $c_{tf} > 1$ ).**

On a la proposition suivante

**Proposition 1.5.** *Si (H1) est vraie alors  $|p_v|$  possède un nombre fini de zéros.*

*Démonstration.*

Si ce n'est pas le cas, il existe une suite  $(t_k)_k$ ,  $t_k \in [0, t^f]$ , tous différents, et telle que  $p_v(t_k) = 0$ . Mais  $t^f$  est fixé donc il existe une sous-suite, encore notée  $(t_k)_k$ , qui converge vers  $\bar{t}$ . Comme  $p_v$  est continu,  $p_v(\bar{t}) = 0$ .

Les équations adjointes (1.22) impliquent que  $p_v$  est continûment différentiable, donc

$$\frac{p_v(t_k) - p_v(\bar{t})}{t_k - \bar{t}} = 0 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \dot{p}_v(\bar{t}) = -p_r(\bar{t}).$$

Alors  $p_v(\bar{t}) = p_r(\bar{t}) = 0$  et on en déduit de (1.22) que  $p_r(t) = p_v(t) = 0 \forall t \in [0, t^f]$ . Donc  $\dot{p}_m(t) = 0$  et comme  $p_m(t^f) = 0$  (condition de transversalité) on a également  $p_m(t) = 0 \forall t$ . Ceci implique que  $p_0 \neq 0$  et la minimisation du Hamiltonien donne  $u(t) = 0$  presque partout. Ceci est incompatible avec l'hypothèse **(H1)**.  $\square$

On a de plus la proposition suivante :

**Proposition 1.6.** *Si (H1) et (H2) sont vraies alors  $p_0 \neq 0$ .*

*Démonstration.*

Si  $p_0 = 0$ , le Hamiltonien est

$$\mathcal{H}(x, m, u, p_0, p, p_m) = -\beta T_{max} p_m |u| + \frac{T_{max}}{m} (u |p_v| + (v |p_r|) - \frac{\mu_0}{|r|^3} (r |p_r|).$$

La proposition 1.5 implique que  $p_v(t) \neq 0$  presque partout. Alors la minimisation du Hamiltonien vérifie presque partout  $u(t) = -\alpha(y(t)) \frac{p_v(t)}{|p_v(t)|}$  avec

$$y(t) = (r(t), v(t), m(t), p_r(t), p_v(t), p_m(t)) \text{ et } \alpha(y(t)) \in [0, 1].$$

Alors  $\dot{p}_m(t) = -\alpha(y(t)) \frac{T_{max}}{m^2(t)} |p_v(t)| \leq 0$  et, comme  $p_m(t^f) = 0$  on a  $p_m(t) \geq 0 \forall t$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que :

$$\mathcal{H}(y, u, p_0) \geq \left(-\frac{T_{max}}{m(t)}|p_v| - \beta p_m\right)|u| + \text{termes sans } u.$$

et on a l'égalité si  $u(t) = -\alpha p_v(t)$ ,  $\alpha \geq 0$ .

Alors minimiser le Hamiltonien revient à prendre  $u(t) = 1$  presque partout et donc  $t^f$  est le temps minimum.  $\square$

On est donc dans le cas dit normal [11] et on peut poser  $p_0 = 1$ .

On note  $y = (x, m, p, p_m) = (r, v, m, p_r, p_v, p_m)$  et :

$$\psi(y) = 1 - \beta T_{max} p_m - \frac{T_{max}}{m} |p_v|.$$

La minimisation du Hamiltonien est donnée par :

Si  $|p_v| \neq 0$  Alors

$$\begin{cases} u(y) = -\frac{p_v}{|p_v|} & , \text{ si } \psi(y) < 0 \\ u(y) = -\alpha \frac{p_v}{|p_v|} \alpha \in [0, 1] & , \text{ si } \psi(y) = 0 \\ u(y) = 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.23)$$

Si non

$$\begin{cases} u(y) \in \mathbf{S}(0, 1) & , \text{ si } \psi(y) < 0 \\ u(y) \in \mathbf{B}(0, 1) & , \text{ si } \psi(y) = 0 \\ u(y) = 0 & , \text{ si } \psi(y) > 0 \end{cases}$$

Sur la minimisation on voit bien que le second cas où  $|p_v| = 0$  peut poser problème. Cependant, la proposition 1.5 et la supposition qu'elle reste vraie dans un voisinage de la solution (car nous n'évaluons pas que des zéros de la fonction de tir) nous garantit que l'évaluation numérique de la commande ne posera pas de problème aussi longtemps qu'il n'y a pas d'arc singulier. En effet, on connaît alors la direction de  $u$  juste avant et juste après l'annulation de  $p_v$ ; on a en fait une rotation d'angle  $\pi$  du contrôle.

On fait alors l'hypothèse suivante :

**(H3) Il n'y a pas d'arc singulier, c'est-à-dire  $\psi$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois.**

Cette hypothèse sera vérifiée *a posteriori* une fois le calcul numérique effectué. Elle nous garantit un nombre fini de commutations.

Le problème aux deux bouts s'écrit :

$$(BVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i(y) f_i(x) \\ \dot{m} = -\beta T_{max} |u(y)| \\ \dot{p} = -\partial_x \mathcal{H}(y, u(y)) \\ \dot{p}_m = -\partial_m \mathcal{H}(y, u(y)) \\ r(0) = r^0, v(0) = v^0, m(0) = m^0 \\ \tilde{h}(y(t^f)) = \begin{pmatrix} |r(t^f)| - r^f \\ r_3(t^f) \\ v_1(t^f) + \sqrt{\frac{\mu_0}{r^f{}^3}} r_2(t^f) \\ v_2(t^f) - \sqrt{\frac{\mu_0}{r^f{}^3}} r_1(t^f) \\ v_3(t^f) \\ r_2(t^f)(p_1(t^f) + \sqrt{\frac{\mu_0}{r^f{}^3}}) - r_1(t^f)(p_2(t^f) - \sqrt{\frac{\mu_0}{r^f{}^3}}) \\ p_m(t^f) \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

On note  $S$  la fonction de tir associée à  $(BVP)$ , elle est définie par :

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ z &\mapsto S(z) = \tilde{h}(y(t^f; z)) \end{aligned}$$

où  $y(\cdot; z)$  est solution du problème à valeur initiale :

$$(IVP)_z \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = \text{comme pour } (BVP) \\ r(0) = r^0, v(0) = v^0, m(0) = m^0 \\ (p(0), p_m(0)) = z \end{array} \right.$$

Une solution de notre problème sera alors un zéro de la fonction de tir.

Cependant, du fait de la discontinuité du second membre de  $(IVP)_z$ , due à celle de la commande  $\mathcal{H}$ -minimale, on peut se poser la question de la différentiabilité de  $S$  (en effet l'algorithme de recherche d'un zéro de  $S$  sera en général un algorithme de type Newton qui nécessite le calcul de dérivées). Afin de répondre à cette question, définissons

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \{z \in \mathbb{R}^n \mid & (x, m)(t; z) \in \mathring{\mathbf{A}} \ \forall t, \\ & p_v(t; z) \neq 0 \ \forall t, \\ & \psi^2(y(t; z)) + (p_r(t; z) | p_v(t; z))^2 \neq 0 \ \forall t, \\ & \psi(y(0; z)) \neq 0 \text{ et } \psi(y(t^f; z)) \neq 0 \} \end{aligned}$$

On a alors

**Proposition 1.7.** *1.  $\psi_z(t) = \psi(y(t; z))$  est continûment différentiable (par rapport à  $t$ ) et il existe un nombre fini d'instants de commutations tels que  $\psi(y(t; z)) = 0$ ;*

2.  $\Omega_1$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $S$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega_1$ .

*Démonstration.*

- (1) Soit  $z \in \Omega_1$ . Alors  $p_v(t; z) \neq 0$  pour tout  $t$  et les discontinuités du contrôle n'arrivent que si  $\psi(y(t; z)) = 0$ , avec  $y(t; z)$  fonction absolument continue solution de

$$(IVP)_z \begin{cases} \dot{y}(t) &= \varphi_1(y(t)) \text{ si } \psi(y(t)) > 0 \\ \dot{y}(t) &= \varphi_2(y(t)) \text{ si } \psi(y(t)) < 0 \\ r(0) &= r^0; v(0) = v^0; m(0) = m^0 \\ p(0) &= z \end{cases}$$

où  $\varphi_1(y(t))$  est le second membre de (BVP) avec  $u(t) = -\frac{p_v(t)}{|p_v(t)|}$  et  $\varphi_2(y(t))$  est ce même second membre avec  $u(t) = 0$ .

Mais ici

$$\dot{\psi}_z(t) = -\frac{T_{max}}{m(t; z)} \frac{(p_v(t; z)|p_r(t; z))}{|p_v(t; z)|}. \quad (1.24)$$

Le membre de droite de (1.24) est continu et  $\psi_z(t)$  est absolument continu. Donc  $\psi_z(t)$  est  $C^1$ . La définition de  $\Omega_1$  implique alors que l'on ne peut pas avoir simultanément  $\psi_z(t) = 0$  et  $\dot{\psi}_z(t) = 0$ . Alors les temps où  $\psi_z(t) = 0$  sont isolés dans le compact  $[0, t^f]$  et  $\psi_z(t)$  possède un nombre fini de zéros.

- (2) Soit  $z \in \Omega_1$ . S'il n'y a pas de temps tel que  $|p_v(t; z)| = 0$  et  $\psi(y(t)) = 0$  alors  $(IVP)_z$  est un problème de Cauchy de second membre  $C^\infty$  et le résultat est immédiat.

On suppose qu'il n'y a qu'un temps de commutation  $\bar{t}$  où  $\psi_z(\bar{t}) = 0$ . Supposons de plus que sur  $[0, \bar{t}]$ ,  $y(t; z)$  est la solution de

$$(IVP_1)_z \begin{cases} \dot{y}(t) &= \varphi_1(y(t)) \quad t \in [0, \bar{t}[ \\ r(0) &= r^0; v(0) = v^0; m(0) = m^0 \\ p(0) &= z \end{cases}$$

Nous allons alors montrer que la courbe solution  $y(t; z)$  est  $y_1(t; z)$  sur  $[0, \bar{t}]$  et  $y_2(t; z)$  sur  $[\bar{t}, t^f]$ , où  $y_2(t; z)$  est la solution du problème à valeur initiale

$$(IVP_2)_z \begin{cases} \dot{y}(t) &= \varphi_2(y(t)) \\ y(\bar{t}) &= y_1(\bar{t}; z) \end{cases}$$

et que cette solution est transversale à la surface de commutation  $\psi(y) = 0$  en  $y(\bar{t}, z)$ , c'est-à-dire que  $\dot{\psi}_1(\bar{t}; z)$  et  $\dot{\psi}_2(\bar{t}; z)$  sont du même côté du plan tangent à la surface de commutation en  $y_1(\bar{t}; z)$  (cf. figure

1.5 pour une illustration géométrique). Dans ce cas, la solution sera bien définie dans un voisinage de  $z$ , la fonction  $z \mapsto \bar{t}(z)$  sera, par le théorème des fonctions implicites,  $C^\infty$  et par composition de fonctions notre fonction de tir sera elle aussi  $C^\infty$ .

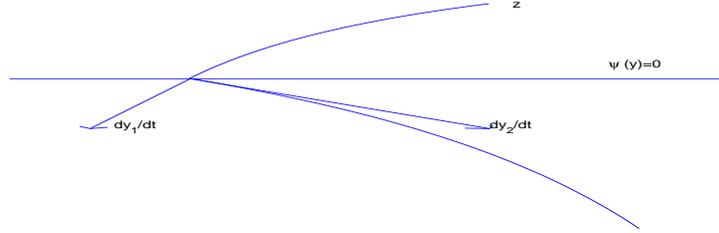


FIG. 1.5 – tangentes de la solution à l'instant de commutation.

Nous avons alors à prouver que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \dot{y}_1(\bar{t}; z) \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \dot{y}_2(\bar{t}; z).$$

sont de même signe. Mais ici

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \dot{y}_1(\bar{t}; z) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \dot{y}_2(\bar{t}; z) = -\frac{T_{max}}{m(\bar{t}; z)} \frac{(p_v(\bar{t}; z)|p_r(\bar{t}; z))}{|p_v(\bar{t}; z)|}.$$

qui est non nul puisque  $z \in \Omega_1$ .

Pour le cas général où le nombre de temps de commutations est fini, on répète simplement le même argument.  $\square$

**Remarque 1.2.** *la proposition précédente nous garantit une certaine stabilité de la structure de la commande optimale. En effet, pour  $z \in \Omega_1$  il existe un voisinage  $V$  de  $z$  dans lequel il n'y a pas d'apparition ou de disparition de commutation. En particulier, on n'a pas d'arc singulier.*

Cependant la régularité de la fonction de tir n'est garantie que dans un voisinage de la structure de la commande optimale. Afin d'avoir une meilleure idée des difficultés posées par ce genre de limitations, nous les illustrons par l'exemple simple suivant.

## Difficultés

Dans ce paragraphe nous allons illustrer par un exemple simple la difficulté majeure de résolution par une méthode de tir simple d'un problème avec commande discontinue.

Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^2 |u(t)| dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(2) = 0.5 \\ x_2(2) = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

La commande optimale qui minimise le Hamiltonien

$$\mathcal{H}(t, x, p, u) = |u| + p_1 x_2 + p_2 u. \quad (1.26)$$

est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(t) = -\text{sign}(p_2(t)) & , \text{si } |p_2(t)| > 1 \\ u(t) = 0 & , \text{si } |p_2(t)| < 1 \\ u(t) = \alpha p_2(t) \quad \alpha \in [0, 1] & , \text{sinon} \end{array} \right. \quad (1.27)$$

On a donc, comme pour (P), un contrôle qui possédera des discontinuités quand  $|p_2|$  passera par 1. L'évolution des états adjoints et de la commande à la solution est représentée à la figure 1.6.

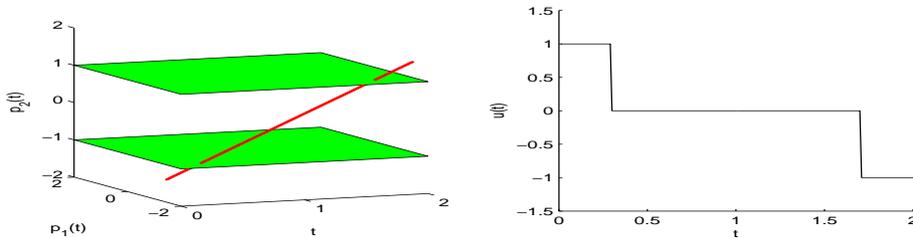


FIG. 1.6 – Evolution des états adjoints et du contrôle à la solution de (Q)

Le problème aux deux bouts correspondant est,

$$(BVQ) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \dot{p}_1(t) = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t) \\ x(0) = x^0 \\ x(2) = x^f \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Si on pose  $z = p(0)$ , la fonction de tir  $S_Q$  est donnée par

$$S_Q(z) = x(2; z) - x^f.$$

Résoudre le problème (Q) revient alors à trouver un zéro  $\bar{z}$  de  $S_Q$ . La figure 1.7 représente la fonction de tir en fonction de  $z$ .

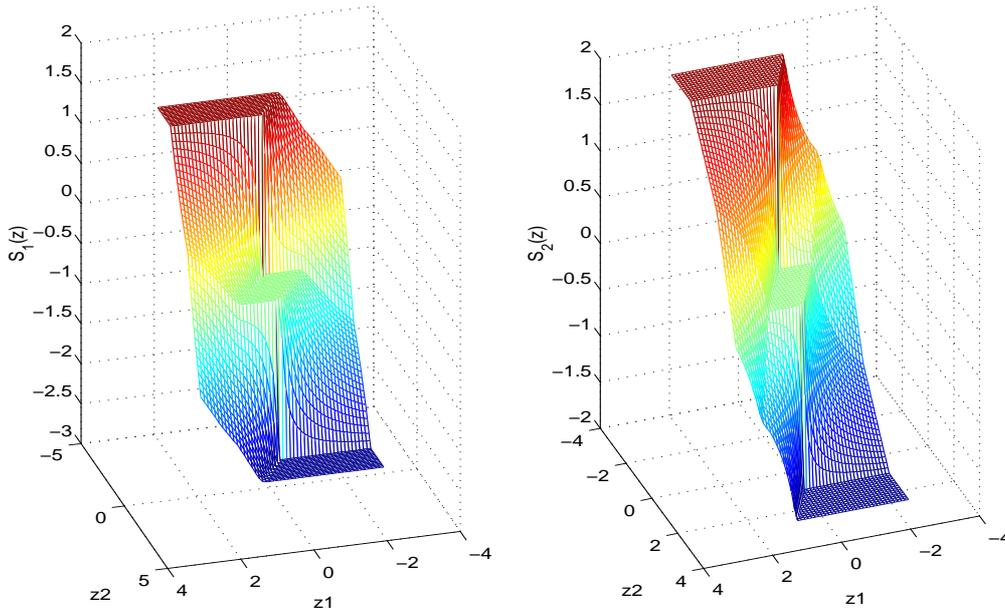


FIG. 1.7 – Fonction de tir de (Q)

Sur cette figure on peut distinguer 9 domaines, associés chacun à une structure particulière du contrôle. La figure 1.8 représente le découpage de  $\mathbb{R}^2$  engendré par ces domaines.

Il est important de noter que  $S_Q$  n'est pas différentiable sur les frontières des domaines cités. De plus elle n'est même pas définie en  $(0, -1)$  et  $(0, 1)$ . De ce fait, essayer de résoudre  $S_Q(z) = 0$  avec une méthode de type Newton nécessite de partir du bon domaine et donc de connaître *a priori* la structure de la commande optimale.

Ce problème d'initialisation devient véritablement critique pour notre problème de transfert orbital à mesure que la poussée diminue. En effet, vu le caractère périodique de nos trajectoires (voir [14] pour les trajectoires en temps minimum) on aura de plus en plus de révolutions à mesure que la poussée maximale décroît. On peut donc s'attendre à un nombre croissant de commutations quand la poussée diminue ou quand le temps final augmente, ce qui sera confirmé par les résultats numériques (cf. chapitre 4 et 5).

On pourrait penser qu'avec une stratégie de continuation sur la poussée, déjà employée dans [14], on arriverait à trouver une initialisation correcte à

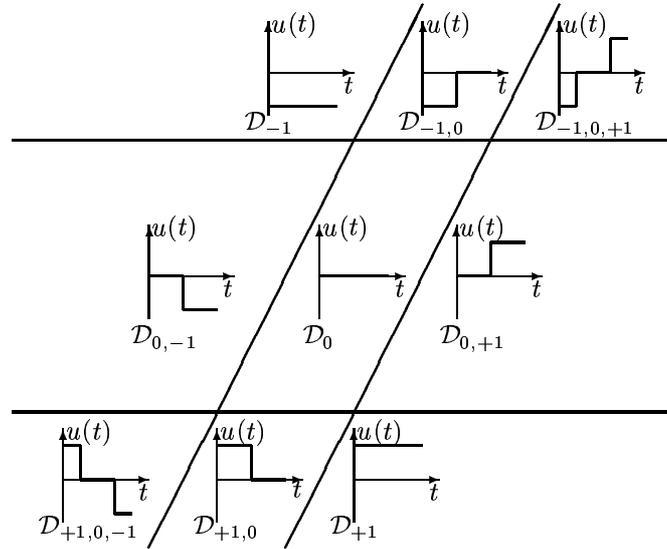


FIG. 1.8 – Découpage de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(z_1, z_2)$ , suivant la structure du contrôle

notre tir simple, mais une telle approche se révèle infructueuse.

Mais le tir simple a des avantages non négligeables qui sont une grande précision numérique et une grande rapidité de convergence (quand il y a convergence, et c'est précisément la difficulté). C'est pourquoi nous l'utilisons ce qui nous oblige à mettre au point une méthode d'initialisation que nous présentons dans le chapitre suivant. Cette méthode nous permettra de trouver automatiquement la structure de la commande optimale.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le problème qui sera traité, à savoir un transfert orbital avec maximisation de la masse finale. Ce transfert étant à faire d'une orbite initiale basse fortement elliptique et légèrement inclinée jusqu'à l'orbite géostationnaire équatoriale, le tout avec une propulsion de type électro-ionique donc de faible amplitude. La modélisation de ce transfert en un problème de contrôle optimal a été présentée après avoir mentionné les diverses contraintes possibles (avec cône ou non) et les deux critères pris en compte (temps minimum quand contrainte de cône).

Finalement, nous avons transformé ce problème de contrôle optimal en celui de la recherche d'un zéro d'une fonction de tir  $S$  et ce par application du principe du maximum de Pontryagin. La propriété principale de nos commandes optimales étant d'être discontinue de norme nulle ou maximum, nous avons étudié un problème simple afin d'illustrer les difficultés de résolution numérique inhérentes aux problèmes à commandes optimales

discontinues. Ces difficultés imposent de connaître *a priori* la structure de la commande solution et rend entre autre la recherche d'un zéro de la fonction de tir particulièrement sensible à l'initialisation.

Le chapitre suivant introduit la méthode utilisée pour remédier à cette sensibilité et nous permettra ainsi de résoudre le problème de transfert orbital sans connaissance *a priori* de la structure de la commande optimale comme le montre les résultats du chapitre 4.

## Chapitre 2

# Méthodes homotopiques

Dans ce chapitre sera tout d'abord introduit le principe des méthodes homotopiques ainsi que leur application à notre problème. Les deux sections suivantes sont quant à elles consacrées à un type spécifique de méthode homotopique qui seront présentées de façon succincte. La dernière section expose le principe de la continuation différentielle qui est la méthode homotopique utilisée pour obtenir les résultats des chapitres 4 et 5.

### 2.1 Présentation générale

L'idée générale des méthodes homotopiques est de résoudre un problème difficile à l'aide d'un autre problème voisin plus simple que l'on déformera jusqu'à en faire le problème souhaité.

Dans le cas de notre méthode de tir simple dont la résolution se ramène à la recherche d'un zéro d'une fonction non linéaire  $S$ , la méthode homotopique reviendra à trouver une fonction  $S_0$  dont un zéro  $\bar{z}_{S_0}$  est simple à calculer et à remonter de ce zéro vers un zéro de  $S$ . Toute la difficulté de cette méthode réside tout d'abord dans le choix d'une homotopie possédant des propriétés de régularités suffisantes, un chemin menant d'un zéro de  $S_0$  à un zéro de  $S$  ainsi qu'une initialisation aisée (c'est-à-dire que  $\bar{z}_{S_0}$  est simple à calculer). L'autre difficulté de cette méthode est d'ordre numérique puisqu'une fois l'homotopie définie, il faut encore être capable de suivre le chemin de zéros qui mènera à la solution désirée.

Toute la difficulté consiste bien entendu en l'étape de liaison des deux zéros mais aussi en le choix de la fonction  $S_0$ .

Formalisons l'idée précédente. Pour ce faire, introduisons les définitions suivantes

**Définition 2.1 (Homotopie).** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle homotopie toute application continue  $H$  :*

$$H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

**Remarque 2.1.** On a noté  $\mathcal{H}$  le Hamiltonien afin de ne pas confondre avec l'homotopie  $H$ .

**Définition 2.2 (Homotopie admissible).** Une homotopie  $H$  est dite admissible par rapport à 0 et  $\Omega$  si et seulement si

$$H^{-1}(0) \cap \partial\Omega \times [0, 1] = \emptyset$$

La définition précédente assure que l'homotopie  $H$  ne possède pas de zéro sur la frontière de son domaine de définition  $\Omega$ .

Revenons à nos deux fonctions  $S$  et  $S_0$ . Si ces deux fonctions sont continues sur  $\bar{\Omega}$  ( $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ), on peut sans difficultés définir une homotopie  $H$  vérifiant

$$\begin{cases} H(z, 0) = S_0(z) \\ H(z, 1) = S(z) \end{cases} \quad (2.1)$$

En effet, il suffit par exemple de prendre

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} \times [0, 1] &\mapsto \mathbb{R}^n \\ (z, \lambda) &\rightarrow \lambda S(z) + (1 - \lambda)S_0(z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans toute la suite, le paramètre  $\lambda$  d'une homotopie (c'est-à-dire son second paramètre  $\in [0, 1]$ ) est appelé paramètre homotopique.

Connaissant un zéro de  $S_0$  et donc de  $H(\cdot, 0)$  on cherche à le relier à un zéro de  $H(\cdot, 1)$  (et donc de  $S$ ). Les différentes méthodes homotopiques se différencient les unes des autres par le moyen utilisé pour suivre le chemin de zéros (le chemin, s'il existe, qui relie les deux zéros).

Avant de décrire ces différentes méthodes, nous allons introduire l'homotopie que nous associerons au problème de transfert.

## 2.2 Homotopie associée à notre problème

Comme pour la section 1.3 on se placera en coordonnées cartésiennes, et ce en raison de la simplicité d'écriture du problème dans ces coordonnées.

Toute la difficulté du problème ( $P$ ) vient du critère qu'on cherche à minimiser. En effet, c'est lui qui rend la commande  $\mathcal{H}$ -minimale discontinue.

Un critère plus régulier que la minimisation de la norme  $L^1$  du contrôle est la minimisation du carré de la norme  $L^2$ . Ce dernier critère correspond à la minimisation de la dépense d'énergie et reste proche de celui de minimisation de la consommation. Grâce au paramètre homotopique  $\lambda$ , on peut relier les deux critères de plusieurs manières différentes. En voici deux

$$J_\lambda(u) = \begin{cases} (1 - \lambda)|u|^2 + \lambda|u| & \text{(critère convexe)} \\ |u|^{2-\lambda} & \text{(critère puissance)} \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans toute cette section, on s'intéressera aux propriétés de l'homotopie associée au problème  $(P)$  muni du critère convexe (on n'étudiera pas celles de  $(P)$  muni du critère puissance, les idées restant similaires).

Toutes les démonstrations présentées sont tirées de [36] et dues à J. Gergaud. Nous les donnons pour la complétude du manuscrit d'autant plus que [36] n'est, à l'heure actuelle, pas encore disponible.

On note  $(P)_\lambda$  le problème  $(P)$  munit du critère convexe. L'homotopie que l'on considèrera sera la fonction de tir  $\mathcal{S}_\lambda$  associée à  $(P)_\lambda$ .

Pour définir  $\mathcal{S}$ , on applique le PMP comme dans la section 1.3. Les notations non définies sont les mêmes que dans cette dernière.

Tout d'abord, remarquons qu'on retrouve certaines propriétés du problème  $(P)$

**Proposition 2.1.** *Si (H1), (H2) et (H3) sont vérifiées alors*

1.  $p_{\lambda v}$  possède un nombre fini de zéros ;
2.  $(P)_\lambda$  admet une solution  $\forall \lambda \in [0, 1]$ .

*Démonstration.* Voir [36]

La minimisation du Hamiltonien pour  $\lambda \in [0, 1[$  est donnée par

$$\alpha(y, \lambda) = -\frac{\lambda - \beta T_{max} p_m - (T_{max}/m)|p_v|}{2(1-\lambda)}$$

Si  $|p_v| \neq 0$  Alors

$$\begin{cases} u(y, \lambda) = 0 & , \text{si } \alpha(y, \lambda) \leq 0 \\ u(y, \lambda) = -\alpha(y, \lambda) \frac{p_v}{|p_v|} & , \text{si } \alpha(y, \lambda) \in [0, 1] \\ u(y, \lambda) = -\frac{p_v}{|p_v|} & , \text{sinon.} \end{cases}$$

Sinon

$$\begin{cases} u(y, \lambda) = 0 & , \text{si } \alpha(y, \lambda) \leq 0 \\ u(y, \lambda) \in \mathbf{S}(0, \alpha) & , \text{si } \alpha(y, \lambda) \in [0, 1] \\ u(y, \lambda) \in \mathbf{S}(0, 1) & , \text{sinon.} \end{cases}$$

La minimisation du Hamiltonien étant la seule différence entre les problèmes  $(P)$  et  $(P)_\lambda$  (on a de plus  $(P) = (P)_1$ ), on ne rappellera pas la définition de  $\mathcal{S}$  qui possède en plus de  $S$  un second argument qui est le paramètre homotopique ( $S(z) = \mathcal{S}(z, 1)$ ). Rappelons que pour  $\lambda = 1$ , la minimisation du Hamiltonien a été donné au chapitre précédent 1.23.

Notre fonction de tir  $\mathcal{S}$  reste régulière. En effet, on comprend bien que pour  $\lambda < 1$ ,  $\mathcal{S}$  ne peut être que plus régulière que pour  $\lambda = 1$ . Précisons le type de régularité de  $\mathcal{S}$ . Pour cela on définit

$$\Omega = \{(z, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1[ \mid x(t; z, \lambda) \in \mathring{\mathbf{A}} \forall t, \\ p_v(t; z, \lambda) \neq 0 \forall t\}$$

Et

$$\begin{aligned} \Omega_2 = \{ (z, \lambda) \in \Omega \mid & \alpha^2(y(t; z, \lambda)) + (p_r(t; z, \lambda)|p_z(t; z, \lambda))^2 \neq 0 \ \forall t, \\ & (\alpha(y(t; z, \lambda)) - 1)^2 + (p_r(t; z, \lambda)|p_z(t; z, \lambda))^2 \neq 0 \ \forall t, \\ & (\alpha(y(0; z, \lambda)) \neq 0 \text{ ou } 1) \text{ et } (\alpha(y(t^f; z, \lambda)) \neq 0 \text{ ou } 1) \} \end{aligned}$$

- Proposition 2.2.** 1. Soit  $(z, \lambda) \in \Omega$ ,  $u(t; z, \lambda)$  est  $C^1$  par morceaux en  $t$  ;  
 2. L'homotopie  $\mathcal{S}(z, \lambda)$  est continue sur  $\Omega$  ;  
 3. L'homotopie  $\mathcal{S}(z, \lambda)$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega_2$ .

*Démonstration.*

- (1) La minimisation du Hamiltonien implique que  $u(y, \lambda)$  et  $\varphi(y, \lambda)$  sont continus sur  $\Omega$ . Donc  $y(t; z, \lambda)$  est  $C^1$  en  $t$  et  $u(t; z, \lambda)$  est  $C^1$  par morceaux en  $t$ .
- (2) Ceci découle immédiatement de (1).
- (3) Comme pour la proposition 1.7 on doit démontrer que la trajectoire  $y(t; z, \lambda)$  est transversale aux surfaces  $\alpha(y, \lambda) = 0$  et  $\alpha(y, \lambda) = 1$ . Mais ici,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}(y(t; z, \lambda)) \cdot \dot{y}(t; z, \lambda) = -\frac{1}{2(1-\lambda)} \frac{T_{max}}{m(t; z, \lambda)} \frac{(p_v(t; z, \lambda)|p_r(t; z, \lambda))}{|p_v(t; z, \lambda)|}$$

qui est non nul quand  $\alpha(t; z, \lambda) = 0$  ou 1 dans  $\Omega_2$ .

De plus, on a immédiatement  $\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(y(t; z, \lambda)) < 0$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Notons  $(x_\lambda, m_\lambda, u_\lambda)$  une solution de  $(P)_\lambda$ . On a la propriété suivante sur l'évolution du critère  $J_\lambda$

**Proposition 2.3.** Si **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** sont vérifiées et si  $0 \leq \lambda \leq \lambda' \leq 1$  alors

1.  $J_\lambda(u_\lambda) \leq J_{\lambda'}(u_{\lambda'}) \leq J_1(u_1) \leq J_1(u_\lambda)$
2.  $|J_1(u_\lambda) - J_\lambda(u_\lambda)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} 0$
3.  $J_\lambda(u_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} J_1(u_1)$  et  $J_1(u_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} J_1(u_1)$

*Démonstration.*

- (1)  $\forall u \in \mathbf{B}(0, 1)$  et  $0 \leq \lambda \leq \lambda' \leq 1$

$$\begin{aligned} \lambda'|u| + (1-\lambda')|u|^2 &= \lambda|u| + (1-\lambda)|u|^2 + (\lambda' - \lambda)(|u| - |u|^2) \\ &\geq \lambda|u| + (1-\lambda)|u|^2 \end{aligned}$$

Ceci implique que  $J_\lambda(u) \leq J_{\lambda'}(u)$  pour tout contrôle admissible. Comme les ensembles des contrôles admissibles sont les mêmes pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , on a

$$J_\lambda(u_\lambda) \leq J_\lambda(u_{\lambda'}) \leq J_{\lambda'}(u_{\lambda'})$$

- (2) La fonction  $l_0(u, \lambda) = \lambda|u| + (1 - \lambda)|u|^2$  est continue sur le compact  $\mathbf{B}(0, 1) \times [0, 1]$ . Elle est donc uniformément continue. Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \lambda \ |\lambda - 1| < \eta$

$$\begin{aligned} |l_0(u, \lambda) - l_0(u, 1)| &< \varepsilon \\ \Rightarrow |J_\lambda(u_\lambda) - J_1(u_\lambda)| &< \int_0^{t^f} |l_0(u_\lambda(t), \lambda) - l_0(u_\lambda(t), 1)| dt \\ &< \varepsilon t^f \end{aligned}$$

- (3) Evident. □

**Remarque 2.2.** *Cette proposition permettrait de se donner un critère d'arrêt au cas où la résolution de  $(P)_1$  serait impossible (ou tout du moins trop compliquée). Cependant nous n'avons pas, durant nos expérimentations numériques, eu besoin de mettre en place un tel critère. Il sera tout de même intéressant d'observer l'évolution de  $J_\lambda$  et  $J_1$  en fonction du paramètre homotopique (notamment pour comparer les critères convexe et puissance).*

Pour finir, une des propriétés les plus intéressantes de nos problèmes  $(P)_\lambda$

**Théorème 2.1.** *Si (H2) et (H3) sont vraies, si  $(\lambda_k)_k$  est une suite dans  $[0, 1]$  qui converge vers 1 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , et si  $(x_k, m_k, u_k)_k$  est la paire optimale de  $(P)_{\lambda_k}$ , alors il existe une sous-suite, toujours notée  $(x_k, m_k, u_k)_k$  qui converge vers une solution  $(\bar{x}, \bar{m}, \bar{u})$  de  $(P)$  dans le sens suivant :*

1.  $x_k \rightarrow \bar{x}$  uniformément sur  $[0, 1]$  ;
2.  $u_k \rightarrow \bar{u}$  \*-faiblement dans  $L_m^\infty([0, t^f])$ .

*Démonstration.*

- (1) La preuve suit celle du théorème classique de Phillipov. Premièrement, de la proposition précédente on tire que  $u_k$  est une suite minimisante de  $(P)$ . De plus, les hypothèses assurent que  $(x_k)_k$  est absolument continue, equibornée et que  $\|\dot{x}_k\|_\infty < l \ \forall k$ . Le théorème 4 p.13 de [6] nous dit qu'il existe une sous-suite, encore notée  $(x_k)_k$  qui converge uniformément vers  $\bar{x}$  absolument continu et que  $(\dot{x}_k)_k$  converge \*-faiblement vers  $\dot{\bar{x}}$  dans  $L_n^\infty([0, t^f])$ . D'après le théorème de fermeture inférieure (8.8.i) de [24],  $\dot{\bar{x}}(t)$  appartient à  $\tilde{Q}_G(\bar{x}(t))$  presque partout. Ici  $\tilde{Q}_G(\bar{x}(t))$  est le champs des vitesses pour le problème convexifié  $(P)_G$  suivant :

$$(P)_G \left\{ \begin{array}{l} \min J_G(\nu_1, \dots, \nu_{n+2}, u^{(1)}, \dots, u^{(n+2)}) \int_0^{t^f} \sum_{j=1}^{n+2} \nu_j(t) |u^{(j)}(t)| dt \\ \dot{r}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{\mu_0 r(t)}{|r(t)|^3} + \frac{T_{max}}{m(t)} \sum_{j=1}^{n+2} \nu_j(t) |u^{(j)}(t)| dt \\ \dot{m}(t) = -\beta T_{max} \sum_{j=1}^{n+2} \nu_j(t) |u^{(j)}(t)| dt \\ (r(t), v(t), m(t)) \in \dot{A} \\ |u^{(j)}(t)| \leq 1 \\ \nu_j(t) \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n+2} \nu_j(t) = 1 \\ r(0), v(0), m(0) \text{ fixés} \\ r(t^f), v(t^f) \text{ fixés} \end{array} \right.$$

Finalement,  $\bar{x}$  est une trajectoire optimale du problème convexifié  $(P)_G$ . Par sélection mesurable, on peut choisir un contrôle convexifié  $\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_{n+2}, \bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{u}^{(n+2)}$  associé à  $\bar{x}$ .

Si on pose  $\bar{u}(t) = \sum_{j=1}^{n+2} \bar{\nu}_j(t) u^{(j)}(t)$ , alors  $\bar{u}$  est un contrôle admissible de notre problème  $(P)$  associé à  $\bar{x}$ .

(2) On peut écrire

$$u_k(t) = \frac{m_k(t)}{T_{max}} (\dot{v}_k(t) + \frac{\mu_0 r_k(t)}{|r_k(t)|^3})$$

Mais  $(v_k)_k$  et  $(m_k)_k$  convergent uniformément vers  $\bar{v}$  et  $\bar{m}$ , et  $\dot{v}_k$  converge \*-faiblement vers  $\dot{\bar{v}}$  de quoi nous déduisons le résultat.  $\square$

Ce théorème permet de justifier l'utilisation des méthodes homotopiques car il nous garantit l'existence d'une suite de solutions de  $(P)_\lambda$  qui converge vers une solution de  $(P)$ .

Ayant étudié les propriétés de l'homotopie  $\mathcal{S}$  employée, il nous reste encore à présenter les méthodes généralement utilisées pour trouver la suite de solution, (appartenant au chemin de zéros) mentionnée dans le théorème.

Commençons par présenter la méthode la plus naïve qui soit.

## 2.3 Homotopie discrète

Soit donc une homotopie  $H(z, \lambda)$ . Notons  $\bar{z}_\lambda$  une solution de  $H(z, \lambda) = 0$  à  $\lambda$  fixé.

On suppose qu'on dispose d'un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction.

Supposons de plus qu'on dispose de  $\bar{z}_0$ .

L'homotopie discrète, également appelée continuation discrète, consiste à construire une séquence croissante  $(\lambda_k)_{k \in \{0, \dots, N\}}$  telle que  $\lambda_0 = 0$  et  $\lambda_N = 1$ .

On recherche alors un zéro  $\bar{z}_{\lambda_k}$  de  $H(z, \lambda_k)$  en prenant  $\bar{z}_{\lambda_{k-1}}$  pour point de départ de la recherche. Cette méthode est par ailleurs utilisée dans **TfMin** [20] avec  $T_{max}$  pour paramètre homotopique (mis à l'échelle).

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne tient aucun compte de l'évolution de  $\bar{z}_{\lambda_k}$  et suppose que les solutions du problème précédents restent dans le domaine de convergence de l'algorithme de recherche. D'autre part elle suppose connue une séquence  $(\lambda_k)_k$  permettant d'atteindre  $\lambda = 1$ , ce qui est rarement le cas. On peut cependant s'affranchir aisément de la connaissance *a priori* d'une telle séquence en procédant par tâtonnement comme dans l'algorithme suivant écrit en pseudo-code :

Algorithme de continuation discrète 1

$$\bar{z} = \bar{z}_0$$

$$\bar{\lambda}_0 = 0$$

$$\Delta\lambda \in ]0, 1] \text{ (0.2 par exemple)}$$

$$\Delta\lambda_{min} \in ]0, \Delta\lambda[ \text{ (1.e-3 par exemple)}$$

**Tant que**  $(\bar{\lambda} < 1)$  et  $(\Delta\lambda > \Delta\lambda_{min})$  **faire**

$$\Delta\lambda = \min(\Delta\lambda, 1 - \bar{\lambda})$$

$$\tilde{\lambda} = \bar{\lambda} + \Delta\lambda$$

Chercher  $\tilde{z}$  solution de  $H(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = 0$  avec  $\bar{z}$  pour point de départ

**Si** la résolution est un succès **Alors**

$$\bar{z} = \tilde{z}$$

$$\bar{\lambda} = \tilde{\lambda}$$

**Sinon**

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda/2$$

**Fin Si**

**Fin Tant que**

**Si**  $\bar{\lambda} = 1$  **Alors**

La continuation est un succès

**Sinon**

La continuation est un échec

**Fin Si**

Fin de l'algorithme.

On peut bien sûr modifier la mise à jour de  $\Delta\lambda$  en l'augmentant quand il y a succès ou en le diminuant moins ou davantage en cas d'échec.

L'application de la continuation discrète à notre problème  $(P)_\lambda$  s'est révélée fructueuse pour des poussées supérieures à 5 Newtons. Par contre elle a échoué pour la plupart des poussées inférieures. De plus, même en cas

de réussite de la continuation, cette méthode a un gros handicap qui est le temps pris pour diagnostiquer l'échec d'un pas. En effet en cas de réussite d'un pas, la convergence d'un algorithme de recherche de type Newton est assez rapide alors qu'en cas d'échec l'algorithme de recherche peut *tourner* longtemps avant de conclure à un échec. Ceci se révèle très pénalisant en terme de temps de calcul.

La seule hypothèse nécessaire au succès de la continuation discrète est l'appartenance des  $\tilde{\lambda}$  à la zone de convergence de l'algorithme de recherche de zéros employé. Cette condition n'est malheureusement pas toujours respectée et de plus, l'homotopie de notre problème  $(P_\lambda)$  possède des propriétés de régularité qu'il serait dommage de négliger.

**Remarque 2.3.** *La continuation discrète sera tout de même employée pour initialiser notre problème comme il est expliqué à la section 3.3*

Passons maintenant à une méthode homotopique beaucoup plus sophistiquée.

## 2.4 Homotopie simpliciale

Les méthodes homotopiques simpliciales, aussi appelées **P**iecewise **L**inear (PL) Methods sont basées sur la construction d'une approximation affine par morceaux du chemin de zéros. Leur avantage principale est que seule la continuité du chemin de zéros est nécessaire au succès de ces méthodes. Pour une description détaillée de ces méthodes, nous renvoyons le lecteur à [3, 4, 35].

Dans notre cas, les méthodes homotopiques simpliciales ont l'inconvénient de ne pas prendre en compte la différentiabilité de notre homotopie, ce qui a tendance à les rendre moins efficace que la méthode que nous présentons dans la section suivante.

Cependant, ces méthodes simpliciales ont été appliquées avec succès à notre problème  $(P)_\lambda$  [46] jusqu'à des poussées relativement faibles de l'ordre de 5 Newtons. De plus, il est important de noter que si notre homotopie n'était pas aussi régulière, les méthodes simpliciales seraient probablement les plus efficaces (voir les seules à converger).

Nous présentons maintenant une méthode homotopique basée sur la différentiabilité du chemin de zéros qui sera celle employée par la suite pour obtenir tous les résultats.

## 2.5 Homotopie différentielle

Dans cette section nous présenterons la méthode homotopique différentielle, également appelée continuation différentielle Prédicteur Correcteur

(PC). Les deux premières appellations viennent du fait que cette méthode utilise la différentiabilité du chemin de zéros (et donc la nécessité). La dernière appellation fait référence au moyen employé pour suivre le chemin de zéros.

On trouve un grand nombre de références dans la littérature traitant de cette méthode. Citons [25] de Chow-Mallet-York qui a donné naissance à l'algorithme que nous utilisons à savoir **HOMPACK90** [61] de Watson. D'autres articles de Watson, [57, 60, 58, 59], traitent du sujet mais à une différence près qui est que les algorithmes considérés sont globalement convergents avec une probabilité de un du fait des homotopies considérées qui sont paramétrées par une variable additionnelle  $a$  (en plus du paramètre homotopique  $\lambda$ ). Ce paramètre définit la solution en  $\lambda = 0$  et permet un suivi de chemin peu précis car on peut alors raffiner ce suivi de chemin à tout moment en changeant la valeur de  $a$ . On peut cependant utiliser la même méthode mis à part que les raffinages ne sont plus possibles de façon si simple.

Soit donc un homotopie  $H(z, \lambda) : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dont on souhaite suivre un chemin de zéros issue de  $\bar{z}_0$  tel que  $H(\bar{z}_0, 0) = 0$  (par la suite on note  $\bar{z}_\lambda$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  satisfaisant  $H(\bar{z}_\lambda, \lambda) = 0$ ).

### Existence

Comme indiqué précédemment, on a besoin de certaines hypothèses sur les chemins de zéros de  $H$ . D'où le théorème

**Théorème 2.2 (Existence de chemins).** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $H : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continûment différentiable et telle que :*

(a)  $\forall (z, \lambda) \in \{(z, \lambda) \in \Omega \times [0, 1] | H(z, \lambda) = 0\}$  la matrice Jacobienne  $H' = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial H}{\partial z_n} & \frac{\partial H}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$  soit de rang maximum  $n$  ;

(b)  $\forall z \in \{z \in \Omega | H(z, 0) = 0\} \cup \{z \in \Omega | H(z, 1) = 0\}$  la matrice  $\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial H}{\partial z_n} \end{bmatrix}$  soit de rang maximum  $n$ .

Alors  $\{(z, \lambda) \in \Omega \times [0, 1] | H(z, \lambda) = 0\}$  est constitué :

- (i) d'un nombre fini de courbes fermées (de longueur finie dans  $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ ) ;
- (ii) d'un nombre fini d'arcs (de longueur finie) ayant leurs points terminaux dans  $\partial\Omega \times [0, 1]$ .

Les courbes (i) et (ii) sont disjointes et continûment différentiables.

*Démonstration.* voir [32].

Les figures 2.1 illustrent les chemins possibles et impossibles (repris de [35]).

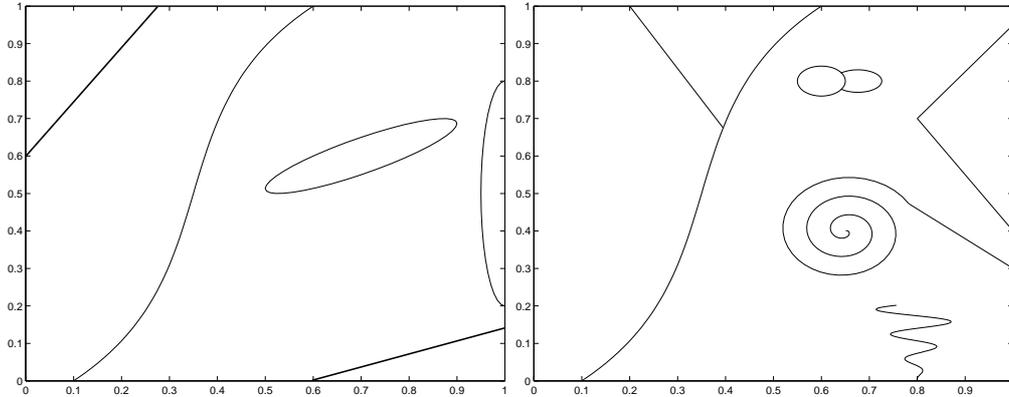


FIG. 2.1 – chemins possibles (à gauche) et impossibles (à droite)

### Méthode

Nous décrivons maintenant de façon succincte la méthode de suivi de chemin.

Supposons que  $H$  soit suffisamment régulière et que le chemins de zéros issue de  $(\bar{z}_0, 0)$  soit une courbe différentiable  $C$ . Paramétrisons cette courbe par l'abscisse curviligne  $s$ , et posons

$$\left| \left( \frac{\partial \bar{z}_\lambda}{\partial \lambda}, \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) \right| = 1. \quad (2.4)$$

Supposons de plus que

$$H'(\bar{z}_\lambda(s), \lambda(s)) \text{ soit de rang maximum } n. \quad (2.5)$$

Mais

$$H(\bar{z}_\lambda(s), \lambda(s)) = 0. \quad (2.6)$$

Par suite, en dérivant (2.6) par rapport à  $s$ , on obtient la relation d'orthogonalité suivante

$$\left[ \frac{\partial H}{\partial z}(\bar{z}_\lambda(s), \lambda(s)), \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\bar{z}_\lambda(s), \lambda(s)) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{z}_\lambda}{\partial s} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial s} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Les équations (2.4) et (2.7) permettent donc de définir, à la direction près, le vecteur tangent unitaire à  $C$  en  $(\bar{z}_\lambda(s), \lambda(s))$ .

Afin de déterminer la direction, on introduit la  $(n+1, n+1)$  matrice Jacobienne augmentée

$$A(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial \lambda}{\partial s} \\ \frac{\partial H}{\partial z}(z(s), \lambda(s)) & \frac{\partial H}{\partial \lambda}(z(s), \lambda(s)) \end{bmatrix}$$

(2.5) implique que  $A$  n'est pas singulière et donc

$$\text{sign}(\det(A(s))) = \text{sign}(\det(A(0))). \quad (2.8)$$

En se fixant la direction  $\text{sign}(\det(A(0)))$  au point initial  $(\bar{z}_0, 0)$  (on prendra  $\partial\lambda(0)/\partial s$  positif), on peut alors déterminer de façon unique le vecteur tangent unitaire à  $C$  grâce au système (2.4), (2.7) et (2.8). Notons  $t(H'(z, \lambda))$  ce vecteur tangent à  $C$  en  $(z, \lambda)$ .

**Remarque 2.4.** *Si on suppose le chemin de zéros croissant en  $\lambda$ , on peut paramétrer le chemin de zéros par  $\lambda$ . On n'aura alors pas besoin de la Jacobienne augmentée puisqu'il suffira d'imposer la croissance de  $\lambda$  (ce qu'on peut également faire avec la paramétrisation par  $s$ ).*

Suivre le chemin de zéros de l'homotopie revient alors à intégrer le problème à valeur initiale :

$$(IVP)_t \begin{cases} (\dot{z}(s), \dot{\lambda}(s)) & = t(H'(z(s), \lambda(s))) \\ (z(0), \lambda(0)) & = (\bar{z}_0, 0) \end{cases} \quad (2.9)$$

et ce de  $s = 0$  à  $s^f$  avec  $s^f$  tel que  $\lambda(s^f) = 1$ .

Pour intégrer  $(IVP)_t$  on a plusieurs choix possibles. Le premier venant à l'esprit consiste tout simplement à faire une intégration numérique classique (Runge-Kutta ou autres, pas fixe ou adaptatif). On s'aperçoit assez rapidement que dans le cas du problème  $(P)_\lambda$ , le calcul du vecteur tangent unitaire mettant en jeu un grand nombre d'opérations numériques, une telle intégration accumulera les erreurs et n'aboutira au mieux qu'à une approximation plus ou moins acceptable (avec un fort penchant pour le moins) d'une solution de  $(P)$ . De plus une telle technique néglige de prendre en compte l'information la plus importante, à savoir le fait que le chemin est un chemin de zéros de l'homotopie.

Cette dernière remarque nous mène tout naturellement au second choix d'intégration de  $(IVP)_t$ . En effet, la méthode généralement utilisée est celle de Prédiction-Correction qui consiste en une étape de prédiction se caractérisant par un pas d'intégration (en général suivant un schéma simple) et en une étape de correction consistant à ramener la prédiction sur le chemin de zéros. Attention, cette méthode n'est pas la méthode de prédiction correction que l'on peut rencontrer en dehors de l'homotopie différentielle (comme méthode d'intégration d'une équation différentielle) puisqu'elle ne fait pas appel à plusieurs schémas d'intégration mais directement à la pro-

priété d'appartenance au chemin de zéros de chaque intérêt. La figure 2.2 illustre la méthode de prédiction-correction :

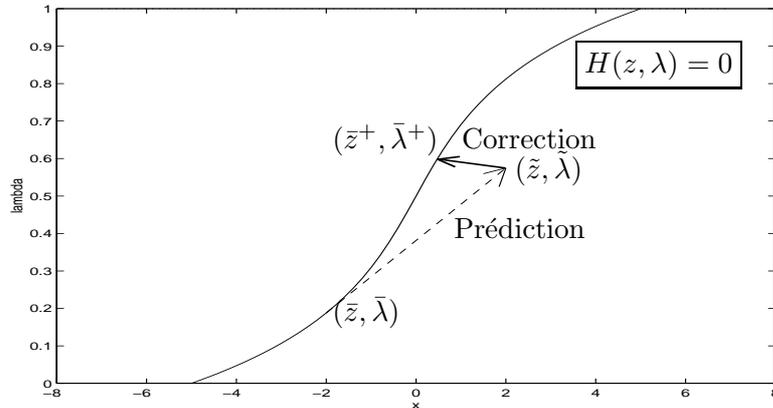


FIG. 2.2 – Prédiction-Correction pour l'intégration.

Sur cette figure, la prédiction est linéaire (dirigée suivant la tangente au point courant) et la correction est celle de norme minimum. Ces deux étapes sont en pratique celles utilisées dans notre méthode de résolution comme on le verra dans le chapitre suivant.

De plus, on peut mettre en œuvre une stratégie d'adaptation de la prédiction tenant compte de l'historique récent des fiabilités des prédictions précédentes. Ainsi si les dernières prédictions étaient très fidèles on pourra vraisemblablement prendre plus de risque dans les prochaines en augmentant par exemple la longueur du pas utilisé. Inversement, si les dernières prédictions étaient mauvaises (en ce sens qu'elles ont nécessitées un grand nombre de correction pour retrouver le chemin de zéros), les prochaines seront faites avec plus de précautions, c'est-à-dire en diminuant le pas pour la prédiction.

**Remarque 2.5.** Dans le cas d'une paramétrisation par rapport à  $\lambda$ , l'étape de correction se fera obligatoirement à  $\lambda$  constant ce qui peut, dans certaines configurations particulières de chemin, être dommageable comme le montre la figure 2.3. De plus, si le chemin devient descendant, la correction risque de devenir très difficile.

On constate ici que la correction à  $\lambda$  constant à beaucoup moins de chance d'être faisable que celle où  $\lambda$  n'est pas constant du simple fait que la distance entre le point prédit et le point du chemin de zéros est plus importante dans un cas que dans l'autre (pour pouvoir faire la correction, le point prédit doit se trouver dans la zone de convergence de l'algorithme de

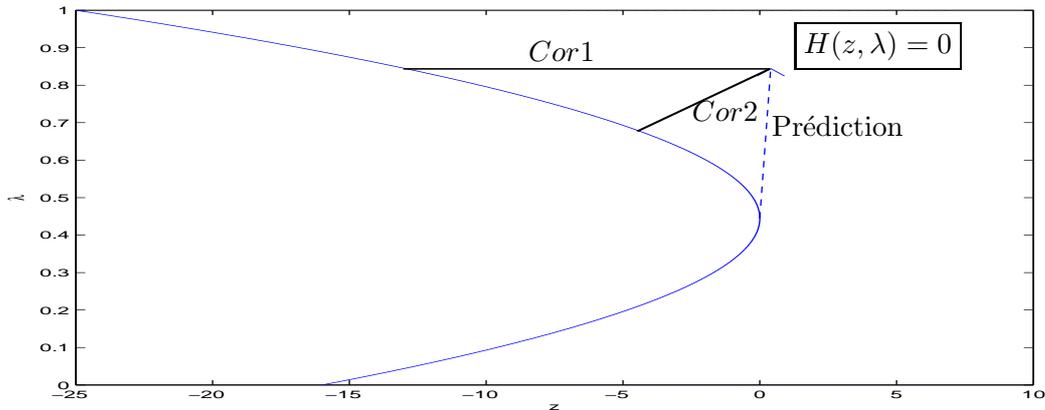


FIG. 2.3 – Prédiction-Correction avec correction à  $\lambda$  constant (*Cor1*) ou non (*Cor2*)

correction).

On peut résumer la méthode de continuation différentielle comme suit (algorithme en pseudo-code) :

Algorithme général de prédiction-correction

$\bar{z}$  tel que  $H(\bar{z}, 0)$

$\bar{\lambda} = 0$

$ds \in \mathbb{R}_+^*$  (0.1 par exemple)

**Tant que**  $\bar{\lambda} < 1$  **faire**

calculer  $t(H'(\bar{z}, \bar{\lambda}))$

$(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = \text{pred}(\bar{z}, \bar{\lambda}, ds, \dots)$  (prédiction)

$(\bar{z}, \bar{\lambda}) = \underset{(z, \lambda) \in H^{-1}(0)}{\text{argmin}} |(z, \lambda) - (\tilde{z}, \tilde{\lambda})|^2$  (correction)

adapter le pas de prédiction  $ds$

**Fin Tant que**

Bien entendu, on peut imaginer une myriade de variantes de cet algorithme. En effet, les étapes de prédictions et de corrections peuvent être effectuées de plusieurs manières différentes. Notons que toutes les étapes du corps de l'algorithme sont d'une grande importance et qu'elles doivent toutes être implémentées de façon efficace et en accord les unes par rapport aux autres.

Dans notre cas, nous avons employé un paquetage existant du nom de *HOMPACK90* [61]. Dans la première partie du chapitre suivant, nous exposerons les choix algorithmiques fait dans *HOMPACK90*.

## Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'exposer notre utilisation des méthodes homotopiques. Ces dernières étant le remède apporté au problème de sensibilité du tir simple par rapport à l'initialisation (cf. fin du chapitre précédent). Nous avons montré comment relier le problème de maximisation de la masse finale à celui de minimisation de l'énergie, ce dernier étant beaucoup plus régulier.

Les résultats théoriques justifiant notre usage de l'homotopie ont été donnés. Après quoi nous avons rapidement présenté les méthodes homotopiques discrète et simpliciale pour finir par une introduction concernant la continuation différentielle. Cette dernière méthode homotopique étant celle utilisée pour l'obtention des résultats des chapitres 4 et 5 du fait des propriétés de l'homotopie employée.

Le chapitre suivant détail les divers aspects numériques de notre méthode de résolution en commençant par une description de la continuation différentielle employée qui est celle implémentée dans *HOMPACK90* [61].

## Chapitre 3

# Aspects numériques

Dans ce chapitre sera, comme son nom l'indique, présentée la partie purement numérique du travail effectué. On exposera tout d'abord le détail de l'algorithme *HOMPACK90* utilisé. Puis on consacra la seconde section au calcul du jacobien de l'homotopie alors que la troisième partie traitera de l'initialisation de notre méthode homotopique. Il sera ensuite question de la mise à l'échelle des différents paramètres, suivie d'une discussion sur la validité de l'intégration utilisée. Pour finir, on présente rapidement les diverses composantes de notre méthode numérique qui n'ont pas encore fait l'objet des premières sections de ce chapitre. Tout ces choix ont été utilisés pour l'implémentation d'un logiciel nommé *MfMax* [41, 39, 40].

### Introduction

Nous allons dans un premier temps détailler la méthode de continuation différentielle utilisée pour notre problème spatial. Ceci passe tout d'abord par le calcul du vecteur tangent au chemin de zéros dont la principale composante est l'évaluation du jacobien de l'homotopie. On donne ensuite le choix fait pour le schéma de prédiction ainsi que pour la phase de correction, ces deux étapes faisant intervenir le calcul du vecteur tangent. On donne ensuite l'étape d'adaptation de la longueur du pas de prédiction. Cette première section se termine alors par la présentation de la terminaison de l'algorithme et par un algorithme en pseudo-code.

La section suivante est consacrée à l'évaluation du jacobien qui rappelons-le est une phase primordiale de notre méthode de résolution car elle est faite à toutes les étapes du suivi de chemin.

Il est ensuite question de la mise à l'échelle des variables du problème.

On aborde alors le choix concernant l'intégration du problème aux deux bouts qui est une étape primordiale de l'évaluation de l'homotopie et donc

de son jacobien.

Pour finir, on expose les choix relatifs à l'algorithme de recherche de zéros ainsi qu'à son emploi à certaines étapes du suivi de chemin de zéros.

### 3.1 HOMPACK90

Dans cette section est détaillé une grande partie de l'algorithme *HOMPACK90* [61] qui est le noyau de notre stratégie de résolution.

Posons  $v = (z, \lambda)$  et  $H(v)$  l'homotopie dont on veut suivre un chemin de zéros issu de  $\bar{v}_0 = (\bar{z}_0, 0)$  solution de  $H(v) = 0$ . On suppose  $H$  suffisamment régulière pour être l'objet de la continuation différentielle (on suppose donc entre autre que son jacobien est de rang maximum). Notons que dans cette partie,  $H(z, \lambda) = \mathcal{S}(z, \lambda)$ .

La première étape importante, si ce n'est la plus importante, est le calcul du vecteur tangent unitaire.

#### Vecteur tangent

Son calcul est vital pour les étapes de prédiction et de correction. Il est donc très important de le détailler. Les principales étapes de ce calcul sont :

1. Calcul de  $H'(v)$  d'après la fonction fournit par l'utilisateur ;
2. Factorisation  $QR$  du jacobien  $H'(v)$  ;
3. Vérification de la non-singularité du jacobien (test de la diagonale de  $R$ ) ;
4. Calcul d'un élément du noyau du jacobien, ceci nous donne un vecteur tangent ;
5. Normalisation du vecteur tangent ;
6. Ajustement de la direction du vecteur tangent (par produit scalaire avec le vecteur précédent, s'il est positif alors OK, sinon on inverse la direction).

**Remarque 3.1.** *On peut être étonné par la dernière étape du calcul car elle n'utilise pas la notion de jacobienne augmentée. Malgré tout, nos chemins étant toujours croissant en  $\lambda$  (ce que nous avons pu vérifier expérimentalement), les deux façons de calculer la direction du vecteur tangent deviennent équivalentes.*

L'étape 2 de factorisation est confiée à la routine *DGEQRF* de *LAPACK* [5].

L'étape 1 fait l'objet de la section suivante.

## Prédictions

Pour la prédiction, nous avons deux possibilités qui consistent à effectuer soit un pas d'Euler soit une interpolation cubique d'Hermite. Ces choix de schéma de prédiction peuvent paraître simplistes mais il faut préciser que le calcul du vecteur étant coûteux, nous essayons d'avoir une prédiction nécessitant le moins possible de calcul de ce vecteur. Précisons de plus que dans l'algorithme original, l'utilisation du pas d'Euler était restreinte à la première prédiction (au début, on ne dispose pas d'assez d'information pour faire mieux). C'est donc en cela que nous avons modifié l'algorithme en se donnant la possibilité d'effectuer systématiquement un pas d'Euler pour la prédiction.

La prédiction linéaire, le pas d'Euler, consiste simplement à traduire le point courant (qui se trouve sur le chemin de zéros) selon le vecteur tangent sur une distance égale à la longueur de pas  $d$  estimée aux étapes précédentes. Cette prédiction est illustrée par la figure 3.1.

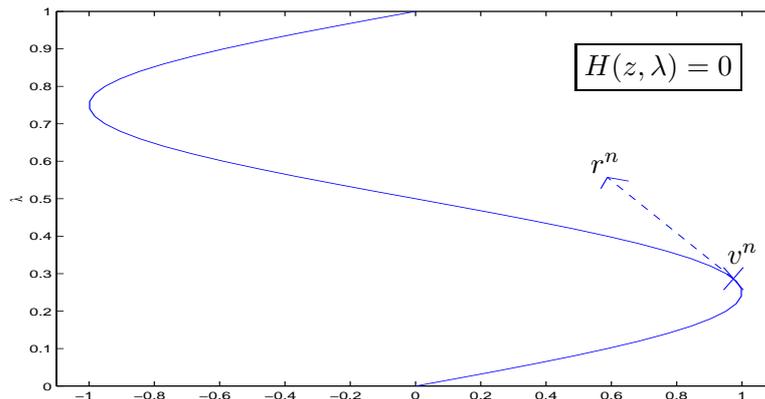


FIG. 3.1 – Prédiction linéaire.

La prédiction cubique nécessite la connaissance du point courant, du vecteur tangent en ce point mais aussi du point précédent du chemin de zéros ainsi que du vecteur tangent associé. Grâce à ces informations on peut approximer localement le chemin de zéros par un polynôme de degré 3 ce qui nous permettra d'avoir une prédiction plus précise que la prédiction linéaire et donc d'effectuer de plus grand pas. La figure 3.2 illustre cette prédiction.

**Remarque 3.2.** *Au vu de la dernière remarque, on peut se demander quel peut bien être la raison pour laquelle on s'est permis de faire des prédictions linéaires systématiques. En fait, quand le vecteur tangent est calculé avec une trop grande erreur, la prédiction cubique peut accumuler ces erreurs*

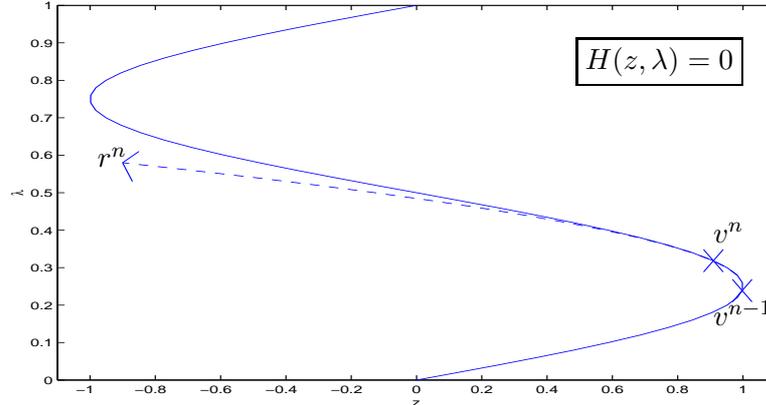


FIG. 3.2 – Prédiction cubique.

et donner une prédiction assez mauvaise. De plus, on a pu constater sur nos exemples que nos chemins de zéros étant assez réguliers, les prédictions linéaire et cubique sont à peu de choses près équivalentes.

### Correction

Une fois la prédiction effectuée, il nous faut retourner sur le chemin de zéros. Or, en supposant que la prédiction est assez précise (on a uniquement fait un pas), on se trouve dans un voisinage proche du chemin de zéros. On peut donc espérer atteindre le chemin en quelques pas de Newton. Si  $r^n$  est le point prédit, on cherche  $v^n$  tel que :

$$v^n = \underset{\omega \text{ tq } H(\omega)=0}{\operatorname{argmin}} |r^n - \omega|^2.$$

ce qui correspond à rechercher le point du chemin qui est le plus proche du point prédit. Un algorithme classique de calcul de la solution de ce problème aux moindres carrés est :

1. Calcul du jacobien  $H'(r^n)$  et de sa factorisation  $QR$ ;
2. Calcul d'une solution de  $P$  de :

$$H'(r^n)P = -H(r^n). \quad (3.1)$$

(rappelons que  $H'(r^n) \in \mathcal{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$ );

3. Calcul de la solution de norme minimum  $PN$  de l'équation (3.1), cette solution est  $PN = P - (P|t(H'(r^n)))t(H'(r^n))$  (avec  $t(H'(r^n))$  le vecteur tangent unitaire)
4. Application du pseudo pas de Newton  $PN$ .

Il est important de noter qu'on n'applique pas indéfiniment le pas de correction jusqu'à retourner sur le chemin de zéros. En effet, on s'autorise un nombre maximum **nitmax** d'itérations de correction après quoi, si on n'a

toujours pas atteint le chemin de zéros, on suppose que la prédiction a été trop mauvaise et on diminue le pas de prédiction. Pour le calcul de l'itération exposé, **nitmax** vaut en général 4, mais il faut bien comprendre qu'un échec de correction (et donc de prédiction) représentera **nitmax** évaluations de jacobien perdues, ce qui est très coûteux à l'algorithme.

**Remarque 3.3.** *En fait nous avons ici décrit la correction effectuée dans un des algorithmes de continuation différentielle de HOMPACK90, à savoir fixpnf. La continuation différentielle avec prédiction-correction est également implantée dans l'algorithme fixpqf (toujours appartenant à HOMPACK90) à une différence près par rapport à fixpnf. Cette différence vient du calcul du pas de correction qui ne fait plus intervenir une réévaluation systématique du jacobien mais sa mise à jour de rang 1 (de Broyden). De plus, le calcul du pas de correction utilise une transformation de Householder du jacobien augmenté (non par l'homotopie mais par le dernier vecteur tangent unitaire calculé). Cette dernière stratégie c'est révélée la plus efficace dans la résolution de  $(P)_\lambda$  et c'est donc celle qui est utilisée par la suite. Rajoutons que l'économie faite par la mise à jour est utilisée pour s'autoriser un plus grand nombre de pas de correction.*

### Adaptation du pas

Une fois l'étape de prédiction-correction effectuée avec succès, il reste à observer quel a été son déroulement (si la première prédiction a été la bonne ou a été un échec). Ceci permet de calculer la prochaine longueur de pas de prédiction. Les étapes de ce calcul sont :

1. Calcul de **idlerr**, l'erreur désirée pour la prochaine prédiction.
2. Extrapolation de la courbure  $\gamma$  du prochain point prédit.
3. Premier calcul du pas :

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot \text{idlerr}}{\gamma}}.$$

4. On vérifie que  $h$  reste dans les bornes prescrites par l'utilisateur

$$h = \min(\max(h_{\min}, b_{\min} \cdot h_{\text{old}}, h), b_{\max} \cdot h_{\text{old}}, h_{\max})$$

avec  $h_{\min}$  et  $h_{\max}$  les pas minimum et maximum autorisés,  $h_{\text{old}}$  le dernier pas de prédiction,  $b_{\min}$  et  $b_{\max}$  les facteurs de réduction et d'expansion maximums.

5. Si la première prédiction tentée a été un échec, ne pas prendre  $h$  plus grand que le pas de prédiction qui a causé l'échec.

### Terminaison

Se pose maintenant la question de la terminaison de l'algorithme. En effet, durant la prédiction, rien n'est fait pour garantir le non dépassement de  $\lambda = 1$ , et même si c'était le cas, la correction ne se faisant pas à  $\lambda$  constant on ne peut pas connaître la valeur du  $\lambda$  du point corrigé (celui appartenant au chemin de zéros).

Le choix de l'algorithme est le suivant :

1. Prédiction sans se soucier de la valeur prédite de  $\lambda$  ;
2. Pas de correction itérés, si la correction est un succès on continue sinon on refait la prédiction ;
3. Adaptation de la longueur du pas de prédiction ;
4. Test de la valeur du nouveau  $\lambda$ , si  $\leq 1$  alors on retourne à l'étape 1, sinon on passe à l'étape suivante ;
5. Calcul par une combinaison de bisection et de pas de Newton de la solution en  $\lambda = 1$ .

Lors de la dernière étape, on peut procéder par bisection (pour initialiser la recherche par pseudo pas de Newton) car on connaît deux points du chemin de zéros qui encadre la solution en  $\lambda = 1$  (le dernier et l'avant-dernier point calculés). On fait cependant l'hypothèse (en pratique toujours vérifiée) qu'on a bien un encadrement, i.e que le chemin de zéros n'est pas trop biscornu au voisinage de  $\lambda = 1$ .

Il y a cependant un autre point de cette stratégie de terminaison qui mérite discussion. Ce point est tout simplement le premier, i.e la prédiction. Cette dernière ne se souciant pas de la valeur du  $\lambda$  engendrée sortira fatalement du domaine de définition théorique de l'homotopie qui rappelons est défini sur  $\Omega \times [0, 1]$  (avec  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ). De plus, dans le cas de notre problème  $(P)_\lambda$  sortir de ces bornes n'a plus de réelle signification physique (on cherche alors à minimiser  $\int (1 + \varepsilon)|u| - \varepsilon|u|^2$ , avec  $\varepsilon > 0$ ). C'est pourquoi nous appliquons la définition suivante de notre fonction de tir (l'homotopie) :

$$\mathcal{S}(z, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(z, \min(1, \lambda)). \quad (3.2)$$

l'effet en est qu'une solution de  $(P)_l$  avec  $l \geq 1$  est une solution de  $(P)$ . Ce changement comporte le désavantage de rendre l'homotopie non différentiable en  $\lambda = 1$ , désavantage n'en étant pas vraiment un puisque numériquement parlant on ne calculera jamais la dérivée en ce point précis (en tout cas par rapport à  $\lambda$ ).

De plus, une très légère modification a été apporté au code pour limiter le dépassement de  $\lambda = 1$  afin de ne pas arriver à des  $\lambda$  exorbitants. D'un

point de vue purement algorithmique, cela ne consiste qu'en la réduction de la longueur du pas de prédiction si ce dernier nous emmène trop loin.

### Algorithme

Pour finir, nous exposons l'algorithme en pseudo-code :

#### Algorithme

##### Initialisation

Résoudre le problème simple  $\rightarrow (z_0, 0)$  tq  $H(z_0, 0) = 0$ .

Choisir **nstepmax** (nombre max de pas d'intégration)

Choisir **ARCRE**, **ARCAE**, tolérance (relative et absolue) pour le suivi du chemin.

Choisir **ANSRE**, **ANSAE**, tolérance (relative et absolue) pour la solution en  $\lambda = 1$ .

$(z_0, \lambda_0) := (z_0, 0)$

**nstep** := 0

Choisir **nitmax** (nombre de corrections autorisées pour revenir sur le chemin de zéros).

##### Corps

##### Début

##### Répéter

Calcul du vecteur tangent unitaire  $t(H'(z_{nstep}, \lambda_{nstep}))$

**étiquette 10**

$r := (z_{nstep}, \lambda_{nstep}) + h * t(H'((z_{nstep}, \lambda_{nstep})))$  (**Prédiction**)

Pour i = 1 à nitmax faire (**Correction**)

$r := r - H'(r)^+ * H(r)$  (pseudo-pas de Newton)

Si  $|H'(r)^+ H(r)|_2 \leq ARCRE|r|_2 + ARCAE$

Alors

Aller à l'étiquette 20

Fin si

Fin Pour

$h = h/2$  (on diminue le pas d'intégration)

Aller à l'étiquette 10

**étiquette 20**

$nstep := nstep + 1$

$(z_{nstep}, \lambda_{nstep}) := r$

Estimation du pas optimal pour la prochaine intégration.

jusqu'à  $\lambda_{nstep} \geq 1$  ou  $nstep \geq nstepmax$

Si  $nstep \geq nstepmax$  Alors

Pas assez de pas d'intégration autorisé

Sinon

Résoudre  $H(z, 1) = 0$  avec comme point de départ  $(z_{nstep}, \lambda_{nstep})$ ,  
et comme tolérance ANSRE et ANSAE

Fin Si

Fin

## 3.2 Jacobien

### Intérêt

On a vu dans la section précédente combien l'évaluation du jacobien de l'homotopie était importante car elle intervient dans le calcul du vecteur tangent et dans celui des pas de correction. Il est donc impératif que le calcul de ce jacobien soit le plus correct possible.

Or, pour bien évaluer ce jacobien il faut savoir comment est calculer l'homotopie. L'homotopie est la fonction de tir  $\mathcal{S}(z, \lambda)$  qui est calculée par intégration d'un problème à valeur initiale. Du fait de la nature physique du problème, une intégration à pas fixe est inenvisageable si on veut garder une grande précision numérique. De plus, la discontinuité du contrôle en  $\lambda = 1$  nous interdit automatiquement le pas fixe puisque nous ne connaissons pas (et nous nous interdisons de connaître) *a priori* la structure de la commande optimale. Nous sommes donc dans l'obligation d'utiliser un intégrateur numérique à pas adaptatif.

L'intégrateur que nous utilisons est *rkf45* [52] qui utilise un schéma d'intégration de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 avec une stratégie d'adaptation de pas de Fehlberg. La validité de cet intégrateur sera discuté à la section 3.4.

### Différentiation

Pour revenir au problème de différentiation, nous avons trois techniques usuelles à notre disposition.

La première consiste à calculer le jacobien à l'aide du calcul variationnel. Cependant, le second membre de notre problème à valeur initiale n'est que  $C^1$  par morceaux et ne satisfait donc pas les contraintes de régularités nécessaires à l'utilisation du calcul variationnel.

### Différentiation automatique

La seconde technique est la différentiation automatique [10, 43] qui est par ailleurs utilisée pour le calcul de la dynamique des états adjoints  $(-\partial_x \mathcal{H})$  pour certaines formulations plus compliquées du problème (mais pas pour  $(P)_\lambda$ ). Mais ici l'intégration à pas adaptatif utilisée nous interdit l'utilisation de cette technique.

Pour avoir une idée du pourquoi de cette interdiction, considérons un couple  $(\bar{z}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ . Le calcul de  $(\bar{z}, \bar{\lambda})$  sera fait suivant une discrétisation temporelle  $(\bar{t}_i)_{i \in \llbracket 1, \bar{N} \rrbracket}$  (calculée automatiquement). Or dans n'importe quel voisinage de  $(\bar{z}, \bar{\lambda})$ , rien ne nous empêche de pouvoir trouver un autre

couple  $(z, \lambda)$  qui induira une autre discrétisation  $(t_i)_{i=1,\dots,N}$  totalement différente de la précédente. On n'aura donc pas continuité de la fonction  $\mathcal{S}(z, \lambda)$  en tant que fonction numérique.

C'est cette constatation qui nous empêche d'espérer avoir de bons résultats avec la différentiation automatique, ce qui s'est révélé être confirmé par l'expérimentation numérique.

### Différences finies

La dernière technique envisagée, et donc celle retenue, est la technique des différences finies. On en distingue les trois schémas suivants

$$\mathcal{S}'(x) \approx \begin{cases} \frac{\mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(x-h)}{h} & \text{arrière} \\ \frac{\mathcal{S}(x+h) - \mathcal{S}(x-h)}{2h} & \text{centré} \\ \frac{\mathcal{S}(x+h) - \mathcal{S}(x)}{h} & \text{avant} \end{cases} \quad (3.3)$$

On élimine d'office le schéma arrière puisque nous souhaitons calculer un Jacobien qui servira à l'évaluation du vecteur tangent que nous souhaitons orienté vers les  $\lambda$  croissants, si on suppose le chemin croissant en  $\lambda$ , ce qui est en fait le cas.

Les schémas centré et avant sont au premier abord tout les deux aussi approprié à notre problème. Notons cependant deux arguments en faveur de l'un et de l'autre.

Le premier argument concerne le coût d'évaluation des deux schémas. En effet, les schémas exposés concerne l'évaluation de la dérivée dans une seule direction, i.e. suivant une seule des composantes de la fonction. Le coût d'évaluation pour  $\mathcal{S}'$  (en terme d'évaluation de  $\mathcal{S}$ ) est donc de  $2n + 2$  pour le schéma centré et seulement  $n + 2$  pour le schéma avant. Etant donné que les évaluations de  $\mathcal{S}$  représentent la quasi-totalité du temps de calcul, on préférera le schéma avant en cas d'équivalence en terme de précision.

Or c'est là que le bât blesse et qu'intervient notre second argument. En effet, dans les deux schémas, le pas de différence finie  $h$  doit être adapté à la manière dont est calculée  $\mathcal{S}$ . L'adaptation se fait en fonction des précisions d'intégration du problème à valeur initiale sous-jacent. Il est effectivement évident que le pas de différence finie ne doit pas être inférieur à la précision de l'évaluation de la fonction à dérivée sous peine de différencier non pas la fonction mais les erreurs numériques. De même ce pas ne doit pas être trop important sans quoi le résultat ne correspondra plus à la pente de la tangent de la fonction au point considéré mais simplement à la pente d'une droite passant par deux points relativement éloignés de la fonction.

Malheureusement, il n'est pas du tout évident de déduire ce pas en prenant uniquement en compte les données objectives du problème. Le meilleur moyen restant encore l'expérimentation au cas par cas. A l'usage, il est

apparu que le schéma centré était moins sensible au choix du pas que le schéma avant. Ceci explique qu'on préfère utiliser le schéma centré à moins que le coût d'évaluation de la fonction dont on cherche la dérivée ne soit exorbitant. Dans ce dernier cas il faudrait prévoir une étude très ciblée du comportement du schéma avant en fonction du pas  $h$  choisit. Nous n'avons pas pu faire une étude systématique dans ce sens car nos problèmes  $(P)_\lambda$  sont fortement dépendant des paramètres  $T_{max}$  et  $c_{tf}$  (cf. chapitre 1.2), mais aussi de  $\lambda$ , c'est-à-dire du critère qu'on cherche à minimiser.

Pour conclure, notons que le pas  $h$  est ici pris comme relatif et est adapté à la magnitude de la composante suivant laquelle on calcul la dérivée ( $h = h|x_i|$  si  $|x_i| > tol$ , une tolérance).

### 3.3 Initialisation

#### Rappel

Comme expliqué au chapitre 2, notre stratégie de résolution du problème  $(P)$  consiste à commencer par résoudre le problème  $(P)_0$  (minimisation du carré de la norme  $L^2$ ) puis par l'intermédiaire des  $(P)_\lambda$  à remonter jusqu'à la solution désirée. Il nous faut donc savoir résoudre  $(P)_0$  et si possible en un temps acceptable et sans connaissance *a priori* sur la structure de la commande optimale.

$(P)_0$  ayant un critère régulier, les domaines de convergences associés sont plus étendus que ceux de  $(P)$ . Cependant, on constate que pour des poussées inférieures à 5 Newtons, la résolution requiert une dose non négligeable d'expertise. Il est donc nécessaire de mettre sur pied une stratégie d'initialisation efficace.

#### Stratégie

Pour cela, on s'inspire de la première stratégie en introduisant une seconde homotopie qui prendra place avant celle exposée au chapitre 2. Il nous faut trouver un problème encore plus simple que  $(P)_0$  tout en étant proche de ce dernier. Or, on peut faire la constatation suivante :

*Si les orbites initiale et terminale sont identiques, alors la stratégie optimale en terme de dépense d'énergie (tout comme de carburant) est une commande nulle*

Soit donc le problème (en coordonnées de Gauss) :

$$(P_{CI})_\lambda \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^{t^f} |u(t)|^2 dt \\ \dot{x} = f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x) \\ \dot{m} = -\beta T_{max} |u| \\ |u| \leq 1 \\ t^f = c_{tf} t_{min} \\ P(0) = (1-\lambda)P^f + \lambda P^0, \quad P(t^f) = P^f \\ e_x(0) = (1-\lambda)e_x^f + \lambda e_x^0, \quad e_x(t^f) = e_x^f \\ e_y(0) = (1-\lambda)e_y^f + \lambda e_y^0, \quad e_y(t^f) = e_y^f \\ P(0) = (1-\lambda)h_x^f + \lambda h_x^0, \quad h_x(t^f) = h_x^f \\ P(0) = (1-\lambda)h_y^f + \lambda h_y^0, \quad h_y(t^f) = h_y^f \\ L(0) = L^0, \quad L(t^f) \text{ libre} \\ m(0) = m^0, \quad m(t^f) \text{ libre} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On voit aisément que le contrôle identiquement nul est l'unique solution de  $(P_{CI})_0$ . Notons  $\mathcal{S}_{CI}(z, \lambda)$  la fonction de tir associée à  $(P_{CI})_\lambda$ . On a très rapidement :

$$\mathcal{S}_{CI}(\bar{z}, 0) = 0 \Leftrightarrow \bar{u}_{\bar{z}}(t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \bar{z} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (3.5)$$

**Remarque 3.4.** *Dans le cas d'un problème avec rendez-vous, qui correspondra à la prochaine modification ( $\tilde{P}$ ) de ( $P$ ), le contrôle nul ne sera plus solution de la fonction  $\tilde{\mathcal{S}}_{CI}$  (fonction de tir correspondant à  $(\tilde{P}_{CI})_\lambda$ ). Cependant, pour peu que la longitude finale fixée ne soit pas trop éloignée de celle du transfert sans rendez-vous, la contribution à apporter pour réaliser le rendez-vous restera relativement faible. La stratégie de commande optimale consistera juste à modifier la longitude et le point  $z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  restera dans le domaine de convergence de notre algorithme de recherche de zéro et permettra donc de trouver une solution de  $(\tilde{P}_{CI})_0$ . On perdra cependant l'unicité de la solution.*

Ayant le point  $\bar{z}_{CI,0}$  (en notant  $\bar{z}_{CI,\lambda}$  un zéro de  $\mathcal{S}_{CI}(\cdot, \lambda)$ ), on peut alors tenter de suivre un éventuel chemin de zéros afin de trouver  $\bar{z}_{CI,1}$  qui sera également un zéro de  $\mathcal{S}(\cdot, 0)$ . La continuation discrète donne sur ce suivi de chemin de très bons résultats et on arrive sans problème à trouver des initialisations (des solutions de  $(P)_0$ , rappelons-le) pour des poussées descendant jusqu'à 0.5 Newton (pour les formulations suivantes du problème, on peut descendre jusqu'à 0.02 Newton). Le tableau 3.1 donne les temps de calcul obtenus pour la résolution de  $(P)_0$  avec la stratégie exposée et ce sur un PC équipé d'un processeur pentium IV à 2.8 GHz de fréquence et de 512 Ko de mémoire cache (la mémoire vive disponible n'a quasiment aucune influence

sur le temps de calcul). On peut voir que les temps de calcul restent raisonnables bien qu'ayant tendance à augmenter lorsque la poussée maximale augmente (le contraire eût été surprenant!).

$T_{max}$ (N.)	$c_{tf}$	temps d'exécution (s.)
10	1.5	5
10	3	4
5	1.5	3
1	1.5	40
0.5	1.5	93

TAB. 3.1 – Temps d'exécution de l'homotopie discrète sur  $(P_{CI})_\lambda$ .

**Remarque 3.5.** Le  $c_{tf}$  donné ici correspond bien entendu au  $t_{min}^f$  en  $\lambda = 1$ .

La suite des  $(\lambda_k)_k$  utilisée est calculé par l'algorithme de continuation discrète donné à la fin de la troisième section du chapitre précédent. Les valeurs de  $\Delta\lambda$  et  $\Delta\lambda_{min}$  sont en règle général de 0.2 et  $1.e - 2$  mais pour les poussées très faibles, il peut être préférable de diminuer  $\Delta\lambda$  jusqu'à 0.1.

L'application de la continuation différentielle ne permet pas de suivre un chemin de zéros de  $(P_{CI})_\lambda$ . Ceci est probablement dû à l'existence de plusieurs zéros de  $\mathcal{S}_{CI}(\cdot, 1)$  (ce qui implique directement la non unicité des zéros et pose la question des minima locaux qui sera traitée dans le chapitre 4). On a alors soit des bifurcations sur le chemin de zéros soit apparition de chemins de zéros. Il semble que la dernière hypothèse soit la bonne comme le montre la figure 3.3 qui nous montre des branches des chemins de zéros pour une poussée maximale  $T_{max}$  de 10 Newtons et un  $c_{tf}$  de 1.5. Ces différents graphes représentent  $\lambda$  en fonction des  $z_i$  (ce sont donc des projections de notre chemin de zéros). Ce sera notre représentation standard des chemins de zéros.

Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur l'existence des minima locaux et à leur élimination.

On pourrait penser qu'en introduisant directement la minimisation de la consommation dans  $(P_{CI})_\lambda$ , on aurait de la même façon une solution de  $(P_{CI})_0$  et qu'on pourrait alors suivre un chemin de zéros jusqu'à  $\lambda = 1$  qui serait une solution de  $(P)$ . Une telle stratégie oublierait de prendre en compte le fait que dans ce cas les structures de commandes optimales changeraient grandement avec l'évolution de  $\lambda$  car on verrait apparaître un grand nombre de commutations. Une telle stratégie serait donc vouée à l'échec de part les difficultés mentionnées dans la section 1.3 (afin d'avoir la conscience tranquille, des tests dans ce sens ont été menés qui confirment notre remarque).

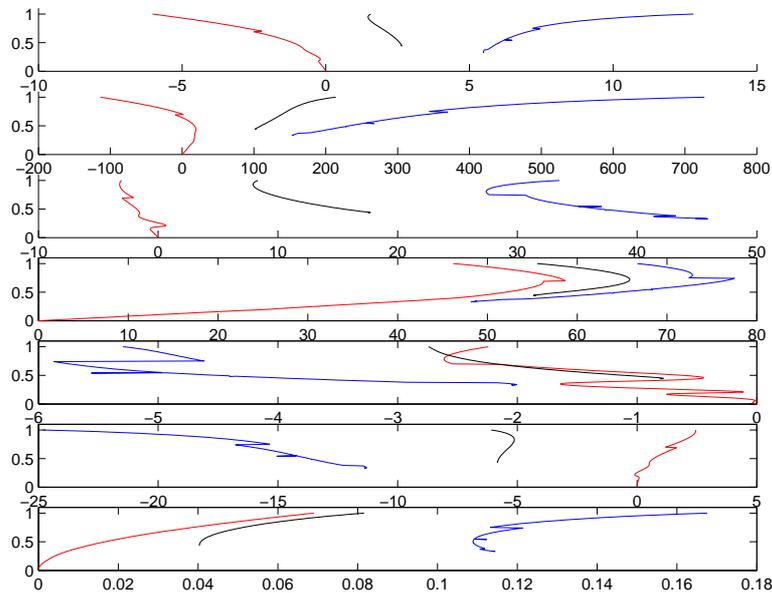


FIG. 3.3 – Branches des chemins de zéros de  $S_{CI}$  pour 10  $N$ . et  $c_{if} = 1.5$ .

**Remarque 3.6.** *L'auteur tient à insister sur le fait qu'avec la stratégie de continuation sur les conditions initiales et celle sur le critère on s'affranchit complètement d'une quelconque connaissance a priori quant à la structure de la commande optimale. Ceci nous permet donc de pallier l'inconvénient majeur du tir simple, à savoir la sensibilité par rapport à la condition initiale.*

### 3.4 Mise à l'échelle

#### Intérêt

Lors de calculs numériques en général et d'intégration ou de différentiation en particulier, la mise à l'échelle, aussi appelée *scaling*, est une opération pouvant grandement influencer sur la précision numérique. Par exemple, on comprend bien que dans le cas d'une intégration numérique à pas adaptatif, avoir une composante d'une magnitude beaucoup plus élevée que celles des autres composantes à intégrer va complètement fausser les tests de précisions qui se concentreront sur la satisfaction de la précision d'intégration de la composante à magnitude importante. On peut appliquer ce genre de raisonnement à une grande partie des calculs numériques. C'est pourquoi il est conseillé de ramener l'ensemble des variables concernées dans une même fourchette de magnitude. C'est cette opération que l'on nomme *scaling*.

La première mise à l'échelle à faire dans ( $P$ ) est d'utiliser des unités de mesures plus adaptées, à savoir le Mégamètre (Mm.), l'heure (h.) et le

kilogramme (kg., bien qu'après réflexion il semblerait que la tonne soit plus adaptée). Ces changements d'unités modifient les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^0 = 11.625 \text{ } Mm. \\ P^f = 42.165 \text{ } Mm. \\ \beta = 1.42.10^{-2} \text{ } Mm^{-1}.h. \\ \mu_0 = 5.1658620912.10^3 \text{ } Mm^3.h^{-2}. \\ T_{max} = (?N.) * 12.96 \text{ } kg.Mm.h^{-2}. \end{array} \right.$$

La seconde mise à l'échelle a beaucoup moins (en fait aucune) de réalité physique que la première. En effet, pour le scaling du vecteur  $y \in \mathbb{R}^{2n}$ , on lui applique (par multiplication composante à composante) un vecteur  $scal \in \mathbb{R}^{2n}$  dont l'influence est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = \varphi(t, y) \\ y(0) = y^0 \\ y(t^f) = y^f \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{y}} = \varphi(t, \tilde{y}/scal).scal \\ \tilde{y}(0) = y^0.scal \\ \tilde{y}(t^f) = y^f.scal \end{array} \right.$$

Où  $.$  est la multiplication composantes par composantes.

Dans notre algorithme nous avons mis en place une mise à l'échelle automatique des variables.

### Scaling automatique

Cette mise à l'échelle consiste à ramener toutes les variables (les composantes de  $y = (x, m, p, p_m) = (x, m, z)$ ) entre  $10^{-k}$  et  $10^{-k+1}$  en valeur absolue (avec  $k$  un entier fixé) à l'exception des composantes dont la magnitude est inférieure à un seuil de tolérance  $scaltol$  donné (pour éviter de mettre à l'échelle une composante étant un zéro numérique).

La fonction de mise à jour (*rescale*, tel est son nom) est la suivante :

Calcul du vecteur de scaling

$y \in \mathbb{R}^{2n}$  le vecteur à mettre à l'échelle

$k \in \mathbb{Z}$

$scaltol \in \mathbb{R}_+^*$

**Pour**  $i$  de 1 à  $2N$  **Faire**

**Si**  $|y_i| > scaltol$  **Alors**

$l = E(\log_{10}(|y_i|)) + k$

**Si**  $|y_i| < 1 \rightarrow l = l - 1$

**Sinon**

$l = 0$

**Fin si**

$scal_i = 10^{-l}$

**Fin Pour**

où  $E(\cdot)$  désigne la fonction partie entière.

En général on prend  $k$  valant 1 et  $scaltol$  de l'ordre de  $10^{-5}$ .

La mise à l'échelle automatique dans un algorithme tel que le notre peut sembler inutile puisqu'on pourrait très bien laisser cette charge à l'utilisateur. D'autant plus qu'un scaling identique sur toutes les variables n'est pas toujours la meilleure stratégie (mais jamais la plus mauvaise toutefois). Justifions donc notre choix en le basant sur 2 arguments solides.

### Conditions initiales

Le principe de l'homotopie sur les conditions initiales décrite dans la section précédente est d'effectuer un tir simple sur les problèmes  $(P_{CI})_\lambda$  successifs en partant de  $(P_{CI})_0$  dont la solution correspond aux inconnues  $\bar{z}_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Il est évident que ce n'est plus du tout le cas pour  $\lambda > 0$  et les inconnues solutions de  $\mathcal{S}_{CI}(z, \lambda) = 0$  auront des magnitudes différentes qui changeront avec  $\lambda$ . Or pour que le tir simple soit efficace, la mise à l'échelle se doit d'être adaptée au point de départ donné (on ne peut pas l'adapter à la solution car on ne la connaît pas). Il faut donc recalculer le vecteur de scaling à chaque nouvelle solution trouvée, d'où l'intérêt du scaling automatique.

### Continuation différentielle

Dans l'étape de prédiction, si la magnitude des inconnues n'est pas équivalente, cela risque de ralentir grandement la continuation. En effet, une composante ayant une grande magnitude (on peut la considérer comme grande à partir du moment où elle est supérieure à 1 en valeur absolue du

fait de la valeur de  $\lambda \in [0, 1]$ ) par rapport aux autres monopolisera tout le poids du vecteur tangent pour une faible évolution ( $|z_i| \gg (\lambda, |z_{j \neq i}|) \Rightarrow |\partial z_i / \partial s| \gg (|\partial \lambda / \partial s|, |\partial z_{j \neq i} / \partial s|)$ ). L'inconvénient sera qu'on aura une faible croissance de  $\lambda$  qui ralentira beaucoup l'algorithme.

Inversement, si toutes les composantes sont de faible magnitude par rapport à  $\lambda$ , ce sera la partie  $\partial \lambda / \partial s$  qui monopolisera la majeure partie du vecteur tangent. On peut penser que c'est une bonne chose mais cela résulte souvent en de mauvaises prédictions dont on sait qu'elles sont très pénalisantes car consommatrice de temps de calcul sans aucun bénéfice.

Notons toutefois qu'une mise à l'échelle automatique n'est ici pas aussi vitale que pour l'homotopie d'initialisation puisque les inconnues de  $\mathcal{S}$  reste environ du même ordre de grandeur tout au long du suivi de chemin.

**Remarque 3.7.** *On ne fait d'ailleurs pas de scaling à toutes les étapes de prédiction-correction de la continuation différentielle mais on se contente d'en faire lors des raffinages éventuels (cf. section 3.6).*

## 3.5 Intégration

### Question

Il a été noté à la section 1.3 que pour  $(P)$  la commande optimale est discontinue. Or cette commande optimale intervient directement dans le calcul du second membre du problème aux deux bouts ( $BVP$ ) associé à  $\mathcal{S}$  (fonction de tir de  $(P)$ ). Le calcul de  $\mathcal{S}$  requiert donc l'intégration d'un système d'équations ordinaires (ODE) à second membre discontinu. Cette intégration se fait numériquement avec un intégrateur de type Runge-Kutta avec contrôle du pas d'intégration de Fehlberg (*rkf45* [52]). Il est donc légitime de s'interroger sur la validité de cet intégrateur.

Pour vérifier cette validité on va s'inspirer des méthodes existantes d'intégration d'ODE à second membre discontinu. Dans la littérature on distingue deux grandes classes de méthodes. La première est basée sur un contrôle d'erreur évolué, comme dans [29, 54, 28, 33]. La seconde suppose la connaissance *a priori* d'une fonction permettant de localiser les discontinuités, ce qui permet d'adapter les pas d'intégration à ces dernières [23].

### Technique

Dans le cas de notre problème  $(P)$  nous connaissons une fonction qui détermine les instants de discontinuités, cette fonction est la fonction de commutation  $\psi$  (cf. section 1.3). Nous allons donc nous inspirer de la seconde approche sans pour autant en appliquer tous les principes. En effet, la seule propriété que doit vérifier notre intégrateur numérique est la bonne détection des instants de discontinuités qui se caractérisera par un pas d'intégration

adapté au passage des discontinuités (c'est-à-dire plus faible sur les discontinuités). Pour ce faire il n'est pas nécessaire de localiser précisément les discontinuités mais simplement de les détecter.

Nous souhaitons donc intégrer un problème à valeur initiale  $(IVP)_d$  de la forme :

$$(IVP)_d \begin{cases} \dot{y}(t) &= \varphi(t, y(t)) \\ y(0) &= y^0 \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

avec  $\varphi(t, y(t))$  discontinue quand la fonction de commutation  $\psi(t, y(t))$  change de signe. On suppose que  $\psi(t, y(t))$  est dérivable par rapport à  $t$  (ce qui est le cas presque partout dans notre problème), ce qui permet de modifier  $(IVP)_d$  en un problème à valeur initiale augmentée  $(IV\tilde{P})_d$  :

$$(IV\tilde{P})_d \begin{cases} \dot{\tilde{y}}(t) &= \begin{pmatrix} \varphi(t, y(t)) \\ \dot{\psi}(t, y(t)) \end{pmatrix} \\ \tilde{y}(0) &= \begin{pmatrix} y^0 \\ \psi(0, y^0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

L'intégration de  $(IV\tilde{P})_d$  nous permettra de vérifier à chaque pas la présence ou non d'une discontinuité à l'aide de la valeur de  $\psi$  et  $\dot{\psi}$ .

Considérons le temps courant  $t$  et le pas  $h$  (qu'il soit accepté ou rejeté). Posons :

$$s1 = \psi(t) \cdot \psi(t + h).$$

Suivant le signe de  $s1$  on peut distinguer les 2 cas présentés au tableau 3.2.

cas	$s1$	nombre possible de discontinuités
a	$> 0$	$2j$
b	$< 0$	$2j + 1$

TAB. 3.2 – nombre possible de discontinuités en fonction du signe de  $s1$

A chaque pas d'intégration, on examine le cas dans lequel on se trouve :

- a) on a un nombre pair de discontinuités. Si on suppose que  $\psi$  n'est pas trop irrégulière et que la longueur du pas d'intégration reste relativement faible, on peut raisonnablement penser qu'il n'y a pas de discontinuité. Pour vérifier cette supposition on peut d'autre part observer la magnitude de  $\psi(t)$  et  $\psi(t + h)$  qui si elle est importante interdit tout passage par

zéros du fait de la régularité de  $\psi$ . Ce cas ne pose alors pas de problème puisqu'il s'agit d'intégrer un second membre continu (et même  $C^\infty$ );

- b) il y a forcément au moins une discontinuité. Pour les mêmes raisons que précédemment on peut supposer qu'il n'y a qu'une discontinuité. Si le pas est refusé, on peut raisonnablement en conclure que le rejet est dû à la présence de la discontinuité. Si le pas est accepté on doit vérifier que sa longueur du pas d'intégration est faible.

On applique alors la stratégie ci-dessus sur tous les pas d'intégration et on vérifie qu'ils se sont tous bien déroulés. On compare également le résultat de l'intégration de  $(\tilde{IVP})_d$  avec celle de  $(IVP)_d$  afin de vérifier qu'on obtient bien la même intégration étant donné que l'introduction de  $\psi$  modifie forcément le comportement de l'intégrateur. Voyons maintenant les résultats obtenus pour notre problème.

### Résultat

Les tests de validité ont été effectués sur la troisième formulation du problème, i.e la formulation longitudinale de la dynamique avec  $L^f$  fixé et  $t^f$  libre (cf. section 4.4 pour plus de précisions).

On résume les résultats dans le tableau 3.3.

$T_{max}$ (N.)	$c_{L^f}$	# feval	# pas	# échec	$\frac{\text{succès}}{\text{total}}$	$ \psi_{max} _{com}$	$h_{max}$
10	2	20003	3434	386	0.82	4e-9	9e-9
5	2	38631	6640	716	0.82	2e-8	2e-8
1	2	178281	24715	3166	0.80	9e-7	1e-6
1	5	411433	71059	6325	0.79	9e-7	4e-6
0.5	2	345723	59600	5832	0.80	2e-6	3e-6

TAB. 3.3 – détails de diverses intégrations de  $(\tilde{IVP})_d$

Quelques explications et remarques à propos du tableau 3.3

- la colonne # feval désigne le nombre d'évaluations du second membre fait par l'intégration. Il est, comme on pouvait s'y attendre, de plus en plus important à mesure que  $T_{max}$  diminue ou que  $c_{L^f}$  augmente (la durée d'intégration étant de plus en plus étendue);
- la colonne # pas reporte le nombre total de pas calculés lors de l'intégration (qu'ils soient ou non acceptés). On a la même remarque que pour le point précédent;
- # échec correspond au nombre de pas rejetés;
- $\frac{\text{succès}}{\text{total}}$  est relatif au ratio entre le nombre de pas acceptés et le nombre total de pas calculés (cette colonne se déduit des 2 précédentes). Ce ratio est toujours du même ordre ce qui vient du fait que quelque soit

- la poussée considérée, le nombre de discontinuité est proportionnelle au temps total sur lequel on intègre. Et comme les pas rejetés ne sont pour la plus grande part à cause de la présence des discontinuités, le nombre de rejet reste proportionnel au nombre de pas acceptés ;
- l'avant dernière colonne  $|\psi_{max}|_{com}$  donne la norme maximum de la fonction de commutation après le franchissement d'un instant de discontinuité. Cela permet d'avoir une assez bonne idée de la place de la commutation par rapport au pas d'intégration qui a permis de la passer. On voit que cette colonne reste très faible même si elle a tendance à augmenter (ce qui indique que pour des poussées trop faibles on risque d'avoir des problèmes de validité et de satisfaction des précisions demandées). On a donc déjà un bon indice de la validité de l'intégration ;
  - la dernière colonne donne le pas maximum de franchissement d'un instant de commutation. On voit très bien que ces pas sont très faibles et donc que la discontinuité a bien été prise en compte d'autant plus que chaque passage de discontinuité est précédé d'un grand nombre de pas rejeté (une bonne vingtaine).

La conclusion du tableau 3.3 est que notre intégrateur détecte bien les discontinuités de  $(\tilde{IVP})_d$ . Pour vérifier qu'il fait de même pour  $(IVP)_d$ , il suffit de comparer les résultats des deux intégrations et on s'aperçoit alors que ces résultats sont du même ordre et donc qu'on ne perd pas de discontinuités de  $(IVP)_d$ . Cependant, l'intégration de  $(\tilde{IVP})_d$  est meilleure que celle de  $(IVP)_d$  car l'introduction de  $\psi$  dans les variables à intégrer implique un contrôle de pas plus exigeant. Ce surcroît d'exigence implique nécessairement des pas d'intégrations plus petits et donc plus nombreux. Les intégrations de  $(\tilde{IVP})_d$  sont donc aussi plus coûteuses que celle de  $(IVP)_d$ . Or les intégrations de  $(IVP)_d$  sont satisfaisantes et nous n'avons donc pas de raisons valables pour changer cette intégration.

Rajoutons que même si nous trouvions un intégrateur plus efficace pour  $(IVP)_d$  en terme de rapidité et de détection des discontinuités, il ne faudrait pas oublier que le calcul de notre fonction de tir associée à  $(P)$  est précédé de deux homotopies qui elles aussi nécessitent l'intégration d'un problème à valeur initiale qui lui n'a pas de second membre discontinu. Donc il faudrait que le nouvel intégrateur soit également plus efficace sur ces problèmes non discontinus ce qui est peu probable car le surcoût d'une bonne stratégie de détection des discontinuités sera forcément pénalisant en cas d'absence de celles-ci.

On garde donc notre intégrateur numérique *rkf45* qui paraît tout à fait adapté à notre problème.

Jetons maintenant un œil sur certains choix non encore présentés de notre méthode.

### 3.6 Rubrique-à-brac

Cette section est consacrée à la présentation de certains choix algorithmiques non encore présentés dans les sections précédentes.

Commençons par le solveur d'équations non linéaires.

#### Le solveur non linéaire

Notre méthode de résolution nécessite de disposer d'un algorithme de résolution d'un système d'équations non linéaires. En effet, l'homotopie sur les conditions initiales suppose qu'on puisse rechercher (et trouver) un zéro de la fonction de tir  $\mathcal{S}_{CI}$ .

Le solveur employé est *HYBRD* [51] appartenant à la librairie *MINPACK*. La raison de son utilisation est d'une part ses performances et d'autre part le fait qu'il est déjà utilisé dans **TfMin** [20].

Le but du solveur *HYBRD* est de trouver un zéro d'un système de  $N$  équations non linéaires à  $N$  inconnues et ce par une méthode hybride de Powell modifiée.

Dans cette méthode, la correction est faite par une combinaison convexe entre une correction de Newton et la direction mise à l'échelle du gradient. Ce choix de correction garantissant la convergence à partir de points initiaux éloignés de la solution et un taux rapide de convergence.

L'évaluation du jacobien est faite par différences finies avant. Sa mise à jour est une mise à jour de Broyden de rang 1. Celle-ci est réalisée tant qu'elle est satisfaisante faute de quoi on réutilise les différences finies.

Le temps d'exécution de la méthode est fortement dépendant du temps d'évaluation du système non linéaire et donc ici de celui de la fonction de tir dont on cherche un zéro.

D'où l'importance de l'évaluation de cette fonction de tir dont un aspect est traité au paragraphe suivant.

#### Dynamique des états adjoints

La fonction de tir est calculée par intégration d'un problème à valeur initiale. Son temps d'évaluation dépend donc de l'intégrateur numérique utilisé mais également du temps de calcul du second membre de ce problème à valeur initiale.

Or ce second membre est la dynamique des états et états adjoints qui est donnée par les dérivées partielles du Hamiltonien  $\mathcal{H}$  par rapport à ces derniers. La dynamique des états est déjà connue et consiste en les équations (1.2) et (1.3). Par contre, pour obtenir la dynamique des états adjoints, il nous faut dériver  $\mathcal{H}$  par rapport à l'état  $(x, m)$ .

Pour ce faire on a bien entendu la possibilité d'utiliser la différentiation automatique [10],[43]. Le coût de la différentiation automatique n'est cependant pas négligeable en terme de temps d'évaluation. Il peut donc être utile de fournir la dynamique des états adjoints de façon exacte quand cela est possible.

Dans le cas qui nous intéresse, on peut calculer cette dynamique à la main relativement facilement bien que ce soit assez fastidieux, et c'est le choix qui a été fait pour notre méthode de résolution.

Le nombre d'évaluation du second membre du problème à valeur initiale étant très conséquent, notre effort de dérivation se trouve largement récompensé.

Notons toutefois que la facilité de dérivation vient de la modélisation relativement simple de notre problème. En cas de raffinement de ce modèle (par exemple par prise en compte de l'effet de l'aplatissement de la Terre :  $J_2$ ), la dérivation manuelle devient beaucoup plus compliquée et on se rabattra alors sur la différentiation automatique.

Nous abordons maintenant un autre point de notre méthode résolution.

### Les raffinages

Bien que notre continuation différentielle nous donne en règle générale une très bonne approximation d'un zéro de l'homotopie à la fin du suivi de chemin (en  $\lambda = 1$ ) il est toujours bon de vérifier si celui-ci n'est pas améliorable. Comme on dispose du solveur d'équations non linéaires *HYBRD*, cette opération de raffinement est très simple à mettre en œuvre.

On note que dans le cas d'une homotopie simpliciale, cette étape de raffinement est indispensable puisque la solution donnée par la continuation est alors une véritable approximation (en ce sens qu'elle peut être relativement grossière).

En plus de ce dernier raffinement, on se donne la possibilité d'en rajouter d'autres tout au long du suivi de chemin et ce à intervalle régulier. En effet, toutes les  $N$  étapes de prédiction-corrrection, on estime que le suivi de chemin aurait dû converger et donc qu'un recollement plus précis au chemin de zéros pourrait-être bénéfique au suivi de chemin afin qu'il reparte sur de *bonnes* bases.

De plus, durant cette étape intermédiaire de raffinement, on en profite pour refaire une mise à l'échelle étant donné que certaines inconnues du chemin de zéros ont très bien pu changer d'ordre de grandeur par rapport au début du suivi de chemin ou au raffinement précédent.

D'un point de vue pratique, on fixe  $N$  à 20 et on constate que si l'étape de raffinement a lieu, alors elle permet de faire converger le suivi de chemin

qui sans ça ne converge pas ou prend beaucoup plus de temps à le faire. Ceci s'explique par le fait que bien que la continuation différentielle suive le chemin de zéros au plus près, notre homotopie est une fonction d'une grande sensibilité numérique dont un zéro peu être détérioré assez rapidement. Et une fois que la précision du chemin de zéros est dégradée, il est compliqué de le retrouver sans le raffinement proposé.

Cependant, ce raffinement est très peu utilisé, le nombre de pas de prédiction-correction nécessaire à la convergence étant la plupart du temps inférieur à  $N$ .

## Conclusion

Le présent chapitre a été consacré à la présentation des divers aspects numériques de notre méthode de résolution. Nous avons commencé par détailler l'algorithme de continuation différentielle implémenté par *HOM-PACK90*. Nous y avons entre autre souligné l'importance du calcul du vecteur tangent unitaire au chemin de zéros et donc de celui du jacobien de notre homotopie. Ceci nous a amené à préciser le choix fait pour l'évaluation de ce jacobien qui est fait par différences finies centrées.

Après cela, nous avons abordé le problème de l'initialisation de la continuation différentielle qui a été réglé par une autre homotopie, discrète celle-ci, à savoir l'homotopie sur les conditions initiales. Cette dernière est très efficace et achève d'affranchir notre méthode de résolution de toute connaissance *a priori* concernant la structure de la commande optimale.

Ensuite a été traité la mise à l'échelle utilisée dans notre méthode. Celle-ci est faite de façon automatique principalement du fait de l'homotopie sur les conditions initiales qui nécessite une adaptation du scaling tout au long de la résolution.

Pour continuer, la validité de notre évaluation de la fonction de tir a été discutée. Cette validité concerne l'intégrateur numérique utilisé qui est *rkf45*, basé sur un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 avec adaptation du pas d'intégration. Ce dernier se doit en effet de détecter correctement les instants de commutations de la commande optimale qui rend discontinu le second membre du problème à valeur initiale sous-jacent à la fonction de tir. Les résultats obtenus tendent à montrer que notre intégrateur est bien valide quoiqu'on rencontrera probablement des difficultés pour satisfaire les précisions d'intégration pour des poussées très faibles.

Finalement, nous avons exposé d'autres aspects numériques de notre méthode de résolution qui sont l'algorithme de recherche de zéro utilisé et les différents raffinages fait en cours de continuation différentielle ainsi qu'à la fin de celle-ci.

## Chapitre 4

# Résultats et interprétations

Ce chapitre est le cœur du manuscrit. On y présente les principaux résultats obtenus avec la méthode de résolution exposée dans les chapitres précédents. Dans la mesure du possible, on essaie de respecter la chronologie des résultats afin de rendre compréhensible les raisonnements qui nous ont mené à l'adaptation de la formulation de  $(P)$ . Le chapitre est décomposé de la façon suivante. La première partie s'intéresse à la comparaison des deux critères homotopiques convexe et puissance mentionnés à la section 2.2. On s'intéresse ensuite aux premiers résultats obtenus avec la formulation initiale de  $(P)$ . La troisième partie est consacrée à l'introduction d'une seconde formulation qui palliera les défauts de la première. L'avant dernière partie expose une dernière formulation ainsi que les résultats et observations relatifs.

### Introduction

Ce chapitre présente les résultats numériques obtenus sur le problème de transfert présenté au premier chapitre.

La grande majorité des résultats ont été obtenus grâce aux deux logiciels **MfMax-v0** [39] et **MfMax-v1** [40] qui sont en accès libre et permettent donc une reproductibilité aisée (principe de *reproducible research*).

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des deux critères homotopiques introduits au second chapitre. Nous effectuerons également une comparaison entre ces deux critères.

La seconde partie donne les résultats obtenus par application de notre méthode de résolution sur la formulation initiale du problème, c'est-à-dire à temps de transfert fixé.

Cette première formulation ayant un gros inconvénient, à savoir des minima locaux très pénalisants, nous introduisons une seconde formulation. La troisième partie est alors dédiée à la mise en œuvre de cette formulation qui consiste à chercher la meilleure longitude finale pour un temps de

transfert donné. On y donne également les résultats obtenus accompagnés de diverses interprétations. Cette partie se clot sur des vérifications de certaines hypothèses faites au second chapitre.

Pour finir, on introduit une troisième et dernière formulation à longitude finale fixée et temps de transfert libre. Cette formulation se révèle numériquement beaucoup plus efficace que la seconde. On présente alors les résultats de cette formulation qui sont similaires (en terme de stratégie de poussée) à ceux de la seconde formulation.

Précisons que toutes les lois empiriques et observations ne s'appuient pas sur des bases théoriques mais sur l'observation des résultats.

## 4.1 Les critères homotopiques

*Remarque* : l'étude présente est faite dans le cadre de la seconde formulation du problème présentée à la section 3 de ce chapitre, c'est-à-dire la formulation avec temps de transfert fixé et longitude finale fixée de manière optimale.

### Deux critères

A la section 2.2, on a introduit deux critères homotopiques  $J_\lambda$  différent

$$J_\lambda = \begin{cases} (1 - \lambda)|u|^2 + \lambda|u| & \text{(critère convexe)} \\ |u|^{2-\lambda} & \text{(critère puissance)} \end{cases}$$

Nous allons observer le comportement numérique de ces deux critères pour savoir si l'un n'est pas plus efficace que l'autre. Pour cela on a plusieurs critères de performance, le plus immédiat étant le temps d'exécution (on a convergence pour les deux critères) qui est affecté majoritairement par la régularité des chemins de zéros à suivre et par l'évolution de la structure de la commande optimale et du critère à minimiser.

Du point de vue du temps de calcul, le critère puissance est en général un peu plus performant que le convexe bien que ce ne soit pas une règle infaillible et que l'amélioration ne soit pas extraordinaire.

On va essayer de comprendre le pourquoi de cette dernière remarque ce qui au passage nous permettra d'observer certains aspects de l'évolution du problème en fonction de  $\lambda$ .

### Chemins de zéros

Pour expliquer cette supériorité du critère puissance, commençons par comparer les chemins de zéros. En effet, plus un chemin de zéros est régulier,

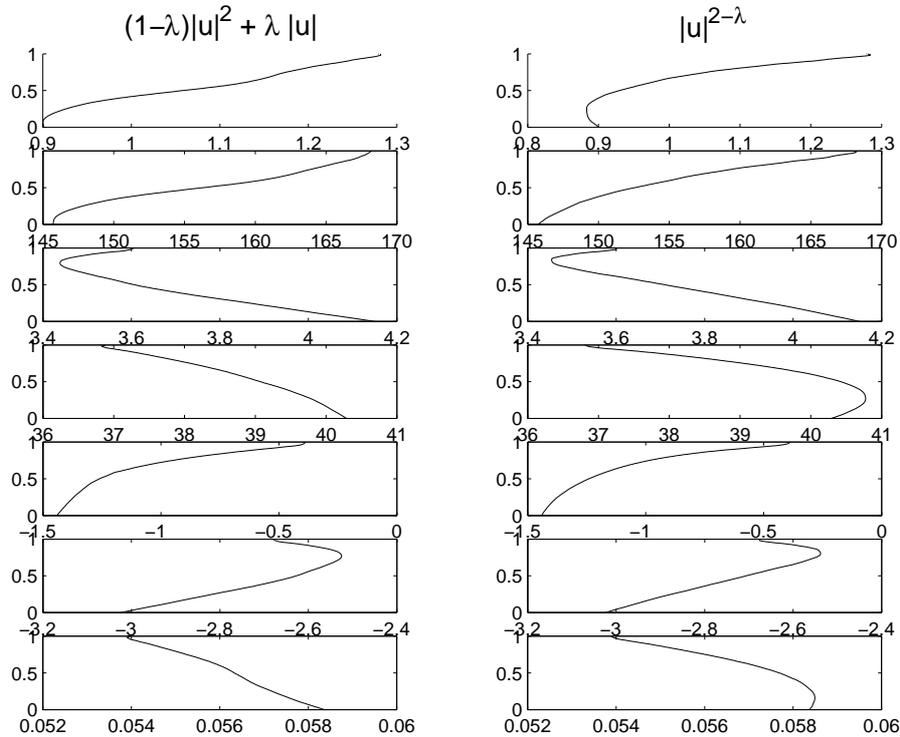


FIG. 4.1 – chemins de zéros du critère convexe (gauche) et puissance (droite) pour  $10 N$ . et  $c_{tf} = 1.5$

plus son suivi est simple et donc rapide. La figure 4.1 représente un chemin de zéros pour les deux critères

On remarque tout de suite la présence de *coudes* sur les chemins des deux critères. Ces *coudes* peuvent poser problème pour la prédiction car pour bien le prédire il faudrait être en prédiction cubique et avoir visité les deux bons points du chemins de zéros (en fait il faudrait que le dernier point du chemin de zéros soit un tout petit peu plus loin que le coude). Or nous avons choisi la prédiction linéaire entre autre pour des raisons de dégénérescence de la prédiction cubique dans ce cas là (cf. remarque 3.1).

Si on compare les deux chemins, on s'aperçoit que pour le critère puissance, il y a plus de coudes que pour le convexe, ce qui semble contradictoire avec la supériorité du critère puissance. L'explication recherchée n'est donc pas sur la figure 4.1.

### Structure de la commande optimale

Une évolution intéressante à observer est celle de la structure de la commande optimale par rapport au paramètre homotopique  $\lambda$ . En effet, la question se pose de savoir si on a dès le début de l'homotopie (à la minimisation

de l'énergie) la bonne structure de la commande et si l'évolution de cette structure est régulière ou non. Bien entendu on en profite également pour voir si l'évolution est similaire pour les deux critères. La figure 4.2 représente cette évolution pour  $10 N.$ ,  $1.5 t_{min}$  et les deux critères

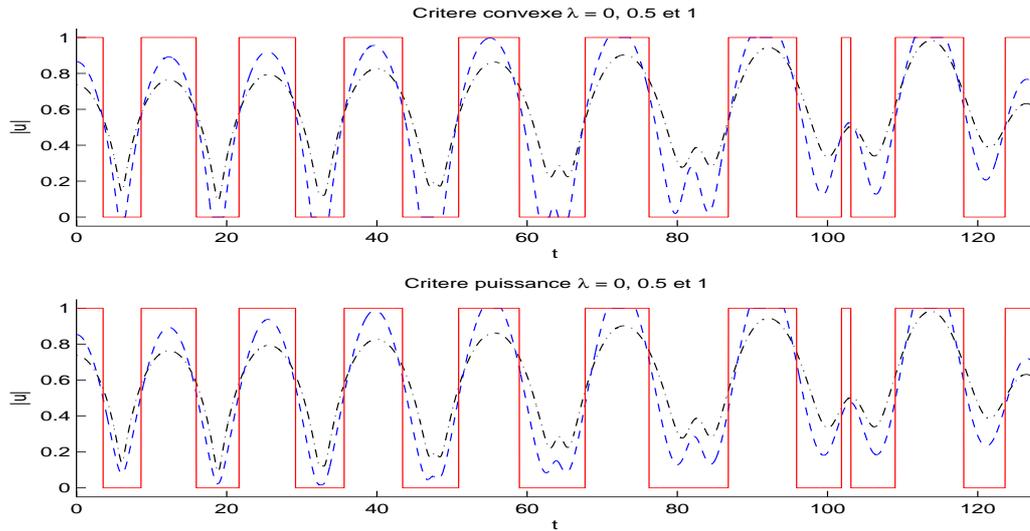


FIG. 4.2 – évolution de la structure de la commande en fonction de  $\lambda$  pour le critère convexe (haut) et puissance (bas),  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{tf} = 1.5$ , pour  $\lambda = 0(-), 0.5(- -)$  et  $1$

on peut voir que dès le départ la structure de la commande en  $\lambda = 1$  est présente et on pourrait même déduire directement la structure en  $\lambda = 0$  si ce n'est le petit intervalle de poussée qui aurait tout aussi bien pu ne pas exister au vu de la commande en énergie. Bien que le nombre d'étapes représentées n'est pas très élevé, on peut bien imaginer que l'évolution est relativement régulière ce qui explique le bon comportement de notre méthode homotopique.

En ce qui concerne la comparaison des deux critères, la seule chose qu'on puisse dire est qu'apparemment le critère puissance est plus proche de la minimisation de la consommation que le convexe pour  $\lambda = 0.5$ . Mais cette avance est-elle toujours présente ?

### Evolution des critères

Pour cette évolution, on utilise la proposition 2.3. On trace donc l'évolution de  $J_\lambda$  et de  $J_1$  en fonction de  $\lambda$  pour les deux critères

ici, pour un critère et un  $\lambda$  donné on a associé la fonction coût optimal (prise donc en  $u_\lambda$  solution du problème) et la norme  $L^1$  de  $u_\lambda$  (i.e la fonction coût si on était en  $\lambda = 1$ ).

Quelque soit le critère considéré, l'évolution est très régulière et on peut

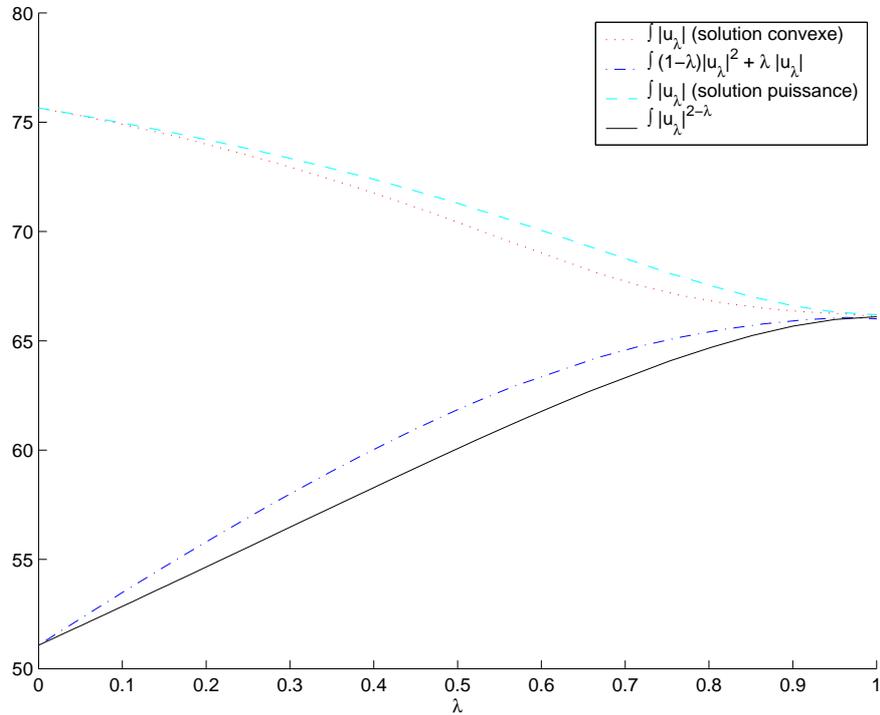


FIG. 4.3 – évolution des valeurs critères convexe et puissance en fonction de  $\lambda$

noter qu'on pourrait se servir d'un tel graphe pour définir un critère d'arrêt de la méthode si jamais le problème en  $\lambda = 1$  était trop compliqué à résoudre (ce qui ne sera pas nécessaire).

On note également quelques différences entre les deux critères

- la croissance du critère puissance est plus régulière que celle du convexe ;
- de la même façon la décroissance de  $J_1$  est plus régulière pour le critère puissance que pour le critère convexe.

La plus grande régularité de l'évolution du critère puissance explique probablement sa plus grande efficacité bien que le critère convexe ne soit pas à négliger.

Dans toute la suite, si le critère employé n'est pas spécifier il s'agira par défaut du critère puissance.

## 4.2 Première formulation

Cette section est consacrée aux premiers résultats obtenus avec la formulation de  $(P)$  présentée dans le premier chapitre. On résout donc ici le problème à  $t^f$  fixé et  $L^f$  libre. On ne s'intéresse qu'au cas non coplanaire bien que les premières expérimentations ont été faites sur le cas coplanaire. Le passage du coplanaire au non coplanaire, bien que rajoutant 2 nouveaux

états (ceux correspondant à l'inclinaison :  $(h_x, h_y)$ ) n'a pas posé de problèmes particuliers. C'est pourquoi nous ne présenterons pas les résultats du transfert coplanaire à l'exception du cas de l'introduction de la contrainte de cône double qui sera traité dans le chapitre suivant.

Dans toute la suite de ce chapitre, les figures présentées, notamment celles relatives aux stratégies de poussées et à l'évolution de états, seront celles correspondant à des poussées relativement fortes et ce pour une question de lisibilité. En effet, plus la poussée est faible, plus on a de révolutions et plus il va y avoir de variations du contrôle et des états. Or cela risque de noyer les informations importantes. On précisera s'il y a lieu, les changements qu'on peut constater quand on diminue le  $T_{max}$ .

### Stratégie de poussée

Observons tout d'abord une stratégie de poussée pour le problème (P).

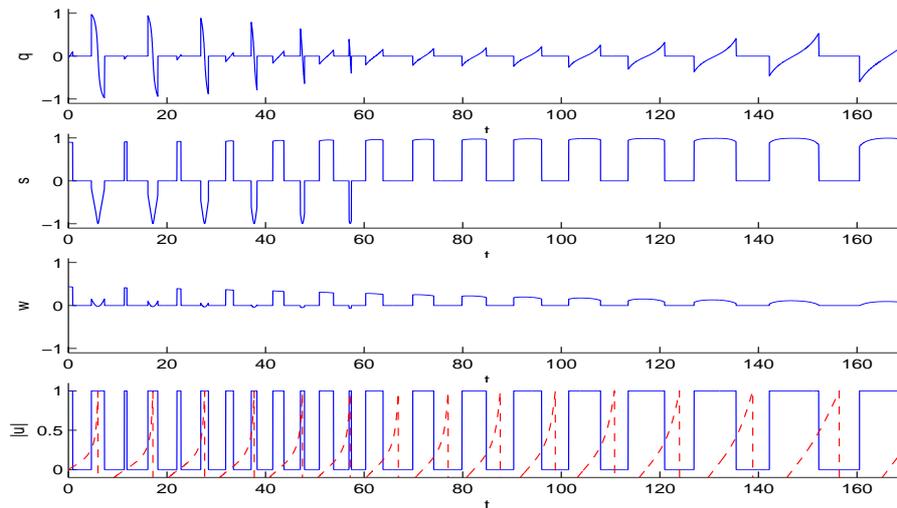


FIG. 4.4 – stratégie de poussée pour  $T_{max} = 10N$ . et  $c_{tf} = 2$ . De haut en bas, la poussée radiale, ortho-radiale, normale au plan et la norme de la poussée en fonction du temps.

Sur la figure 4.4 la norme de la poussée montre bien que le contrôle est discontinu.

Les pointillés représentent la longitude ramenée sur  $[-1, 1]$  ( $L = \frac{L \bmod 2\pi}{\pi} - 1$ ) et comme  $e_y \approx 0$  tout au long de la trajectoire (voir les états de la figure 4.5), les passages de  $L$  par  $\pi$  (donc 0 avec la mise à l'échelle) sont une très bonne approximation des passages à l'apogée. De même les discontinuités de  $L$  (passage abrupte de 1 à -1) correspondent aux passages aux périgées.

Au début du transfert la répartition des arcs de poussées se fait autour des passages aux apogées et périgées alors qu'une fois que 30 % du temps de

transfert est écoulé on n'a plus que des arcs de poussées centrés autour des apogées. Ceci peut paraître étonnant étant donné que dans le cas limite des transferts impulsionsnels les corrections se font à l'apogée vu que c'est là que la vitesse de l'engin est la plus faible. On verra par la suite que ces poussées sur les premiers périgées sont la caractéristique majeure des stratégies de poussées locales (dans le sens qu'elles correspondent à des minima locaux).

Cette stratégie donne une masse finale de 1356.64 kg ce qui donne une consommation de 143.36 kg. Ceci peut sembler beaucoup au vu de la consommation résultant de la minimisation du temps de transfert qui est de l'ordre de 155 kg. En effet, on aurait été en droit d'attendre un gain plus élevé étant donné que le temps alloué pour le transfert est 2 fois plus élevé que le temps minimum. Une fois encore on verra que ceci vient de la localité de notre stratégie.

La répartition des composantes de la commande est surtout à l'avantage de la composante ortho-radiale ( $s$ ). Ceci reste dans l'ordre des choses puisque cette composante est la seule qui corrige directement le paramètre de l'ellipse ( $P$ ). La composante radiale n'est cependant pas à négliger car on voit qu'elle prend de l'importance lors des passages aux périgées sur les premières révolutions et lors des derniers passages aux apogées.

Notre problème étant non coplanaire mais faiblement inclinée ( $i \approx 7^\circ$ ) la composante hors plan du contrôle n'est pas nul mais de faible amplitude qui est de plus décroissante avec le temps.

Les stratégies de poussées obtenues avec la première formulation ne sont pas toutes semblables. Nous avons choisit de représenter celle-ci car elle illustre bien le phénomène des minima locaux, notamment par l'existence des poussées sur les premiers périgées.

Observons également la trajectoire et les états associés à la stratégie de poussée de la figure 4.4, ceux-ci sont représentés sur la figure 4.5.

*Note* : la trajectoire est représentée dans l'espace (haut gauche) et avec ses projections sur le plan équatorial (bas gauche) et sur le plan normal au plan équatorial comprenant le vecteur excentricité initiale (bas milieu avec mise à l'échelle pour mieux observer la correction d'inclinaison). Les états sont de haut en bas :  $P, e_x, e_y, h_x, h_y, L, m$ .

La figure 4.5 montre bien que les premières révolutions se font sur des orbites très proches alors que les dernières sont beaucoup plus espacées. Ceci vient de la faible efficacité des premières corrections du fait des poussées aux périgées.

Le paramètre de l'orbite ( $P$ ) est de plus en plus croissant et le vecteur excentricité ( $e_x, e_y$ ) est de plus en plus décroissant ce qui illustre également la première remarque.

L'inclinaison est par contre corrigée de façon assez régulière (la compo-

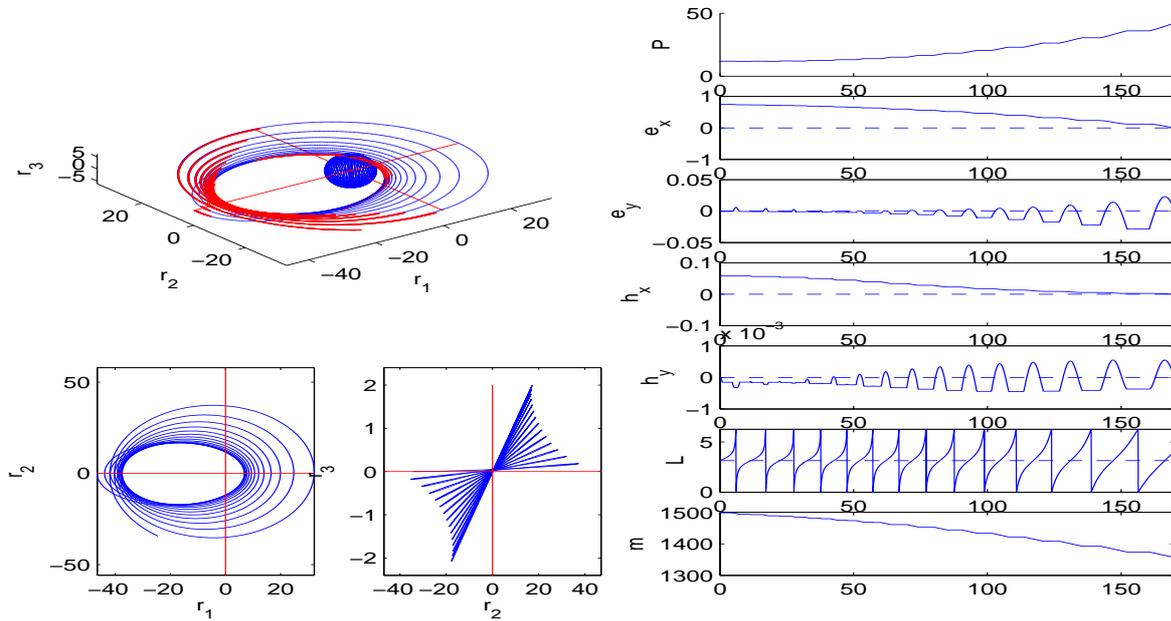


FIG. 4.5 – Trajectoire (à gauche) et états (à droite, en fonction du temps) pour  $T_{max} = 10N$ . et  $c_{tf} = 2$

sante  $h_y$  est négligeable) ce qui fait penser que la correction de l'inclinaison est plus efficace vers la fin du transfert (quand l'orbite est plus circulaire) étant donné que sur la figure 4.4 on pouvait constater que la poussée hors plan est de plus en plus faible avec l'approche de la fin du transfert. La régularité de la correction de l'inclinaison est visible sur la seconde projection de la trajectoire ou encore sur l'évolution de  $(h_x, h_y)$ .

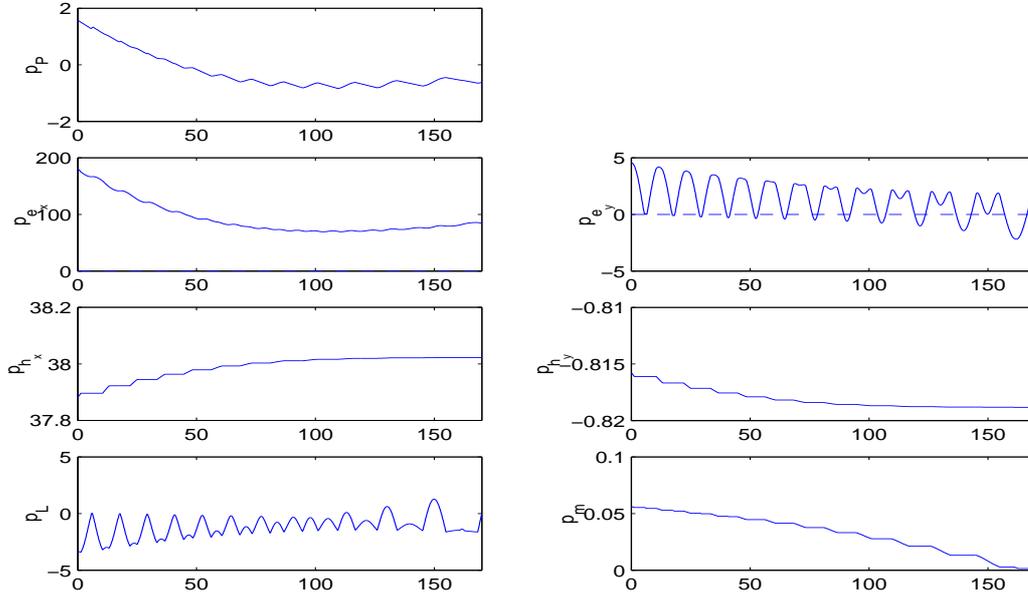
La longitude est ramenée sur  $[0, 2\pi]$  (par un simple modulo) et on peut constater que les révolutions sont de plus en plus lentes. Ceci découle d'ailleurs des remarques précédentes.

Pour information, nous donnons à la figure 4.6 l'évolution des états adjoints en fonction du temps pour la stratégie présentée plus haut.

Au vu des précédentes remarques, notamment celles sur l'étrangeté du gain ainsi que des poussées sur les premiers périodes, on peut se poser des questions quant à l'optimalité des stratégies de poussées trouvées. D'autant plus qu'à la section 3.3 on avait remarqué que la fonction de tir  $\mathcal{S}(\cdot, 0)$  possédait plusieurs zéros différents.

### Minima locaux

Pour vérifier l'optimalité de nos solutions d'un point de vue pratique on dispose d'un critère de cohérence. Ce critère est la croissance de la masse finale en fonction du temps de transfert alloué.


 FIG. 4.6 – Etats adjoints en fonction du temps pour  $T_{max} = 10 N$ . et  $c_{tf} = 2$ 

En effet, soient  $t_2^f \geq t_1^f$  deux temps de transfert et soit  $\bar{u}_1$  la commande optimale solution de  $(P)$  avec  $t_1^f$  pour temps de transfert. Alors :

$$\tilde{u}_2(t) = \begin{cases} \bar{u}_1(t) & \text{si } t \in [0, t_2^f] \\ 0 & \text{si } t \in ]t_2^f, t_1^f] \end{cases}$$

est une commande admissible pour  $(P)$  avec  $t_2^f$  comme temps de transfert. Or  $\tilde{u}_2$  induit la même consommation que  $\bar{u}_1$ . Donc la commande optimale  $\bar{u}_2$  solution de  $(P)$  avec  $t_2^f$  est au pire aussi bonne que  $\bar{u}_1$  au regard de la consommation. Si on note  $\bar{m}_i^f$  la masse optimale du problème  $(P)$  avec un temps de transfert  $t_i^f$ , on a alors :

$$\bar{m}_1^f \geq \bar{m}_2^f.$$

En d'autres termes, plus on s'alloue de temps pour le transfert, plus le gain de consommation sera important.

La figure 4.7 représente l'évolution de la masse finale en fonction du  $t^f$  obtenue avec la première formulation

Cette figure nous montre très clairement que la masse finale n'est pas croissante en fonction du temps final. On a donc bien des minima locaux qui sont de plus très pénalisant.

En effet, pour  $t^f \approx 40h$  on a une perte de masse finale d'au moins  $25kg$  et on consomme plus que pour le transfert en temps minimum.

Il nous faut donc trouver un moyen de s'affranchir de ces minima locaux, d'où l'introduction de la seconde formulation qui est traité dans la prochaine

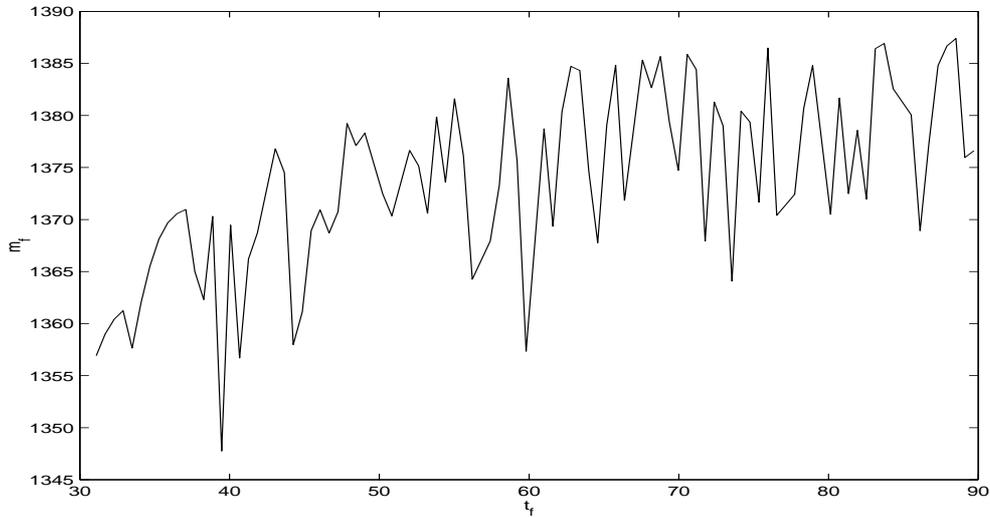


FIG. 4.7 – Masse finale en fonction du temps final pour  $T_{max} = 30N$  et la première formulation

section.

### 4.3 Traitement des minima locaux

#### Seconde formulation

L'existence des minima locaux est très certainement due au fait que  $L^f$  est libre. L'idée de la seconde formulation sera alors de calculer le nombre optimal de révolutions ainsi que la position optimale sur la dernière orbite qui rendent la masse finale maximale. Pour ce faire on résout le problème pour plusieurs  $L^f$  fixés afin de trouver le meilleur.

On note  $(P^2)$  le problème avec  $L^f$  fixé (et toujours  $t^f$  fixé). Il s'écrit :

$$(P^2) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^{t^f} |u| dt \\ \dot{x} = f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x) \\ \dot{m} = -\beta T_{max} |u| \\ |u| \leq 1 \\ L^f \text{ fixé} \\ t^f \text{ libre} \\ x(0) = x^0 \\ m(0) = m^0 \\ h(x(t^f)) = 0 \end{array} \right.$$

Pour fixer  $L^f$ , on va procéder comme pour  $t^f$ . On calcul d'abord la

longitude de transfert minimale  $L_{min}^f$ , puis on pose  $L^f$  comme un multiple du nombre de révolutions. Ce multiple est noté  $c_{L^f}$ .

$$L^f = L^0 + c_{L^f}(L_{min}^f - L^0).$$

La résolution du problème en longitude minimale est faite à l'aide du code **TfMin** [20]. Cette résolution ne nécessite qu'une légère modification du code qui reflète simplement le changement de critère ( $min t^f$  devient  $min L^f$ ) et qui intervient sur les conditions de transversalités :

$$\begin{cases} min t^f \\ p_L(1) = 0 \\ p_{t^f}(1) = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} min L^f \\ p_L(1) = 1 \\ p_{t^f}(1) = 0 \end{cases}$$

Le tableau 4.8 donne les longitudes minimales pour plusieurs  $T_{max}$ .

$T_{max}$ (N.)	$L_{min}^f$	$(L_{min}^f - L^0)T_{max}$
10.	29.901	267.596
5.	56.649	267.538
1.	271.099	267.957

FIG. 4.8 – Longitudes minimales de transfert pour plusieurs  $T_{max}$  et  $L^0 = \pi$ .

De la dernière colonne on s'aperçoit qu'on retrouve un résultat empirique qui était déjà valable pour le temps de transfert minimum. En effet, le nombre de révolutions minimum est inversement proportionnel à  $T_{max}$  ce qui se résume par :

$$T_{max}(L_{min}^f - L^0) = c^{te} = L_{ref}^f \approx 267.538. \quad (4.1)$$

ici,  $L_{ref}^f + L^0$  est donc la longitude minimale de transfert pour  $1N$ . Cette relation empirique est d'un grand intérêt pratique car elle légitime l'emploi du coefficient multiplicateur  $c_{L^f}$  qui nous permettra une comparaison plus aisée des résultats des différentes poussées. De plus, pour le  $L_{min}^f$  on pourra se contenter d'une approximation ce qui évite d'avoir à lancer une recherche de longitude minimum à chaque fois qu'on change de  $T_{max}$ .

Rechercher le nombre optimal de révolutions revient alors à rechercher le  $c_{L^f}$  optimal que nous notons  $c_{L^f}^{opt}$ . La première question à se poser est tout de même si il existe ou non un  $c_{L^f}^{opt}$ .

De même que pour le problème  $(P)$ , on note  $(P_{CI}^2)_\lambda$  le problème avec homotopie sur les conditions initiales,  $(P^2)_\lambda$  le problème homotopique reliant la minimisation de l'énergie et la minimisation de la consommation et  $\mathcal{S}^2(z, \lambda)$  la fonction de tir associée à  $(P^2)_\lambda$ . Cela a déjà fait l'objet d'une remarque dans la partie consacrée à l'homotopie sur les conditions initiales (section 3.3) mais nous rappelons tout de même que bien que  $(0, \dots, 0)$  ne soit plus solution de  $\mathcal{S}_{CI}^2(\cdot, 0)$  on arrive à trouver sans difficulté une solution. L'initialisation ne pose de plus aucun problème et est même plus efficace que pour le cas où  $L^f$  est libre (plus rapide et permet de descendre à des poussées plus faibles).

### Recherche du $c_{L^f}$ optimal

La figure 4.9 va nous permettre de conclure quant à l'existence numérique du  $c_{L^f}^{opt}$ .

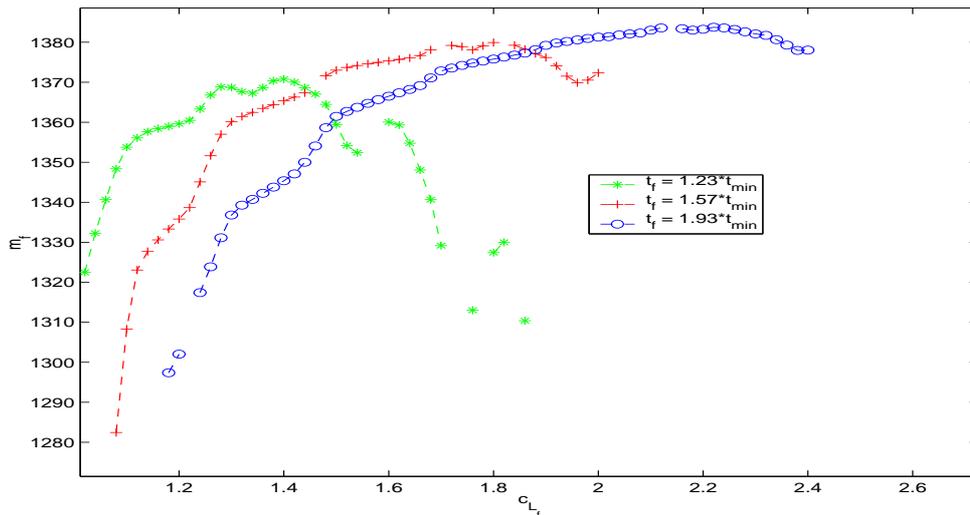


FIG. 4.9 – Masse finale en fonction de  $c_{L^f}$  pour différents  $t^f$ ,  $T_{max} = 10N$ .

Cette figure montre bien qu'il existe pour chaque  $t^f$  un  $c_{L^f}$  qui rend la masse finale maximale. Le problème majeur sera donc de trouver ce  $c_{L^f}^{opt}$ , ou une très bonne approximation.

On peut également constater que la masse finale n'est pas une fonction concave de  $c_{L^f}$  ce qui peut éventuellement apporter une autre pierre à cet édifice qu'est l'explication de l'existence des minima locaux.

De plus on peut voir que pour le  $t^f$  le plus élevé, la différence de masse finale autour du  $c_{L^f}^{opt}$  n'est pas significative. On constate que la différence diminue avec l'augmentation du  $t^f$  et donc avec la diminution de  $T_{max}$ . Ceci justifiera des calculs approchés de  $c_{L^f}^{opt}$  qui seront très peu pénalisant en terme de masse finale.

Une fois que le  $c_{L^f}^{opt}$  sera trouvé, on pourra résoudre un problème de transfert avec rendez-vous sans pour cela devoir modifier notre méthode. En effet, le  $c_{L^f}^{opt}$  nous donne le nombre optimal de révolutions pour effectuer le transfert. Il suffit alors de se fixer un  $c_{L^f}$  proche de  $c_{L^f}^{opt}$  et qui induira une position sur l'orbite finale en accord avec le rendez-vous (comme  $t^f$  est fixé, la position du rendez-vous est connue). De plus on peut affirmer que la perte de masse due au rendez-vous sera négligeable puisqu'on restera proche de la masse optimale sans rendez-vous (ceci est vrai car les poussées considérées induisent un grand nombre de révolutions).

Ayant conclu sur l'existence du  $c_{L^f}^{opt}$ , le plus dur reste à faire. Il faut en effet le trouver. La première méthode est tout simplement une recherche exhaustive qui consiste à résoudre le problème pour un grand nombre de  $c_{L^f}$  différents et à choisir le meilleur. Cette méthode possède un gros inconvénient qui est un coût astronomique en terme de temps de calcul puisqu'on aura à résoudre un grand nombre de problème avec maximisation de la masse finale chacun relativement coûteux.

Si on pouvait dès la résolution du problème de minimisation de l'énergie détecter la performance d'un  $c_{L^f}$  on ramènerait les nombreuses résolutions de  $(P^2)$  à des résolutions de  $(P^2)_0$  (obtenues rappelons-le, par la continuation sur les conditions initiales :  $(P_{CI}^2)_\lambda$ ) plus une seule de  $(P^2)$  une fois le  $c_{L^f}^{opt}$  trouvé. Ceci constituerait déjà un grand gain de temps d'exécution.

On peut par exemple se demander si la solution (globale) de  $(P^2)_0$  possède le même  $c_{L^f}$  que celle de  $(P^2)$ . Dans ce cas on trouverait  $c_{L^f}^{opt}$  une fois la solution de  $(P^2)_0$  trouvée.

La figure 4.10 représente l'évolution des critères de  $(P^2)_0$  et  $(P^2)$  en fonction de  $c_{L^f}$ .

on peut voir que les optima ne correspondent pas du tout au même  $c_{L^f}$ . Il nous faut donc une autre critère de performance pour désigner le  $c_{L^f}^{opt}$  de  $(P^2)$ .

Néanmoins, cette figure 4.10 légitime notre formulation à  $L^f$  fixé car même si on était capable de trouver l'optimum global de la minimisation de l'énergie sans se fixer  $L^f$ , la continuation différentielle ne nous mènerait pas à l'optimum global de la minimisation de la consommation. En effet, lors du suivi de chemin, la longitude finale est très peu modifiée du fait qu'on garde les mêmes stratégies de poussées qui sont fortement dépendantes du nombre de révolutions.

*Remarque : le  $c_{L^f}^{opt}$  de  $(P^2)_0$  paraît acceptable pour  $(P^2)$  pour la seule raison que l'échelle des ordonnées est très étendue. En fait la perte de masse finale engendrée par la prise du  $c_{L^f}^{opt}$  de  $(P^2)_0$  pour résoudre  $(P^2)$  n'est pas du tout négligeable.*

La bonne méthode de recherche du  $c_{L^f}^{opt}$  doit bien se baser sur les résolu-

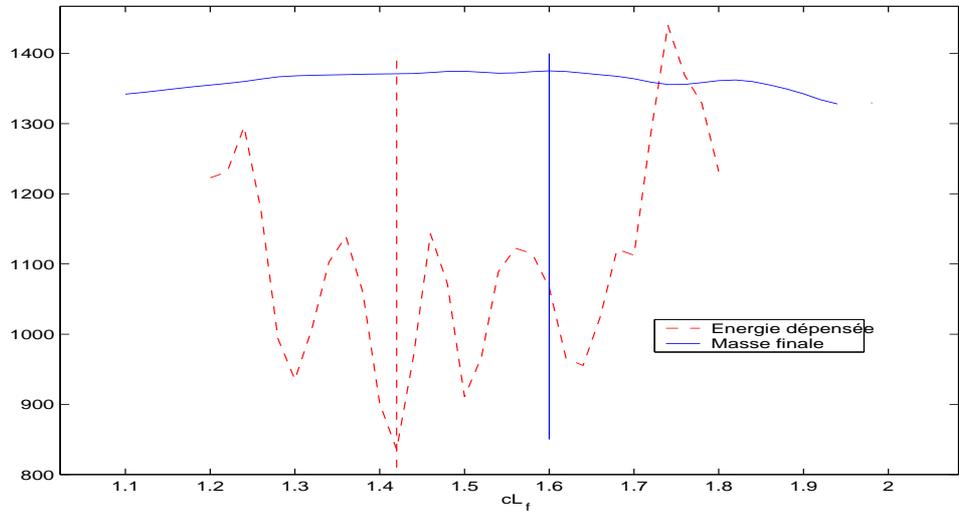


FIG. 4.10 – Energie (mise à l'échelle) et masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  pour  $c_{tf}$  donné et  $T_{max} = 10N$ .

tions de  $(P^2)_0$  mais pas par l'intermédiaire du critère de minimisation de l'énergie.

La figure 4.11 représente l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  pour les problèmes  $(P^2)_0$  et  $(P^2)$ .

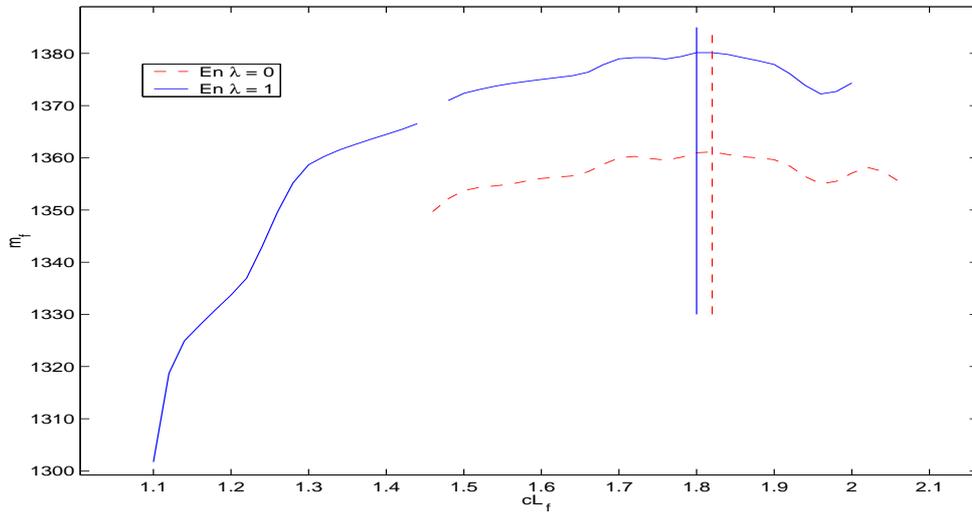


FIG. 4.11 – Masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  pour les problèmes  $(P^2)_0$  et  $(P^2)$  avec  $c_{tf} = 1.32$  et  $T_{max} = 10N$ .

On peut cette fois voir que bien qu'on n'ait pas une totale égalité entre les optima, qu'ils sont très proches. En fait la différence correspond au pas

de test sur le  $c_{L^f}$  qui est de 0.02. On peut donc considérer qu'on a égalité ce qui est vérifié sur tous les tests qui ont été effectués.

La figure 4.12 représente l'évolution du  $c_{L^f}^{opt}$  en fonction de  $c_{t^f}$  pour les deux problèmes.

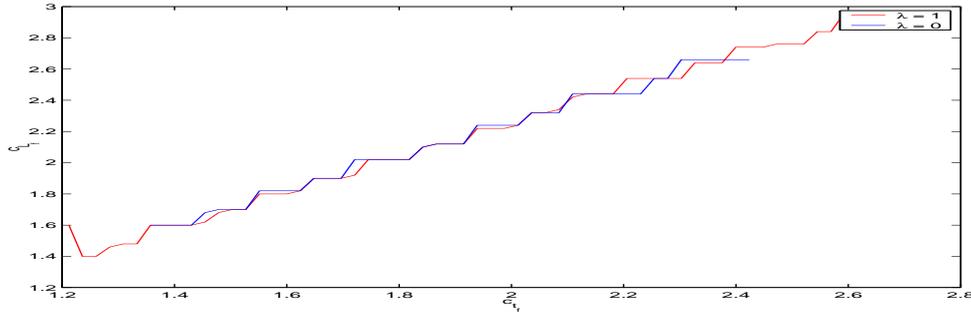


FIG. 4.12 –  $c_{L^f}^{opt}$  en fonction de  $c_{t^f}$  pour les problèmes  $(P^2)_0$  et  $(P^2)$ .

On peut y voir que les courbes sont presque confondues, ce qui nous amène à raffiner notre méthode de recherche du  $c_{L^f}^{opt}$ . En effet, pour avoir la meilleure masse finale il nous suffira de chercher pour le critère de l'énergie, la solution qui maximise la masse finale. Une fois cette solution trouvée (c'est-à-dire une fois le  $c_{L^f}^{opt}$  trouvé) il ne nous restera plus qu'à suivre le chemin de zéros de l'homotopie qui nous mènera à la solution maximisant la masse finale.

On a donc une méthode de résolution un peu plus performante (du point de vue de la rapidité) que la recherche exhaustive. Cependant cette méthode ne sera vraiment efficace que si la recherche du  $L^f$  optimal est bien initialisée. En effet, pour  $(P^2)_0$  la courbe de la masse finale en fonction de  $c_{L^f}$  n'est pas concave (on cherche le maximum) et elle possède donc des maxima locaux que l'on pourra éviter grâce à une bonne connaissance du  $c_{L^f}^{opt}$ .

Notre heuristique de recherche du  $c_{L^f}^{opt}$  sera basé sur une simple dichotomie. On peut la résumer comme suit :

1. Estimation  $c_{L_2^f}$  du  $c_{L^f}^{opt}$  et d'un pas  $\delta c_{L^f}$  ;
2. Résolution de  $(P^2)_0$  pour  $c_{L_2^f}$  par la continuation discrète sur les conditions initiales. On en déduit  $m_2^f$  ;
3. Résolution de  $(P^2)_0$  pour  $c_{L_1^f} = c_{L_2^f} - \delta c_{L^f}$ , on en déduit  $m_1^f$  ;
4. Résolution de  $(P^2)_0$  pour  $c_{L_3^f} = c_{L_2^f} + \delta c_{L^f}$ , on en déduit  $m_3^f$  ;
5. Si on a une encadrement de la solution (c'est-à-dire  $m_2^f \geq m_1^f, m_3^f$ ) on va en 6. Sinon on élargit la recherche dans une direction ou l'autre (suivant que ce soit  $m_1^f$  ou  $m_3^f$  qui soit le plus grand) jusqu'à avoir un encadrement ;

6. On résout  $(P^2)_0$  pour  $c_{L_4^f} = \frac{c_{L_1^f} + c_{L_2^f}}{2}$  et  $c_{L_5^f} = \frac{c_{L_2^f} + c_{L_3^f}}{2}$  ;
7. On en déduit un encadrement plus précis de la solution (on remplace les bornes  $c_{L_1^f}$ ,  $c_{L_2^f}$ , et  $c_{L_3^f}$ ). Si l'encadrement est assez précis, on va en 8. Sinon on retourne en 6 ;
8. En  $c_{L_2^f}$  on a une bonne approximation du  $c_{L_2^f}^{opt}$ .

On a ici un moyen de trouver une bonne approximation du  $c_{L_2^f}^{opt}$ . Ce n'est cependant qu'une heuristique qui c'est pourtant révélée très efficace.

Pour l'instant notre  $c_{L_2^f}^{opt}$  dépend de  $c_{tf}$  et de  $T_{max}$ . Etant donné la régularité du problème par rapport au temps et à la longueur minimale, il serait peut-être judicieux de voir si une telle régularité est également observable sur  $c_{L_2^f}^{opt}$ .

De plus la figure 4.12 peut nous laisser penser que la relation entre  $c_{L_2^f}^{opt}$  et  $c_{tf}$  serait bien approximer par une droite.

### Approximation du $c_{L_2^f}^{opt}$

Observons l'évolution du  $c_{L_2^f}^{opt}$  en fonction de  $c_{tf}$  et ce pour plusieurs  $T_{max}$  qui est représenté par la figure 4.13.

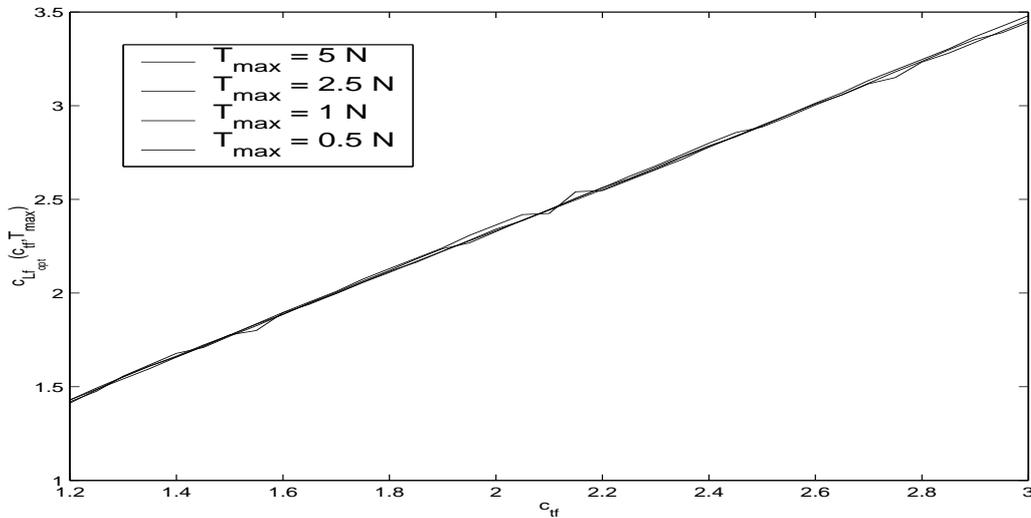


FIG. 4.13 –  $c_{L_2^f}^{opt}$  vs.  $c_{tf}$  pour plusieurs  $T_{max}$ .

pour ces poussées on peut voir que la relation entre  $c_{L_2^f}^{opt}$  et  $c_{tf}$  est quasiment affine. Si on ne le voit pas sur la figure 4.12 cela vient du fait que la relation n'est pas strictement affine mais possède des sauts lorsqu'on rajoute une révolution. Or pour les poussées faibles on a un grand nombre de révolutions et en rajouter une ne change plus grand chose à la masse finale.

La relation est alors d'autant plus affine que la poussée est faible. Ceci nous arrange puisque notre but est d'étudier ( $P^2$ ) pour des poussées relativement forte afin de pouvoir résoudre efficacement ( $P^2$ ) pour des poussées faibles.

La remarque la plus intéressante de cette figure est que toutes les *droites* sont confondues. On en déduit que la relation entre  $c_{Lf}^{opt}$  et  $c_{tf}$  est indépendante de  $T_{max}$ . C'est là la régularité recherchée.

On peut donc, avec une très bonne approximation considérer que  $c_{Lf}^{opt}$  est une fonction affine de  $c_{tf}$ . Le tableau 4.1 donne les coefficients de l'approximation linéaire pour plusieurs  $T_{max}$ .

$$c_{Lf}^{opt} = a.c_{tf} + b. \quad (4.2)$$

$T_{max}$ (N.)	a	b
5.	1.129	0.083
2.5	1.122	0.092
1.	1.123	0.090
0.5	1.117	0.099

TAB. 4.1 – Approximation linéaire de  $c_{Lf}^{opt}$

Ceci devrait achever de convaincre le lecteur qu'une approximation linéaire de  $c_{Lf}^{opt}$  est tout à fait justifiée.

Pour finir, voyons la différence entre les différentes méthodes (première formulation, seconde avec recherche exhaustive, heuristique de recherche et approximation) en terme de masse finale. Cette différence est représenté par la figure 4.14.

Comme on pouvait s'y attendre toutes les stratégies de la seconde formulation donnent de meilleur résultats que ceux de la première.

La meilleure stratégie en terme de masse finale est bien entendu la recherche exhaustive. Cependant il ne faut pas oublier que c'est également la plus coûteuse en temps de calcul.

La stratégie de recherche du  $c_{Lf}^{opt}$  est presque aussi bonne que la recherche exhaustive. De plus elle est plus rapide, et de beaucoup que cette dernière.

La stratégie d'approximation du  $c_{Lf}^{opt}$  est moins bonne que les deux précédentes pour des  $c_{tf}$  faibles (jusqu'à environ 1.5). Elle est pourtant tout à fait acceptable pour des  $c_{tf} \geq 1.5$  ce qui sera en général le cas pour des raisons de gain.

A propos de la masse finale, on peut voir qu'elle est de moins en moins croissante et que le plus gros du gain est acquis dès les premiers  $c_{tf}$ . Les observations sur l'évolution de la masse finale n'étant pas le sujet de ce paragraphe, nous renvoyons le lecteur à la présentation des résultats de la

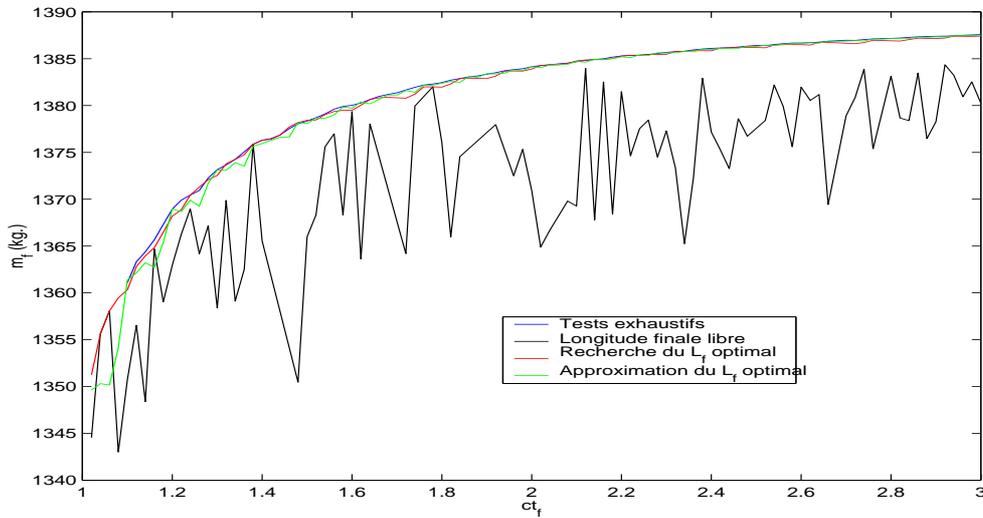


FIG. 4.14 – Masse finale en fonction de  $c_{tf}$  pour les 4 stratégies et  $T_{max} = 5N$ .

seconde formulation qui est faites plus loin.

On choisira donc pour la résolution pratique l'heuristique de recherche ou encore l'approximation qui est plus rapide que toutes les autres méthodes.

Notons que l'heuristique de recherche est quoi qu'il arrive très utile car on comprend bien que l'approximation du  $c_{L^f}^{opt}$  est dépendante des conditions initiales et finales choisit pour notre problème. Si on les change, il faudra donc refaire une batterie de tests afin de rétablir les bons coefficients d'approximation. D'autant plus qu'il faudrait vérifier qu'une approximation linéaire serait toujours valide.

### Masse finale

Nous venons de régler le problèmes des minima locaux pénalisant et nous pouvons maintenant nous consacrer à l'étude des solutions obtenues.

Commençons par observer l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{tf}$  qui est représentée sur la figure 4.15.

Il est assez frappant de constater que le gain de consommation est concentré sur les premiers  $c_{tf}$ . En effet, on pourrait considérer que pour  $c_{tf} = 3$  ou 4 tout le gain est déjà acquis et donc qu'il n'est pas nécessaire de s'allouer plus de temps de transfert. Le tableau 4.2 rapporte la masse finale et le gain obtenu pour différents  $c_{tf}$ .

Sur la figure 4.15 on peut également deviner une asymptote ou une limite qui vaudrait environ  $1390kg$ .

Pour avoir une idée de ce qui se passe quand  $c_{tf}$  augmente, on trace la

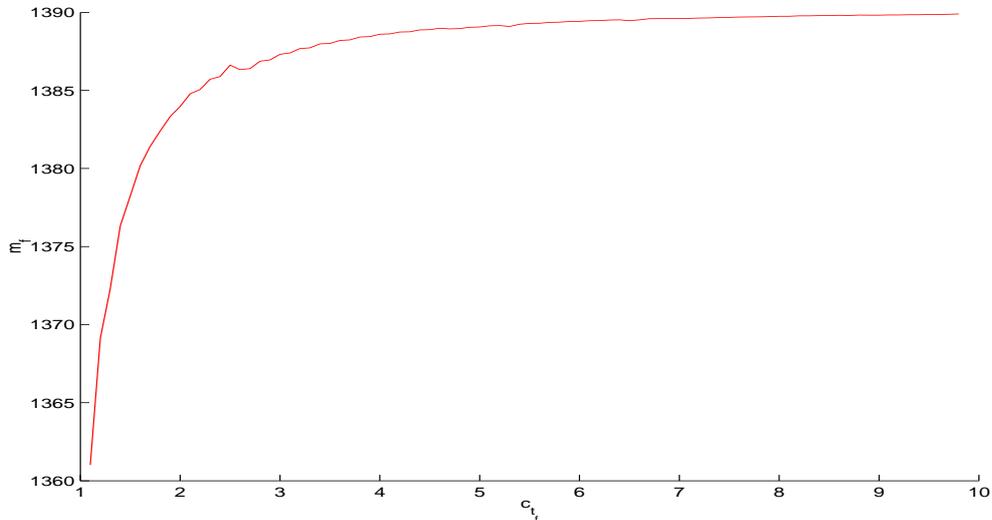


FIG. 4.15 – Masse finale en fonction de grands  $c_{t_f}$  pour  $T_{max} = 10N$ .

$c_{t_f}$	$m_f^a$ (kg.)	gain <sup>b</sup>
1.1	1361.01	1.13
1.2	1369.13	1.20
1.3	1372.29	1.23
1.4	1376.33	1.27
1.5	1378.23	1.29
2.	1383.97	1.35
2.5	1386.62	1.38
3.	1387.44	1.39

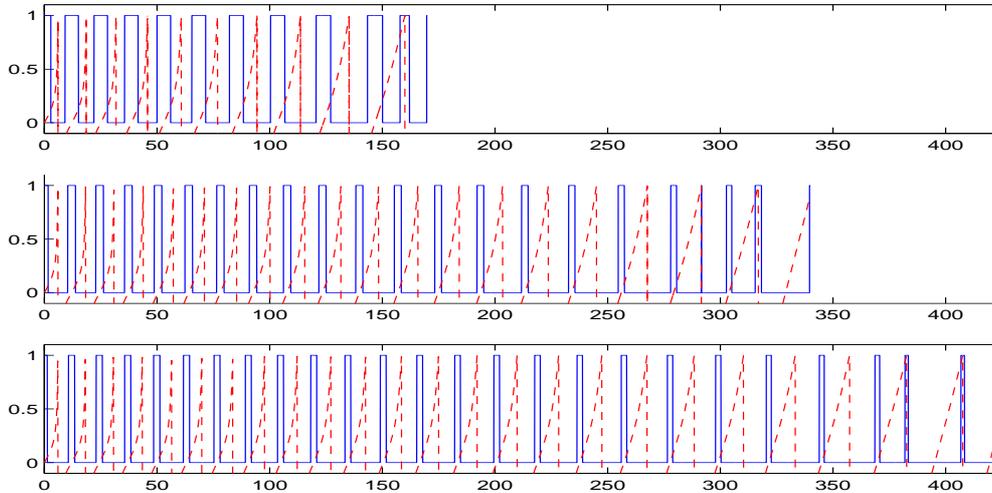
TAB. 4.2 – Masse finale en fonction de quelques  $c_{t_f}$  accompagnée du gain pour  $T_{max} = 10N$ .

a. ne pas oublier que  $m^0 = 1500kg$ .

b. ratio entre la consommation du transfert en temps minimal ( $m_{t_{min}}^f = 1343.115kg$ ) et celui de ( $P^2$ )

stratégie de poussée optimale pour des  $c_{t_f}$  croissant. Ceci est fait à la figure 4.16.

On peut constater que les intervalles de poussées sont de plus en plus faibles. On peut alors penser que le cas limite dans lequel on s’autoriserait un temps de transfert  $t^f$  infini n’aurait que des poussées impulsives. De ceci découle tout naturellement la question de la similitude entre le cas impulsif et le cas continu limite (avec  $t^f$  libre). En effet, on peut se demander

FIG. 4.16 – Stratégie de poussée pour des  $c_{tf}$  croissant (2, 4 et 5).

si la consommation du cas limite, si elle existe, n'est pas la consommation du cas impulsif.

### Comparaison avec le cas impulsif

Le calcul de la consommation dans le cas impulsif (avec 2 manœuvres) est donné à l'annexe C. On note tout d'abord que cette consommation donne pour notre transfert une masse finale :

$$m_{imp}^f \approx 1390.173 \text{ kg.}$$

Dans notre cas on arrive à avoir une masse finale d'environ 1390 kg ce qui coïncide tout à fait avec l'idée que le cas impulsif est le cas limite. On peut alors se poser la question de l'étendue des similitudes avec le cas impulsif.

Afin de pousser plus loin la comparaison, on note que la première impulsion du cas impulsif se situe sur un apogée alors que la seconde se situe sur un périhélie. Pour la comparaison, on peut observer plusieurs points dont le premier est le pourcentage de poussées autour des apogées et autour des périhélie. On peut également dans le cas continu faire une moyenne de la direction de poussée sur les apogées et sur les périhélie. Ces comparaisons sont données au tableau 4.3.

Notons qu'est fait dans ce tableau une légère anticipation en terme de formulation puisque nous donnons les résultats pour des  $c_{Lf}$  fixés ce qui correspond à la formulation de la section suivante.

On constate tout d'abord que la répartition entre poussées aux apogées et aux périhélie est bien du même ordre de grandeur pour les cas continus

Cas	Poussées aux apogées				Poussées aux périgées			
	%	$q$	$s$	$w$	%	$q$	$s$	$w$
Impulsionnel	94.97	-2.6e-6	0.992	0.124	5.03	2.e-3	-0.994	-0.112
10 $N$ ; $c_{Lf} = 2$	92.58	1.e-2	0.977	0.174	7.42	0.103	-0.968	-0.117
10 $N$ ; $c_{Lf} = 10$	94.64	9.e-3	0.985	0.168	5.36	-8.e-3	-0.993	-0.1125
1 $N$ ; $c_{Lf} = 5$	94.65	2.e-2	0.984	0.169	5.35	-2.e-2	-0.991	-0.113

 TAB. 4.3 – *Transfert nominal, comparaison du cas impulsionnel et continu.*

et aussi pour le cas impulsionnel. On a d'ailleurs la même répartition pour de faibles  $c_{Lf}$  (et donc de faibles  $c_{tf}$ ) ce qui montre bien que la stratégie optimale est déjà bien en place dès qu'on s'alloue une faible proportion de temps de transfert supplémentaire.

De plus, pour le cas impulsionnel, les directions de poussée des deux impulsions sont majoritairement ortho-radial (selon  $s$ ) avec une direction radiale quasiment inexistante. Encore une fois le cas continu montre le même comportement avec cependant une exception pour 10  $N$  et  $c_{Lf} = 2$  puisque la direction radiale des poussées aux périgées n'est clairement pas nulle en moyenne. On pourrait éventuellement expliquer cette petite entorse à la règle comme venant du fait que le  $c_{Lf}$  étant faible, les poussées sur les périgées (et aussi sur les apogées) se font sur des intervalles plus larges qui nécessitent des poussées radiales pour être efficace (on pourra d'ailleurs voir qu'au passage précis aux apogées et périgées, la poussée radiale change de signe et donc s'annule).

La plus grande différence entre le cas impulsionnel et continu vient ici de la direction normale au plan ( $w$ ) sur les apogées qui, dans le cas continu, est de 50% supérieure à celle du cas impulsionnel.

Une similitude importante est que pour le cas impulsionnel, on a aussi inversion de la direction de la poussée entre l'apogée et le périgée ce qui sera plus visible lors de la présentation des stratégies de poussées (cf. ci-après).

Malgré cette dernière différence on constate dans l'ensemble que notre analogie avec le cas impulsionnel est fondée. On pourra d'ailleurs le vérifier dans le chapitre suivant où nous étudierons une grande variété de transfert et donc de stratégie de poussée qui toutes auront une grande ressemblance avec le cas impulsionnel.

Notons que ce rapprochement du cas impulsionnel peut être vu comme un argument en faveur de l'optimalité des solutions trouvées puisque, rappelons-le, nous n'avons mis en place aucune vérification de celle-ci.

### Indépendance de la masse finale

Voyons maintenant comment évolue la masse finale en fonction de  $c_{tf}$  pour plusieurs  $T_{max}$  comme le montre la figure 4.17.

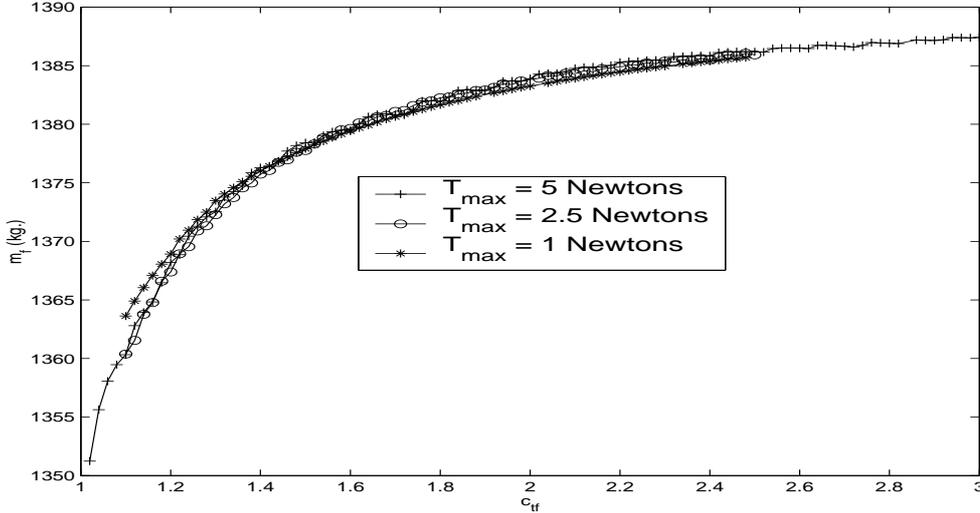


FIG. 4.17 –  $m^f$  vs.  $c_{tf}$  pour plusieurs  $T_{max}$ .

Cette figure nous montre que la masse finale pour un  $c_{tf}$  donné est presque indépendante de  $T_{max}$ . D'où l'analogie avec le cas impulsionnel où la consommation ne dépend que de l'orbite initiale et finale.

Cette indépendance aura une grande importance pratique puisqu'elle nous permet d'ajuster assez précisément le  $c_{tf}$  en fonction d'un gain de masse à réaliser. C'est donc dans l'optique d'une analyse quantitative du gain un outil très puissant.

De plus, l'indépendance du gain est une régularité à ajouter au profit de notre problème de transfert. Mais nous n'avons pas encore exploité toutes les implications de l'indépendance. En effet, si on note  $\Delta m$  la perte de masse ( $\Delta m = m^f - m^0$ ),  $\Delta T$  le support de la norme du contrôle et  $\Delta t_i$  le support de la norme du contrôle sur une révolution on a pour  $c_{tf}$  donné :

$$\Delta m = -\beta T_{max} \Delta T = -\beta T_{max} \sum^{\#rev} \Delta t_i = c^{te}$$

où  $\#rev$  est le nombre de révolutions du transfert.

Or  $\beta$  est constant donc :

$$T_{max} \Delta T = T_{max} \sum^{\#rev} \Delta t_i = c^{te}.$$

En d'autres termes le temps total de poussée pour un  $c_{tf}$  donné est inversement proportionnel à  $T_{max}$ , autre relation de proportionnalité de notre problème.

Cette constatation peut également s'expliquer par une remarque naïve (pas tellement au vu du résultat) qui dirait que si on pousse pendant un temps  $\Delta T_1$  avec une poussée  $T_{max}^1$  il faudrait pousser pendant le double de temps pour arriver au même résultat avec une poussée deux fois plus faible. Cette remarque ne tient par ailleurs pas compte du fait que ce n'est pas le temps de transfert total qui est ici inversement proportionnel mais le temps total de poussée.

### Poussées et trajectoires

Nous nous intéressons maintenant aux stratégies de poussées optimales. L'une d'elle est représentée sur la figure 4.18.

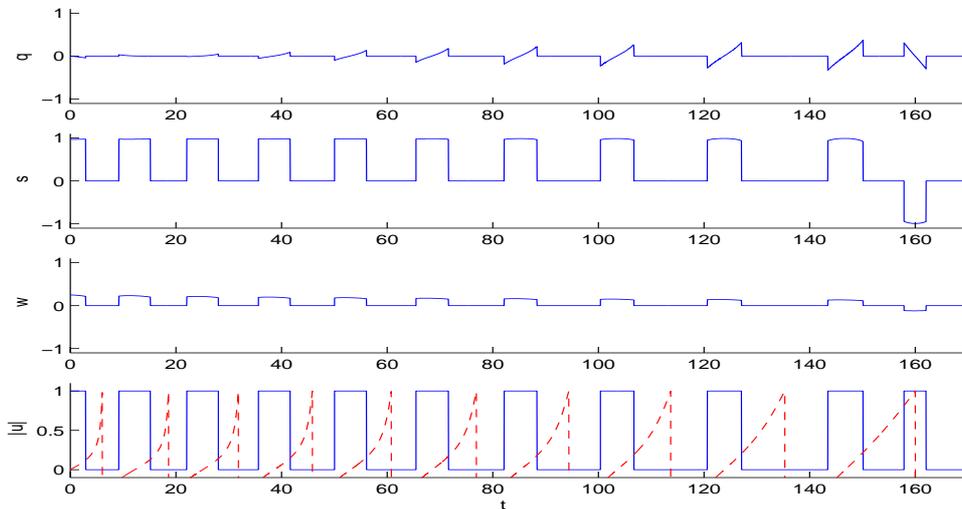


FIG. 4.18 – Stratégie de poussée pour  $T_{max} = 10N$ . et  $c_{tf} = 2$ .

Cette stratégie est tout d'abord à comparer avec celle obtenue pour la première formulation (la figure 4.4). La plus grande différence (outre la masse finale qui passe de 1356.64 kg à 1383.55 kg) se trouve sur les intervalles de poussées.

En effet, on n'a ici presque plus de poussée sur les périhéliees si ce n'est le dernier qui ne peut presque plus être qualifié de périhéliee puisque l'orbite est à ce moment là quasiment circulaire.

Toutes les poussées (à l'exception de l'avant dernière) sont centrées autour des passages à l'apogée, ce qui est cohérent avec le fait que l'apogée est l'endroit le plus adapté pour les corrections car la vitesse du satellite y est moindre. Ceci est à rapprocher du cas impulsionnel où toutes les corrections de demi-grand axe et d'excentricité se font aux apogées.

Il est à noter que les poussées ne sont toutes centrées autour des apogées qu'à la condition que  $c_{tf}$  soit suffisamment grand. En effet, on comprend

aisément que pour un  $t^f$  proche du temps de transfert minimum, la stratégie de poussée consistera à pousser la majeure partie du temps.

La composante ortho-radiale monopolise presque toute la poussée et de façon encore plus importante que pour la stratégie locale. Quant à la composante normale, elle est de faible amplitude et très régulière.

L'évolution de la composante radiale explique une remarque du paragraphe consacré à la comparaison avec le cas impulsif (cf. ci-avant). En effet, on peut voir que la poussée radiale, bien que non nulle (surtout à la fin du transfert) possède une valeur moyenne qui elle n'est pas loin de l'être du fait de la grande symétrie de cette composante.

Le fait que la composante ortho-radiale soit prédominante nous permet d'espérer un bon comportement du transfert à masse maximale face à la contrainte de cône double, du moins dans le cas coplanaire. Cette contrainte est traitée dans le chapitre suivant.

Voyons maintenant la trajectoire associée à la poussée de la figure 4.18, elle est représentée sur la figure 4.19.

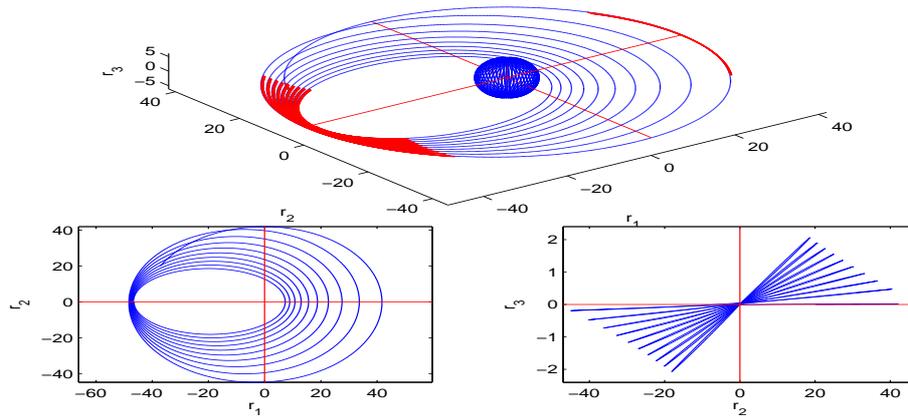


FIG. 4.19 – Trajectoire pour  $T_{max} = 10N$  et  $c_{tf} = 2$ .

Les endroits mis en valeurs (en rouge) sur la représentation dans l'espace de la trajectoire sont ceux où il y a une poussée. Ceci confirme donc que les poussées sont majoritairement centrées autour des apogées. De plus on peut voir que la longueur des intervalles de poussées est de plus en plus importante, du moins en terme de longitude (ceci reste vrai en terme de temps).

La déformation de l'orbite (paramètre et excentricité) représenté sur le graphe bas droit, est beaucoup plus régulière que pour la première formulation (cf. figure 4.5). Elle n'est pas constante mais apparemment croissante ce qui se comprend bien en remarquant que moins l'orbite est excentrique et éloignée de la Terre, plus l'efficacité de notre poussée est grande (remarque

qui explique également l'observation précédente sur la croissance des arcs de poussées).

Quant à l'inclinaison, représentée sur le graphe bas gauche sa décroissance est apparemment très régulière ce qui est compréhensible étant donné que la composante normale du contrôle est elle aussi très régulière.

Pour observer de façon plus précise l'évolution de l'orbite tout au long du transfert, la représentation la plus adaptée est celle des états. La figure 4.20 correspond au contrôle précédent et représente les états adjoints en plus des états.

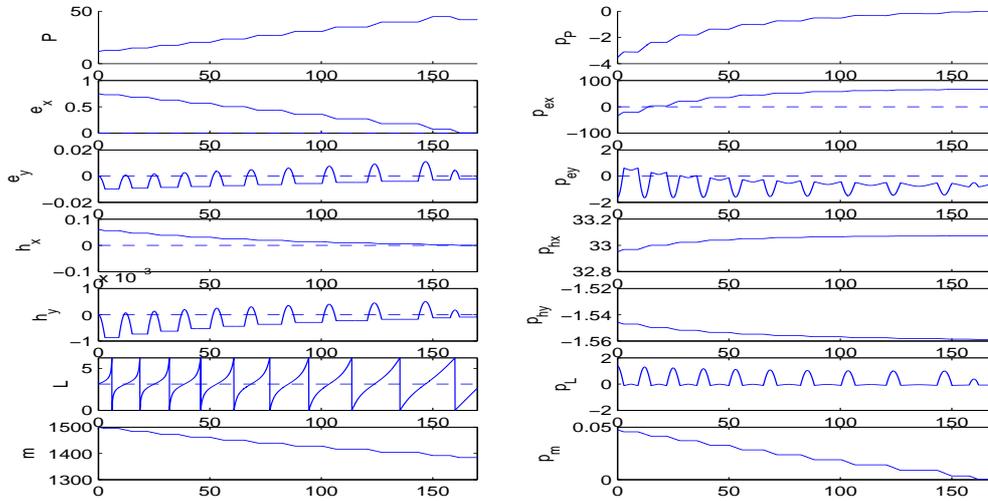


FIG. 4.20 – *Etats et états adjoints en fonction du temps pour  $T_{max} = 10N$  et  $c_{if} = 2$ .*

les états  $(P, e_x, e_y, h_x, h_y, L, m)$  sont représentés sur les graphes de gauche (de haut en bas, respectivement). Les états adjoints  $(p_P, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{h_x}, p_{h_y}, p_L, p_m)$  sont représentés sur les graphes de droite (toujours de haut en bas).

Le paramètre de l'ellipse est toujours croissant sauf au moment de la poussée sur le périégée qui le fait décroître jusqu'à sa bonne valeur finale. On peut donc voir la poussée du périégée comme une dernière correction.

Le vecteur excentricité  $(e_x, e_y)$  décroît régulièrement suivant sa première composante  $e_x$  et oscille autour de zéro suivant sa seconde composante  $e_y$ . On note cependant que  $e_x$  reste toujours prédominante devant  $e_y$ , c'est-à-dire que l'axe des noeuds reste sensiblement orienté suivant la même direction tout au long du transfert. Ce qui est par ailleurs utilisé pour affirmer que l'évolution de la longitude nous permet de localiser les passages aux périégées et aux apogées alors qu'en toute rigueur il faudrait observer les passages par zéro de  $e_x \sin L - e_y \cos L$ .

L'évolution du vecteur inclinaison  $(h_x, h_y)$  est assez semblable à celle du

vecteur excentricité. On retrouve même les mêmes ordres de grandeurs entre  $h_x$  et  $h_y$  qu'entre  $e_x$  et  $e_y$ .

L'évolution de la longitude montre que les révolutions prennent de plus en plus de temps ce qui vient du fait que les longueurs des orbites sont de plus en plus importantes. On remarque aussi que la vitesse angulaire du satellite (représenté par la croissance de  $L$ ) est très inégale sur les premières orbites et semble constante vers la fin du transfert. En effet, au début du transfert les vitesses angulaires aux périhéliees sont beaucoup plus importantes que celles aux apogées d'où la préférence des poussées pour les apogées.

En ce qui concerne les états adjoints on remarque tout d'abord qu'on a bien  $p_m(t^f)$  nul ce qui est la dernière condition de transversalité terminale. Il est intéressant de remarquer que  $p_L(t^f)$  est également quasiment nul alors que le fait de se fixer  $L^f$  a libéré  $p_L(t^f)$ . Ceci pourrait être un critère d'optimalité additionnel. Cependant nous ne l'utilisons pas puisqu'il n'est utilisable qu'une fois la résolution de  $(P^2)$  effectuée.

Du point de vue de l'évolution, on distingue les états adjoints étant monotones, à savoir  $(p_P, p_{e_x}, p_{h_x}, p_{h_y}, p_m)$  de ceux étant oscillants, à savoir  $(p_{e_y}, p_L)$ .

Pour finir, nous proposons une trajectoire pour une poussée de 0.1 Newton et  $c_{tf} = 1.5$  qui est représentée sur la figure 4.21.

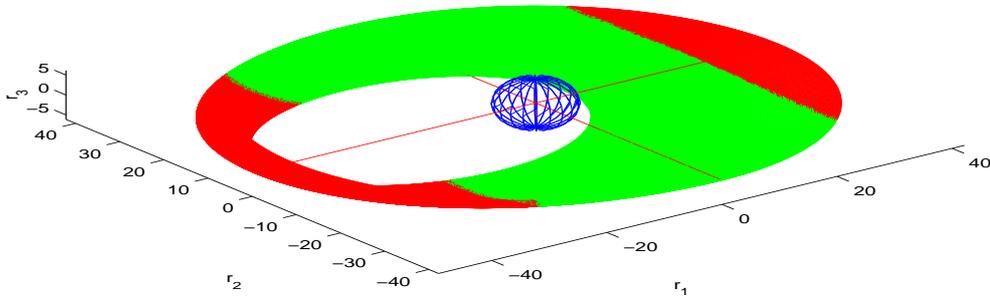


FIG. 4.21 – Trajectoire pour  $T_{max} = 0.1N$ . et  $c_{tf} = 1.5$ .

On a ici uniquement représenté la trajectoire dans l'espace sans ses projections car le nombre de révolutions étant important la présence des projections ne rend pas la figure plus exploitable.

On constate tout d'abord qu'on retrouve les poussées autour des apogées comme pour la stratégie précédente. Cependant, le nombre de poussées sur les derniers périhéliees est très important. Notre recherche du  $c_{L^f}^{opt}$  n'étant qu'approximative, on peut se demander si ce nombre important de poussées n'est pas dû à l'optimalité approximative de notre solution. On verra dans

le prochain chapitre qu'on retrouve ces poussées sur les derniers périgées pour notre troisième formulation qui apparemment ne possède pas de minima locaux. De plus ces poussées sur les périgées ont apparemment la même fonction que pour la stratégie précédente à savoir faire décroître le paramètre de l'ellipse.

Au vu de cette dernière remarque sur le rôle des poussées aux périgées on peut se demander pourquoi la stratégie de poussée nécessite d'accroître le paramètre pour le faire décroître ensuite. Un élément de réponse est donné par une analogie avec le cas des transferts à orbites basses. Ces derniers prennent en compte l'effet de l'aplatissement terrestre (effet du  $J_2$ , cf. [62]) qui est profitable à certains transferts et d'autant plus efficace que le paramètre de l'orbite est faible. La stratégie optimale pour ce type de transfert est alors de décroître  $P$  pour profiter au maximum du  $J_2$  puis en fin de transfert de le faire croître jusqu'à la valeur finale prescrite. L'analogie possible est de dire que pour notre transfert plus le paramètre est élevé, plus les corrections sur l'inclinaison et l'excentricité sont aisées. Une autre explication viendrait du fait que les corrections sur les différents paramètres n'étant pas découplés, le fait d'avoir une excentricité élevée fait que sa correction entraîne le dépassement de la valeur finale du paramètre. Afin de vérifier cette hypothèse il suffirait de considérer un transfert avec une excentricité initiale plus faible ce qui sera fait dans la dernière section de ce chapitre.

Maintenant que les résultats ont été présentés, nous allons rapidement vérifier quelques hypothèses faites dans les chapitres précédents.

### Vérification des hypothèses

L'hypothèse la plus importante a été celle sur l'absence d'arcs singuliers, c'est-à-dire l'absence d'intervalle de temps (de mesure non nul) sur lequel la fonction de commutation s'annule.

On a également supposé que le vecteur  ${}^tBp$  (cf. section 1.3 et 2.2) ne s'annule jamais.

On vérifie aisément ces deux hypothèses de façon numérique en traçant l'évolution de  $\psi$  et  $|{}^tBp|$ , comme ici sur la figure 4.22.

On retrouve le même type d'évolution pour tous les transferts testés.

On constate que  $|{}^tBp|$  est bien non nul et n'est même pas proche de zéro. De plus on peut voir que sa variation est de plus en plus faible à mesure que l'orbite finale se rapproche de l'orbite géostationnaire. On peut également voir que les arcs de poussée correspondent presque au franchissement par  $|{}^tBp|$  d'une certaine valeur seuil (ici 1), ce qui n'a pas d'intérêt pratique. Notons qu'on aurait parfaite correspondance si on avait considéré la masse constante puisqu'alors la fonction de commutation aurait été :

$$\psi = 1 - |{}^tBp|.$$

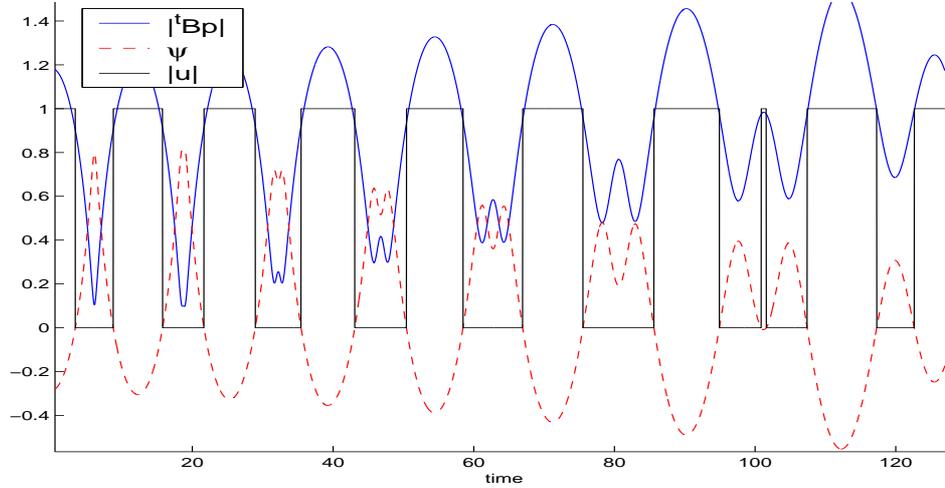


FIG. 4.22 –  $|{}^tBp|$ , fonction de commutation et norme du contrôle en fonction du temps pour  $T_{max} = 10N$ . et  $c_{tf} = 1.5$ .

On retrouve la dépendance du contrôle par rapport à la fonction de tir  $\psi$  ( $|u| = 0$  si  $\psi > 0$  et  $|u| = 1$  si  $\psi < 0$ ).

Par contre, on peut constater que la fonction de commutation est de faible magnitude durant toute l'avant dernière poussée qui est une poussée sur un périégée, mais on garde  $\dot{\psi} \neq 0$ . En fait, on imagine bien que si on augmentait continûment le temps final, on verrait apparaître des arcs de poussées. Ceci nous pousse d'ailleurs à penser que pour de tels temps de transfert ( $t^f$ ), on aurait alors :

$$\begin{cases} \psi = 0 \\ \dot{\psi} = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

mais ceci juste en un point qui serait un minimum de la fonction de commutation.

Quoiqu'il en soit, les deux premières hypothèses sont bien vérifiées.

Vérifions également la transversalité des passages par zéros de la fonction de commutation. Ceci nous permet d'affirmer que nos états restent bien dans le domaine  $\Omega_2$ . Cette vérification est représentée par la figure 4.23.

Malgré ce qu'on pourrait penser, la fonction  $\psi^2 + \dot{\psi}^2$  ne s'annule pas mais est effectivement très proche de zéro. Ce résultat est observable sur la grande majorité des transferts testés (pour les autres la fonction ne s'annule clairement pas). Comme on pouvait s'y attendre, la plus faible valeur de la fonction correspond au premier arc de poussé sur le périégée.

Nous allons maintenant rapidement donner un ordre d'idée de la performance de notre méthode en terme de temps de calcul.

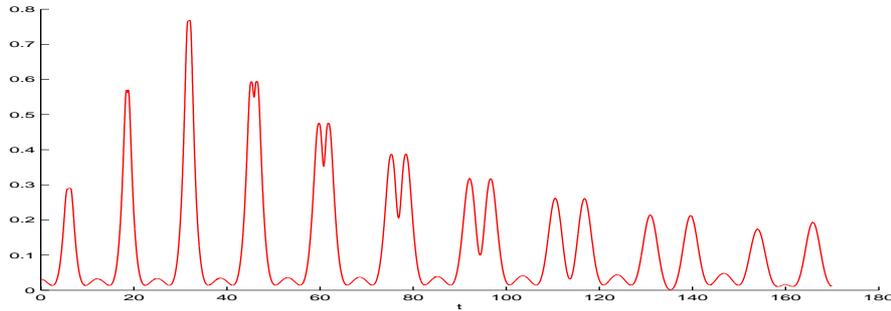


FIG. 4.23 –  $-\psi^2 + \dot{\psi}^2$  en fonction du temps pour  $T_{max} = 10N$  et  $c_{tf} = 2$ .

### Efficacité numérique

Toutes les exécutions résumées dans ce paragraphe ont été effectuées avec un processeur Pentium IV de 2.8GHz de fréquence, 1 Go de mémoire vive (qui n'a quasiment aucun impact sur les temps de calcul), sous une distribution Linux Suse 9. et avec le compilateur de fortran 90 *ifc* (version 7.1, les versions plus récentes ayant des problèmes de compatibilité avec *LAPACK*).

De plus tous les tests ont été effectués avec **MfMax-v0** [39] et son interface *Matlab*.

Le tableau 4.4 résume plusieurs exécutions

$T_{max}$ (N.)	$c_{tf}$	$t_{CI}$ (s.)	$t_{PC}$ (s.)	nb. pas	$ \mathcal{S}^2 $	nb. rev.	nb. switch	$m^f$ (kg.)
10.	1.5	2	4	6	8.e-9	7.3	18	1378.36
10.	5.	5	50	18	3.e-8	24.2	49	1389.06
5.	1.5	3	10	7	2.e-8	15.1	36	1378.59
1.	1.5	16	66	8	6.e-8	75.4	179	1377.94
0.5	1.5	53	70	5	3.e-8	150.7	360	1377.98
0.2	1.5	174	1833	30	6.e-6	376.8	915	1377.97
0.1	1.5	502	13247	58	1.e-5	753.7	1786	1377.99

TAB. 4.4 – Tableau des résultats d'exécution de **MfMax-v0**.

où

$t_{CI}$  : le temps d'exécution de l'homotopie sur les conditions initiales ;

$t_{PC}$  : le temps d'exécution de la continuation différentielle (de  $(P^2)_0$  à  $(P^2)$ ) ;

nb pas : le nombre de pas de prédiction-correction réussis ;

$|\mathcal{S}^2|$  : la norme de la fonction de tir à la solution ;

nb rev : le nombre de révolutions du transfert (il est fixé par l'approximation linéaire du  $c_{L^f}^{opt}$  et celle de  $L_{min}^f$ );

nb switch : le nombre de commutations durant le transfert;

$m^f$  la masse finale;

On constate qu'on vérifie bien l'indépendance approximative de  $m^f$  par rapport à  $T_{max}$  pour un  $c_{tf}$  donné.

Ce qui influe sur le temps de calcul est plus le nombre de révolutions que la valeur de  $T_{max}$  (mais gardons tout de même à l'esprit que  $T_{max}$  a un grand impact sur le nombre de révolutions minimum). Le temps de calcul est également directement influencé par le nombre de pas de prédiction-correction.

Le temps d'exécution de la continuation différentielle ne peut pas être considéré comme proportionnel au nombre de révolutions. En effet, plus le nombre de révolutions est élevé, moins le calcul de la fonction de tir (l'intégration du problème aux deux bouts) est précise et donc moins le suivi de chemin l'est. On comprend donc pourquoi on augmente le nombre de pas de prédiction-correction puisque les prédictions étant de moins en moins précises, la continuation est obligée d'en faire plus. Ceci explique aussi pourquoi on n'arrive pas à résoudre aussi *facilement* le problème pour des poussées plus faible que 0.1 Newton.

Le nombre de pas croissant est surtout dû à une plus grande concentration de pas à proximité de  $\lambda = 1$ . Ceci explique le choix fait de raffiner le suivi de chemin par un tir simple après un certain nombre de pas de prédiction-correction, comme mentionné à la section 3.6.

Le rapport entre le temps d'exécution de l'homotopie sur les conditions initiales et celui de la continuation différentielle tend à pencher du côté de la continuation différentielle qui en raison des remarques précédentes prend de plus en plus de temps.

Le nombre de commutations est presque linéaire par rapport à  $T_{max}$  pour un  $c_{tf}$  donné. Par contre ce n'est pas le cas pour un  $T_{max}$  donné par rapport à  $c_{tf}$ . Ceci s'explique par le fait que dans le premier cas, le nombre de révolutions est directement proportionnel à  $T_{max}$  (toujours pour un  $c_{tf}$  donné) et le nombre de péricées sur lesquels on a un arc de poussées l'est aussi (ce qui renforce l'idée de la dernière correction indispensable sur les péricées). Dans le second cas le nombre de révolutions est bien proportionnel à  $c_{tf}$  (pour  $T_{max}$  donné cette fois) mais le nombre de péricées sur lesquels on pousse est lui quasiment inchangé.

Pour souligner la dégradation de la précision de calcul quand on diminue  $T_{max}$  on peut aussi constater que la norme de la fonction de tir est de plus en plus grande à mesure que  $T_{max}$  décroît.

Il est à noter que ces résultats correspondent à un réglage générique des paramètres numériques du problème (pas de différences finies, précisions re-

quises du suivi de chemin ...etc) et qu'il est tout à fait possible d'obtenir de meilleures performances en particulierisant ces paramètres (ce qui demande toutefois une certaine expertise).

## Conclusion

Cette section nous a permis de présenter la seconde formulation qui résout de façon tout à fait satisfaisante les problèmes posés par l'existence des minima locaux. On a de plus mis en évidence la relation empirique de l'indépendance du produit  $T_{max}L_{min}^f$  qui montre s'il était besoin, les similarités entre le temps et la longueur.

La recherche du nombre de révolutions optimales nous a aussi mené à la constatation d'une autre régularité du transfert, à savoir la linéarité de  $c_{L^f}^{opt}$  par rapport à  $c_{t^f}$  et son indépendance par rapport à  $T_{max}$ .

Une autre relation empirique soulignée dans cette section est celle de l'indépendance de la consommation par rapport à  $T_{max}$  pour un  $c_{t^f}$  donné. Cette relation est d'un grand intérêt pratique. On y a également mentionné l'inutilité de l'allocation d'un grand temps de transfert au regard du temps de transfert minimum.

Finalement les stratégies optimales ont été présentées accompagnées de nombreuses remarques. De ces remarques on peut tirer l'idée de la troisième formulation qui est introduite à la section suivante.

## 4.4 Troisième formulation

### Introduction

On pourrait d'ores et déjà s'estimer satisfait des résultats de la section précédente si ce n'était le fait que ces résultats nous suggèrent une troisième formulation plus adaptée. En effet, la formulation précédente possède un inconvénient majeur qui est l'obligation de se fixer  $t^f$  et  $L^f$  en adéquation l'un de l'autre. Bien que cet inconvénient trouve une solution acceptable en la possibilité d'approximer  $c_{L^f}^{opt}$  il serait toutefois intéressant de pouvoir se passer de cette approximation.

La nouvelle formulation repose sur le fait que la variable indépendante la plus naturelle pour notre problème de transfert n'est pas le temps mais la longueur. En effet, on a déjà vu que l'existence des minima locaux dans la première formulation est probablement due à la  $2\pi$ -périodicité de notre transfert (si on n'applique pas de poussée).

Il pourrait donc être intéressant de résoudre notre problème non pas à  $t^f$  fixé (ce qui est le cas même pour la seconde formulation puisqu'on ne se fixe  $L^f$  que pour mieux le contrôler) mais à  $L^f$  fixé et  $t^f$  libre.

De plus, la vitesse angulaire du satellite variant beaucoup d'un endroit à l'autre de l'orbite, il est préférable d'exprimer la dynamique du système en fonction de la longitude plutôt que du temps. Ceci aura pour effet d'avoir une évolution plus régulière de tous les états et donc d'avoir une intégration numérique plus précise de ces derniers le long du transfert.

On peut également raisonnablement espérer pourvoir déduire du  $L^f$  fixé le  $t^f$  induit par la résolution et ce du fait de nombreuses régularités déjà constatées de notre problème. Ceci sera numériquement vérifié par la suite.

### La formulation

Pour se fixer  $L^f$  on procède de la même manière que dans la formulation précédente en se donnant un coefficient multiplicateur  $c_{L^f}$  :

$$L^f = L^0 + c_{L^f}(L_{min}^f - L^0).$$

On rappelle qu'on trouve facilement une approximation de  $L_{min}^f$  pour un  $T_{max}$  donné (cf. 4.1).

L'expression de la dynamique du système en fonction de la longitude se fait par un simple changement de variable étant donné qu'on sait déjà que la longitude est strictement croissante dans le temps (la poussée est faible devant l'inertie du satellite).

Malheureusement, dans le cas du transfert non coplanaire, l'évolution de la longitude dans le temps dépend de la composante normale de la poussée. Avec les notations du premier chapitre, cette évolution est :

$$\dot{L} = \sqrt{\frac{\mu_0}{P}} + \frac{T_{max}}{m} \sqrt{\frac{P}{\mu_0}} \frac{Z}{W} u_3 > 0.$$

Or le changement de variable proposé aura pour conséquence d'induire des évolutions des états de la forme :

$$\frac{dx_i}{dL} = \dot{x}_i \frac{dt}{dL} = \frac{\dot{x}_i}{\dot{L}}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

L'inconvénient majeur de cette forme de dynamique est que l'évolution de  $(P, e_x, e_y, h_x, h_y)$  n'est plus linéaire par rapport au contrôle. Cette linéarité avait l'immense avantage de rendre le calcul de la commande  $\mathcal{H}$ -minimale très aisée (par simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Une fois la linéarité perdue, ce calcul devient beaucoup plus compliqué et du fait de l'application de notre méthode homotopique qui nous oblige à considérer le critère de minimisation de l'énergie il devient même presque

impossible à implémenter. En effet la solution de la minimisation du Hamiltonien par rapport au contrôle conduit au calcul d'une racine non triviale d'un polynôme de degré 3 comme il est expliqué à l'annexe A.

Pour s'affranchir de cette non linéarité, il suffit de garder à l'esprit que le but de cette formulation est de travailler à  $L^f$  fixé avec un système exprimé en fonction de la longitude (système non autonome). Or, rien ne nous oblige à appliquer le PMP sur le problème non autonome, on peut en effet l'appliquer sur le système autonome et ensuite faire le changement de variable du temps à la longitude sur le problème aux deux bouts obtenus.

Exprimons cette idée de façon plus formelle. On souhaite résoudre le problème suivant (transfert non coplanaire, critère convexe) pour  $\lambda = 1$  :

$$(P_{c_{L^f}})_\lambda \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^{t^f} (1 - \lambda)|u(t)|^2 + \lambda|u(t)|dt \\ \dot{x} = f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i f_i(x) \\ \dot{m} = -\beta T_{max} |u| \\ |u| \leq 1 \\ x(0) = x^0 \\ m(0) = m^0 \\ h(x(t^f)) = 0 \\ L^f = c_{L^f} \cdot (L_{min}^f - L^0) + L^0 \\ t^f \text{ libre} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

On applique le PMP à  $(P_{c_{L^f}})_\lambda$  après être passé en temps final fixé :

$$(B\tilde{V}P_{c_{L^f}})_\lambda \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = \varphi(s, y) \\ x(0) = x^0 \\ m(0) = m^0 \\ y_{16}(0) = 0 \quad (p_{t^f}(0) = 0) \\ \tilde{h}(y(1)) = 0 \quad (h(\cdot) = 0 \text{ et } p_{t^f}(1) = 0) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

en posant :

$$\begin{aligned} t &= t^f s, \quad s \in [0, 1] \\ y &= (x, m, t^f, p_x, p_m, p_{t^f}) \in \mathbb{R}^{16} \end{aligned}$$

comme la longitude est strictement croissante, on a  $\varphi_6 > 0$  et on peut poser ( $L = y_6$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y} = (y_{1,\dots,5}, s, y_{7,\dots,16}) \\ \tilde{y}' = \frac{d\tilde{y}}{dL} = \frac{\dot{\tilde{y}}}{\varphi_6} = \tilde{\varphi}(L, \tilde{\varphi}) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

(4.6) et les conditions aux limites de (4.5) nous permettent de définir un problème aux deux bouts  $(BVP_{c_{L^f}})_\lambda$  qui correspond au problème de transfert à  $L^f$  fixé et dont la dynamique est exprimée en fonction de la longueur.

Notons  $\mathcal{S}_{c_{L^f}}(z, \lambda)$  la fonction de tir associée à  $(BVP_{c_{L^f}})_\lambda$ . Les inconnues  $z$  de cette fonction de tir sont :

$$z = (t^f, p_P(0), p_{e_x}(0), p_{e_y}(0), p_{h_x}(0), p_{h_y}(0), p_L(0), p_m(0)).$$

La formulation utilisée est ainsi entièrement définie. Reste maintenant à éclaircir certains points de la méthode de résolution.

On a déjà introduit le paramètre homotopique qui nous sert à relier le critère de la minimisation de l'énergie à celui de la minimisation de la consommation. La méthode employée restera alors la continuation différentielle dont les résultats seront donnés dans le paragraphe suivant.

Pour l'initialisation de notre homotopie principale, on fait encore une fois appel à l'homotopie sur les conditions initiales. Celle-ci donne des résultats aussi bons que pour la seconde formulation mis à part que le temps d'exécution de la continuation discrète est légèrement supérieure pour la troisième formulation à celui de la seconde formulation (voir le tableau de résultat à la fin du chapitre). Comme pour la seconde formulation, nous n'avons pas de solution triviale pour initialiser cette homotopie sur les conditions initiales. Cependant une telle initialisation est relativement aisée à trouver avec notre algorithme de recherche de zéro à partir d'un point initial de la forme  $(t^f, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  à condition que  $t^f > 0$ .

On note également que l'homotopie sur les conditions initiales génère un chemin de zéros tout à fait possible à suivre par une continuation différentielle. Ceci peut être vu comme un indice de l'unicité des zéros de la fonction de tir  $\mathcal{S}_{c_{L^f}}$ . Cependant on garde la continuation discrète car plus rapide du fait de la grande différence de magnitude entre le zéro au *départ* et à l'*arrivée* de l'homotopie sur les conditions initiales.

D'un point de vue numérique, on a expliqué le changement de variable par un argument de régularité de l'évolution des états par rapport à la longueur. Cependant, de changement de variable pose un problème de structure du système à intégrer. En effet, le fait d'appliquer notre changement de variable sur le problème aux deux bouts  $(BVP_{c_{L^f}})_\lambda$  fait que le système intégré n'est plus hamiltonien. On intègre en effet un état adjoint  $p_L$  sans pour autant intégrer en parallèle l'état associé qui est  $L$  (et pour cause,  $L$  est la variable indépendante). Ceci pourrait poser problème si on voulait tenir compte de la structure particulière des systèmes hamiltoniens. Dans notre cas, le seul véritable problème posé par cette structure est une grande sensibilité de  $p_L$  par rapport à sa mise à l'échelle. Ce problème est très facilement résolu en affectant à  $p_L$  une mise à l'échelle appropriée qui correspond au

scaling automatique (cf. chapitre 3 section 4) multiplié par une constante (en général  $1.e - 1$ ).

Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus par l'utilisation de la troisième formulation.

## Résultats

### Temps final induit

Vérifions dans un premier temps qu'il est bien possible d'estimer le temps de transfert induit par la résolution à un  $c_{Lf}$  donné. La figure 4.24 donne l'évolution de  $c_{tf}$  en fonction de  $c_{Lf}$  pour différents  $T_{max}$ .

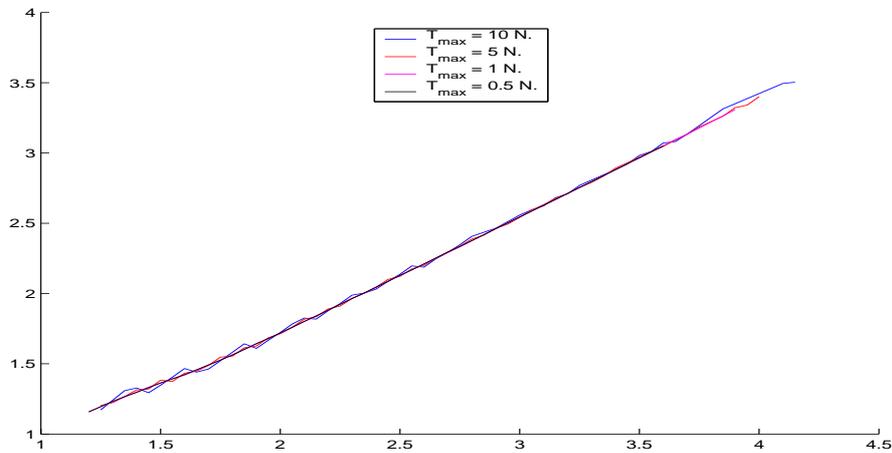


FIG. 4.24 –  $c_{tf}$  vs.  $c_{Lf}$  pour différents  $T_{max}$ .

On constate sans grand étonnant que l'évolution de  $c_{tf}$  en fonction de  $c_{Lf}$  est quasiment linéaire. Par régression linéaire, on obtient les coefficients de la relation linéaire reliant  $c_{tf}$  à  $c_{Lf}$ . Ces coefficients sont les suivants (pour le jeu d'échantillons de la figure) :

$$c_{tf} \approx 0.81c_{Lf} + 0.123. \quad (4.7)$$

Cette relation linéaire semble de plus très bien respectée ce qui nous permettra d'estimer de façon relativement précise le temps de transfert induit par un  $c_{Lf}$  donné.

L'intérêt de cette estimation est qu'en pratique on souhaite résoudre le problème de transfert pour un temps de transfert donné. On pourra donc se fixer un  $c_{Lf}$  en accord avec le  $t^f$  qu'on veut avoir. Bien que précise, cette estimation n'en restera pas moins une, et devient de ce fait un léger inconvénient de notre troisième formulation. Cet inconvénient sera néanmoins

largement contrebalancé par la plus grande performance de cette formulation comme cela est montré à la fin de cette section.

On peut vérifier si cette approximation linéaire se rapproche de celle établit pour la seconde formulation de  $c_{Lf}^{opt}$  en fonction de  $c_{tf}$ . La figure 4.25 représente les deux approximations linéaires.

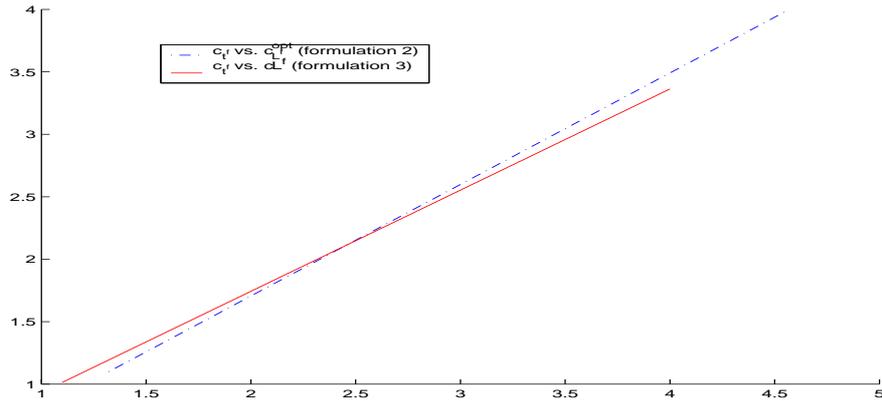


FIG. 4.25 –  $c_{tf}$  vs.  $c_{Lf}^{opt}$  (seconde formulation) et  $c_{tf}$  vs.  $c_{Lf}$  (troisième formulation), approximations linéaires.

Bien qu'il n'y ait pas complète égalité entre les deux approximations linéaires, on peut voir qu'elles sont assez proches. Une parfaite égalité entre les deux approximations aurait de plus été assez surprenante puisque minimiser la consommation pour un temps donné ou pour une longueur finale donnée correspond à deux problèmes relativement similaires mais toutefois distincts.

Notons également que comme les deux régressions linéaires sont faites l'une de  $c_{tf}$  en fonction de  $c_{Lf}$  et l'autre de  $c_{Lf}$  en fonction de  $c_{tf}$ , on aurait dans tous les cas eu une différence entre les deux droites.

### Masse finale

L'observation de l'évolution de la masse finale nous permet de valider la formulation non autonome. Elle est représentée à la figure 4.26.

Sur cette figure on constate tout d'abord avec soulagement que la masse finale est bien croissante par rapport à  $c_{Lf}$  ce qui était le résultat attendu pour statuer sur la validité de notre nouvelle formulation.

De plus, on peut voir qu'on a comme pour la seconde formulation l'indépendance empirique de  $m^f$  en fonction de  $T_{max}$  pour un  $c_{Lf}$  donné (et donc pour un  $c_{tf}$  donné de part la relation 4.7).

A ces remarques on rajoute le fait qu'encore une fois il semble exister une valeur limite pour la masse finale qui doit être d'environ 1390kg. Et

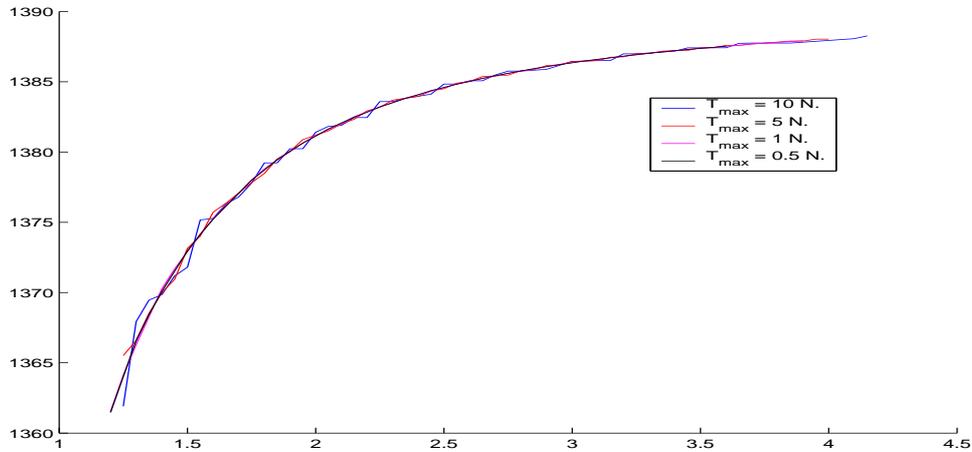


FIG. 4.26 – Masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  pour plusieurs  $T_{max}$ .

en effet on arrive à trouver des  $c_{Lf}$  pour lesquelles la masse finale vaut à peine plus de  $1390\text{kg}$  (pour un  $c_{Lf} = 15$  et  $T_{max} = 10\text{N}$ ). On rejoint donc la remarque sur le cas impulsionnel faites à la section précédente.

### Stratégies optimales

Observons maintenant les solutions obtenues par utilisation de la formulation non autonome. On commence par une stratégie de poussée qui est donnée à la figure 4.27.

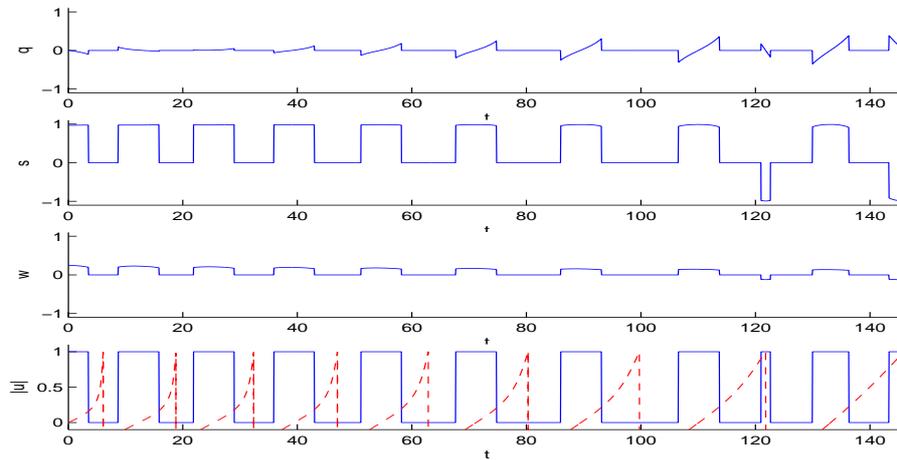


FIG. 4.27 – Stratégie de poussée (en fonction du temps) pour  $T_{max} = 10\text{N}$  et  $c_{Lf} = 2$ .

La stratégie de poussée possède la même structure que pour la seconde formulation à savoir des poussées centrées sur les passages aux apogées à

l'exception des dernières poussées sur les périgées. La composante ortho-radiale est largement majoritaire et la normale est très régulière.

La stratégie de poussée étant la même que pour la seconde formulation, l'évolution des états est également la même est on renvoie donc le lecteur à la section précédente pour les remarques concernant cette évolution.

### Comparaison

Nous allons maintenant comparer la seconde et la troisième formulation en terme de masse finale et de temps de calcul.

Pour la troisième formulation, on n'a donné que l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{L^f}$ . Or, comme on l'a déjà fait remarquer, du point de vue pratique, il est plus logique d'exprimer cette masse en fonction du temps de transfert (et donc du  $c_{tf}$  induit). La figure 4.25 nous permet d'affirmer que pour les deux formulations, l'évolution de la masse finale est très proche. Cependant, nous donnons tout de même cette évolution à la figure 4.28.

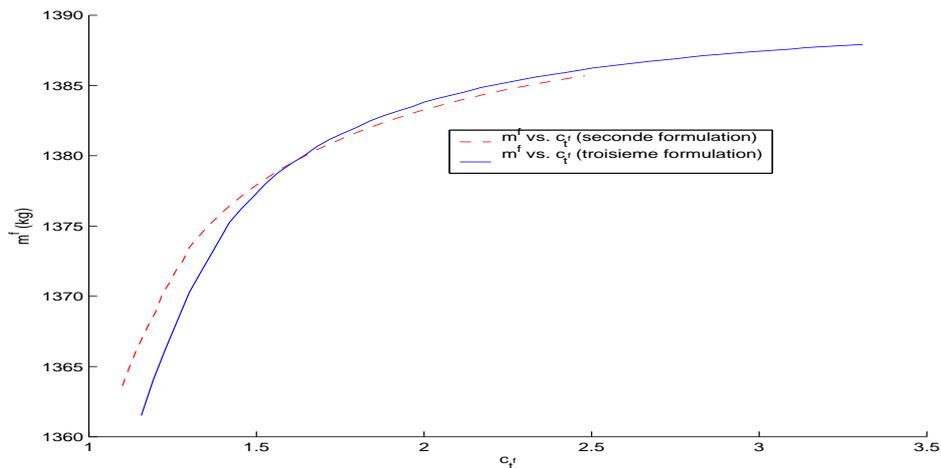


FIG. 4.28 – Evolutions de la masse finale en fonction de  $c_{tf}$  pour 1N et les deux formulations.

On constate que pour une faible  $c_{tf}$  ( $< 1.5$ ) la seconde formulation est clairement meilleure. Cependant, l'essentiel du gain étant atteint pour un  $c_{tf} > 1.5$ , on considère rarement des temps de transfert proche de  $t_{min}^f$ . Pour ces  $c_{tf} > 1.5$ , on peut voir que la formulation non autonome donne de meilleurs résultats que la formulation autonome.

Ceci peut paraître surprenant étant donné qu'en toute rigueur la formulation autonome devrait toujours être meilleure que la non autonome en terme de masse finale en fonction de  $c_{tf}$ . Néanmoins, il ne faut pas oublier que la résolution de la seconde formulation est issue d'une approximation

sur le  $c_{Lf}^{opt}$  alors qu'il n'y a pas d'approximation dans la formulation non autonome. On note toutefois que la différence entre les deux formulations ne dépasse pas le kilogramme pour  $c_{tf} > 1.5$ .

On a donc déjà un léger avantage en faveur de la troisième formulation.

La plus grande différence observé entre les deux formulations vient du temps d'exécution et du plus petit  $T_{max}$  atteint. Avec la formulation autonome, nous sommes arrivés à descendre jusqu'à des poussées de 0.1 Newton. Avec la formulation longitudinale le plus petit  $T_{max}$  atteint est de 0.02 Newton avec des temps de calculs bien inférieurs à ceux de la seconde formulation.

Le tableau 4.5 résume quelques expérimentations effectuées sur un processeur Pentium IV de 2.8GHz de fréquence.

$T_{max}$ (N.)	Formulation autonome					Formulation longitudinale					
	$c_{tf}$	$t_{CI}$ (s.)	$t_{diff}$ (s.)	$ \mathcal{S} $	$m_f$ (kg.)	$c_{Lf}$	$t_{CI}$ (s.)	$t_{diff}$ (s.)	$ \mathcal{S}_L $	$m_f$ (kg.)	
10.	1.5	2	4	8.e-9	1378.36	1.77	3	4	1.e-9	1378.79	
10.	5.	5	50	3.e-8	1389.06	5.9	8	23	9.e-10	1389.18	
5.	1.5	3	10	2.e-8	1378.59	1.77	7	13	4.e-10	1378.43	
1.	1.5	16	66	6.e-8	1377.94	1.77	32	47	2.e-9	1378.22	
0.5	1.5	53	70	3.e-8	1377.98	1.77	70	35	4.e-9	1378.31	
0.2	1.5	174	1833	6.e-6	1377.97	1.77	144	83	1.e-8	1378.29	
0.1	1.5	502	13247	1.e-5	1377.99	1.77	597	158	1.e-7	1378.30	
0.05		Pas de résultat					1.77	567	381	9.e-7	1378.29
0.02		Pas de résultat					1.77	1972	1125	9.e-5	1378.29

TAB. 4.5 – Comparaison des deux formulations.

Les diverses colonnes correspondent à :

- 3&8. temps d'exécution de l'homotopie sur les conditions initiales ;
- 4&9. temps d'exécution de la continuation différentielle ;
- 5&10. norme de la fonction de tir à la solution ;
- 6&11. masse finale.

Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation des logiciels **MfMax-v0** [39] pour la formulation autonome et **MfMax-v1** [40] pour la formulation longitudinale.

On peut, avec une certaine expertise obtenir de meilleurs résultats mais nous avons voulu utiliser ici les réglages par défaut de ces deux logiciels afin

de rendre la reproductibilité plus aisée.

Le  $c_{L^f}$  fixé correspond à celui qui induit un  $c_{t^f}$  proche de celui fixé dans la formulation autonome.

Du point de vue de l'homotopie sur les conditions initiales, les deux formulations sont équivalentes. Bien que la première formulation soit plus rapide mais de peu pour la plupart des tests effectués.

Les masses finales sont du même ordre de grandeur ce qui montre que notre choix de  $c_{L^f}$  est correct.

Les précisions sur le zéro de la fonction de tir sont bien meilleures pour la formulation longitudinale, surtout quand  $T_{max}$  est faible.

C'est cependant sur le temps d'exécution que la différence est la plus notable. En effet, pour les poussées inférieures à 0.5 Newton, la formulation devient de plus en plus rapide en comparaison de la formulation autonome. On a même un temps de calcul 80 fois plus rapide pour 0.1 Newton. Cette plus grande rapidité pour les poussées faibles vient principalement du fait que l'évaluation de la fonction de tir étant plus précise pour la formulation longitudinale, le suivi du chemin de zéros est lui aussi beaucoup plus précis et donc plus efficace. En effet, on constate que les suivis de chemin nécessitent dans le cas de la formulation longitudinale un nombre de pas bien inférieur (de l'ordre de 3 ou 4) à celui de la formulation autonome (de 10 à 50 pour les poussées faibles).

De plus, pour des poussées très faibles, le temps d'exécution de l'homotopie sur les conditions initiales devient supérieur à celui sur le critère pour la formulation longitudinale. Ce qui semble limiter la prise en compte de  $T_{max}$  plus faible encore ( $< 0.02N.$ ) est l'homotopie sur les conditions initiales qui ne converge plus. Mais l'intérêt de poussées plus faibles est cependant limité, les temps de transfert devenant vraiment prohibitifs.

Rajoutons cependant qu'on pourrait réaliser un gain de précision et donc de rapidité dans la seconde formulation en utilisant le système non autonome. On aurait par contre toujours à fixer  $L^f$  en fonction de  $t^f$ .

## Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation et à l'interprétation des résultats numériques obtenus par la méthode de résolution introduite par les chapitres précédents.

Nous avons pu voir que l'objectif premier de la thèse a été largement atteint puisqu'on a bien une méthode de résolution nous permettant de trouver la solution du problème de transfert considéré. de plus, cette solution est obtenue sans connaissance *a priori* sur la structure de la commande

solution.

Nous avons de plus pu vérifier numériquement les hypothèses faites au second chapitre.

Différentes formulations ont été présentées dont la plus efficace est sans conteste la dernière employant un système non autonome.

Rappelons que les résultats de la seconde et de la troisième formulation sont aisément reproductibles par l'intermédiaire des logiciels **MfMax-v0** [39] pour la seconde formulation et **MfMax-v1** [40] pour la troisième. Ces deux logiciels étant accessibles à l'adresse <http://www.enseiht.fr/lima/apo/mfmax>

Nos nombreux résultats numériques ont également permis de mettre en évidence l'indépendance de l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{tf}$  (et de  $c_{Lf}$ ). Nous avons aussi pu faire un parallèle intéressant entre le cas impulsif et notre cas continu. Ces observations ayant été faites sur notre cas modèle, nous consacrons le chapitre suivant à la sensibilité du transfert par rapport aux conditions initiales de la trajectoire.



## Chapitre 5

# Conditions initiales, lien impulsif

Dans ce chapitre est abordé la question de l'influence des conditions initiales de la trajectoire sur les solutions obtenues. Pour ce faire, on commence par tester la sensibilité de nos trajectoires pour de faibles variations de l'orbite initiale nominale. On continue par observer des trajectoires pour des orbites initiales relativement éloignées de l'orbite initiale nominale mais toujours afin de les comparer à celles du premier transfert. Notons que tous les résultats présentés ont été obtenus grâce aux logiciels **TfMin** [20] et **mfmmax-v1** [40, 41].

### 5.1 Sensibilité

Cette section est consacrée à la sensibilité du transfert par rapport aux conditions initiales de la trajectoire. Ceci nous permettra également de valider la robustesse de notre méthode de résolution.

Nous commençons par observer la sensibilité du temps de transfert minimum par rapport à la forme de l'orbite initiale.

#### Transfert coplanaire en temps minimum

Nous ne nous intéressons dans un premier temps qu'à la sensibilité par rapport à la forme de l'orbite initiale, et nous ne considérerons que le cas du transfert coplanaire.

La forme de l'orbite initiale est donnée par le paramètre initial de l'orbite  $P^0$  et par le vecteur excentricité  $(e_x^0, e_y^0)$ . Nous ne touchons pas à la seconde composante du vecteur excentricité puisque la seule influence de l'excentricité initiale nous intéresse et non l'orientation de l'ellipse, qui n'a quasiment pas d'importance du fait du grand nombre de révolutions à poussée faible. En effet, changer l'orientation de l'orbite initiale reviendra à changer la position

initiale du satellite, ce qui reviendra donc à changer la longitude initiale et on comprend bien que cette longitude n'a d'influence que pour un transfert comportant un faible nombre de révolutions.

Fixons la variation maximum de  $P^0$  et  $e_x^0$  à 5% par rapport aux conditions nominales ( $P^0 = (1 + / - 0.05)11.625 Mm$  et  $e_x^0 = (1 + / - 0.05)0.75$ ). La minimisation du temps de transfert est faite grâce au logiciel **TfMin** [20]. La figure 5.1 donne les résultats obtenus.

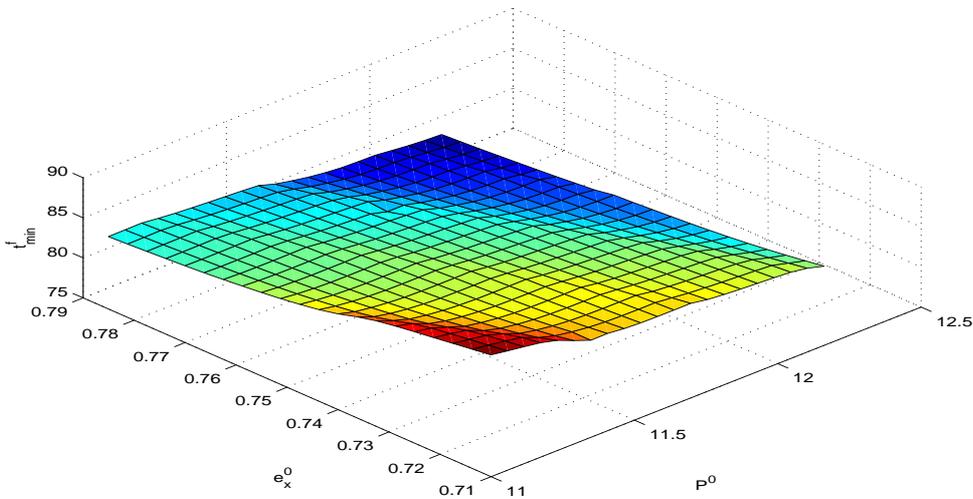


FIG. 5.1 –  $t_{min}^f$  vs.  $(P^0, e_x^0)$  pour  $T_{max} = 10N$ .

En faisant bien attention à l'échelle de représentation de  $t_{min}^f$  on s'aperçoit que les différences sur celui-ci ne sont pas énormes et représentent au plus 7% de la valeur nominale (qui est de 84.27 h).

Le plus grand  $t^f$  est de 88.89 h alors que le plus petit est de 79.07 h. Chacun des deux temps de transfert extremum correspond à une variation maximum de  $(P^0, e_x^0)$ .

Comparons les deux stratégies donnant les temps extrémaux avec la stratégie nominale. Cette comparaison est donnée par la figure 5.2 .

On a comme de coutume la composante radiale en haut et l'ortho-radiale en bas. En pointillés on a la longitude mise à l'échelle qui nous indique les passages aux périhélie (discontinuités) et aux apogées (passages continus par zéro).

On constate que pour les trois stratégies, la composante ortho-radiale est dominante. La stratégie nominale est la plus régulière car on voit bien des inversions de poussée à tous les passages aux périhélie alors que ce n'est pas le cas des deux autres stratégies.

Plus surprenant est la différence entre les longitudes finales des trois

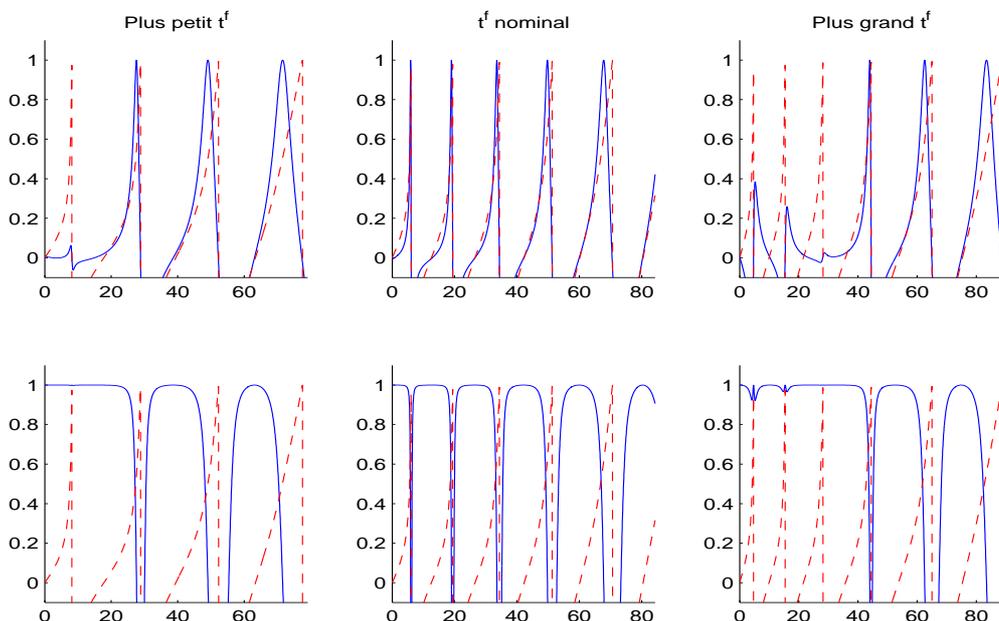


FIG. 5.2 – Comparaison entre les stratégies de poussée en temps minimum pour  $P^0$  et  $e_x^0$  5% supérieures (à gauche), égaux (au centre) et 5% inférieures (à droite) à leurs valeurs nominales et  $T_{max} = 10N$ .

stratégies. En effet, alors que le temps de transfert augmente de 6.6% puis de 4.8%, la longitude finale est quant à elle modifiée de 35.8% et de 6.7%. Cette différence, surtout la première aura à être prise en compte dans la résolution du problème de maximisation de la masse finale qui va suivre.

Nous allons donc, avant d’aborder le problème de maximisation de la masse finale, résoudre celui de la minimisation de la longitude finale mais uniquement pour les trois conditions initiales précédemment citées (i.e, nominales, 5% inférieures et 5% supérieures). Le tableau 5.1 donne les résultats obtenus.

Conditions initiales	$t_{min}^f$ (h.)	$m(t_{min}^f)$ (kg.)	$L_{min}^f$ (rad.)
5% inférieures	88.888	1336.418	37.047
nominales	84.270	1344.916	29.698
5% supérieures	79.071	1354.484	22.919

TAB. 5.1 –  $t_{min}^f$ ,  $m(t_{min}^f)$  et  $L_{min}^f$  pour 10N et différentes conditions initiales.

Ces résultats correspondent bien à ce à quoi on pouvait s’attendre au vu du  $L^f$  induit par la minimisation du temps de transfert.

De plus les masses finales correspondant au  $t_{min}^f$  nous permettent déjà de prédire les conditions initiales donnant le meilleur résultat en terme de maxi-

minimisation de la masse finale (à savoir les conditions initiales 5% supérieures).

Nous allons maintenant étudier l'influence de ces légers changements de conditions initiales sur le problème de maximisation de la masse finale.

### Maximisation de la masse finale

Comme indiqué précédemment, nous ne nous intéresserons qu'à l'influence de la forme de l'orbite. De plus, comme on a vu pour la minimisation du temps de transfert qu'on avait deux cas limites, on ne va étudier que ceux-là. Ces deux cas correspondent à des  $(P^0, e_x^0)$  5% inférieurs et supérieurs aux conditions nominales.

La formulation employée pour la résolution sera celle du chapitre précédent, à savoir la formulation non autonome. On fait ce choix pour des raisons évidentes de rapidité de calcul et de mise en œuvre.

Observons tout d'abord l'évolution de la masse finale en fonction de  $t^f$  (le  $t^f$  induit par le  $c_{Lf}$ ) pour les trois conditions initiales considérées. Cette comparaison est donnée par la figure 5.3.

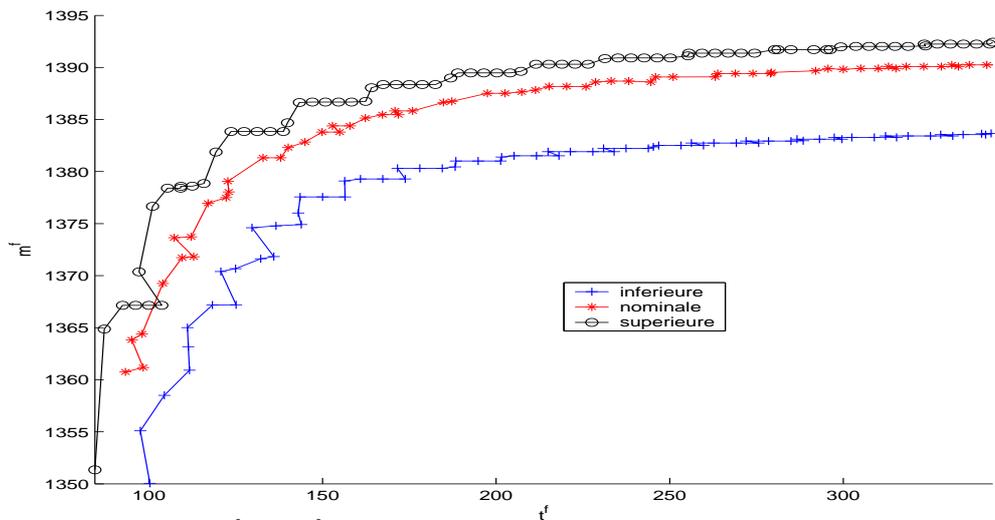


FIG. 5.3 –  $m^f$  vs.  $t^f$  pour les trois conditions initiales et  $T_{max} = 10N$ .

Comme on pouvait s'y attendre, les conditions initiales donnant le meilleur temps de transfert minimum donnent également le meilleur gain de masse finale. De plus cette différence se voit même pour les grands  $c_{Lf}$  (donc les grands  $c_{tf}$ ) et est de plus de  $10kg$  entre les conditions initiales inférieures et supérieures.

Précisons que la non monotonie des  $t^f$  induits est due au faible nombre de révolutions du transfert. En effet, si on considérait une poussée plus faible, nous n'aurions pas ce genre de problème (mais cette poussée de  $10N$  nous suffit pour conclure). De plus, on peut également voir des paliers sur la masse

finale, notamment pour les conditions initiales supérieures. Ceci est encore une fois dû au faible nombre de révolutions, chaque palier correspondant au rajout d'une révolution.

Voyons maintenant quelles sont les différences entre les stratégies de poussées correspondant aux trois conditions initiales.

Rappelons tout d'abord l'évolution des états, la stratégie de poussée et la trajectoire pour notre transfert nominal coplanaire. Ceci est donné par la figure 5.4.

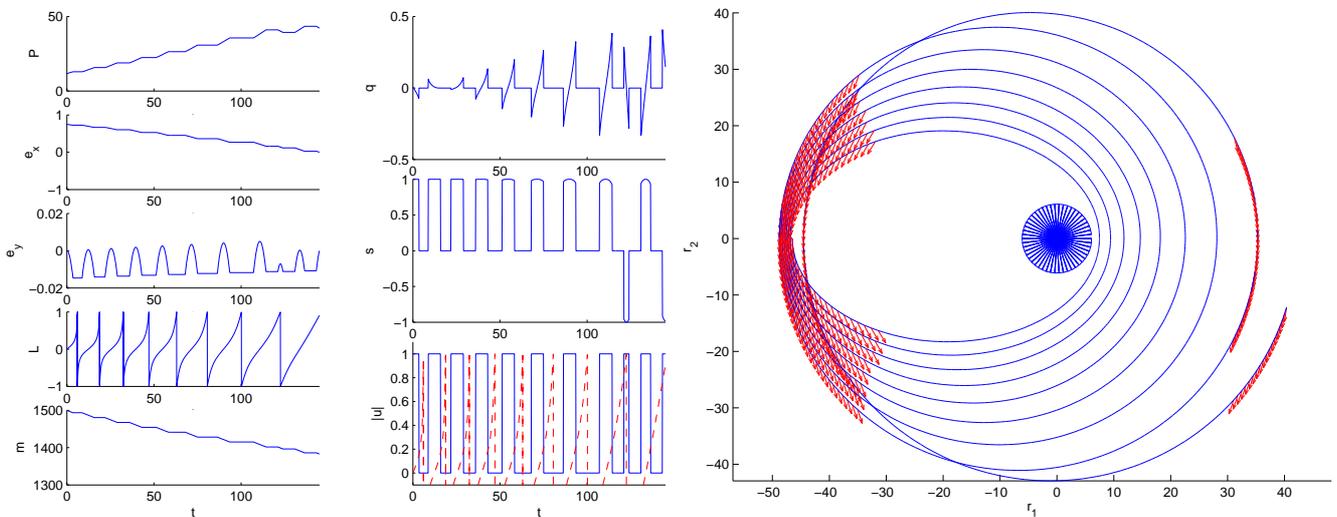


FIG. 5.4 – Evolution des états, stratégie de poussée et trajectoire pour les conditions initiales nominales,  $c_{L_f} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

La principale caractéristique de ce transfert est la prédominance des poussées aux apogées ainsi que les poussées centrées sur les derniers périgées (les deux derniers ici).

Ces poussées aux périgées sont inversées par rapport à celles aux apogées comme on peut le voir sur l'évolution de la composante ortho-radiale du contrôle.

De plus, on constate que les poussées aux périgées servent à diminuer le paramètre de l'orbite qui sans ça terminerait sur une valeur trop élevée. Ce paramètre est par ailleurs à croissance régulière si on excepte les deux diminutions de la fin.

L'excentricité est quant à elle à décroissance régulière en sa première composante ( $e_x$ ) et est assez irrégulière en sa seconde composante ( $e_y$ ). Cependant  $e_y$  reste toujours très faible en comparaison de  $e_x$ , ce qui indique que l'orientation de l'orbite reste quasiment inchangée durant tout le transfert (et permet donc de localiser directement les passages aux apogées et

périgées à partir de la longitude).

Observons maintenant le même graphe mais pour les conditions initiales 5% supérieures aux conditions nominales. Nous nous plaçons encore une fois à  $c_{Lf} = 2$  mais rappelons que ce coefficient est alors appliqué au  $L_{min}^f$  des conditions initiales considérées (ce n'est donc pas le  $L_{min}^f$  nominal). La figure 5.5 représente l'évolution des états, la stratégie de poussée et la trajectoire.

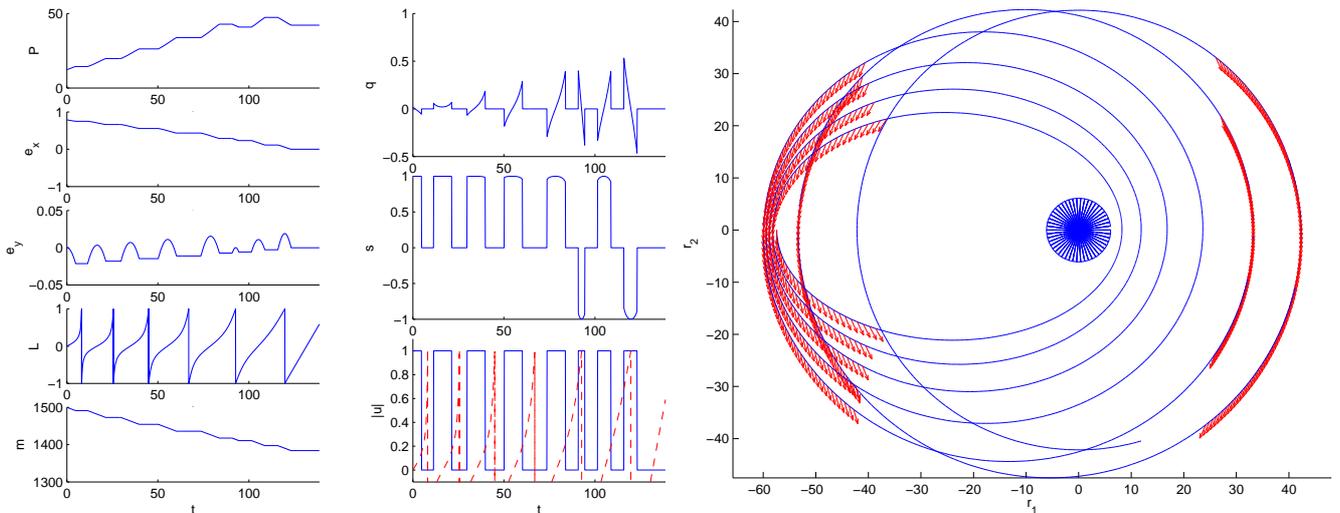


FIG. 5.5 – Evolution des états, stratégie de poussée et trajectoire pour les conditions initiales supérieures,  $c_{Lf} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

Dans l'ensemble, cette figure est assez similaire à la 5.4. Nous pouvons toutefois dégager quelques différences.

Tout d'abord, les poussées sur les derniers périgées sont plus étendues que pour le cas nominal. Ceci a pour effet que la décroissance du paramètre de l'orbite est notablement plus forte.

De plus, on voit bien que le nombre de révolutions est plus faible que dans le cas nominal, ce qui a déjà été constaté.

Une autre différence, plus anecdotique celle-ci, vient de l'évolution de  $e_y$  qui est toujours oscillant mais semble un peu plus croissant que dans le cas précédent. Cependant, les ordres de grandeurs restent les mêmes.

Pour finir, observons le cas de notre dernier jeu de conditions initiales, celles 5% inférieures aux conditions nominales. La figure 5.6 correspond à ces conditions initiales.

Une première différence, de faible conséquence est la *croissance oscillante* de  $e_y$  qui cette fois est beaucoup plus marquée que pour les deux transferts précédents. Ceci n'est peut-être qu'un effet de bord de la principale différence

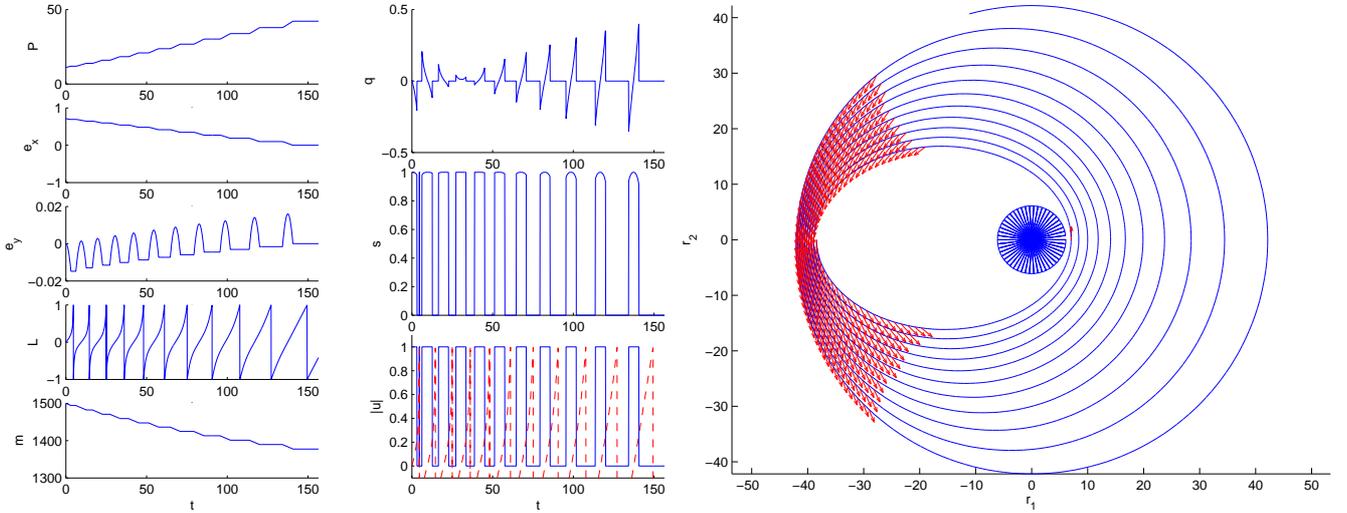


FIG. 5.6 – Evolution des états, stratégie de poussée et trajectoire pour les conditions initiales inférieures,  $c_{L^f} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

entre les transferts.

La différence la plus importante est qu'il n'y a plus de poussées sur les derniers périhéliees. On pourrait même croire qu'il n'y a plus du tout de poussée sur les périhéliees, ce qui est faux.

En effet, en regardant avec plus de soins, on remarque l'existence d'une toute petite poussée sur le premier périhéliee. Celle-ci n'est pas due à une localité de la solution puisqu'on la retrouve même en résolvant le problème avec  $t^f$  et  $L^f$  fixés. On pourrait alors penser que cette poussée vient du fait que le  $c_{L^f}$  fixé n'est pas assez important.

Cependant, si on fait le test pour des  $c_{L^f}$  de plus en plus grands, on ne constate pas du tout de disparition de cette poussée mais au contraire une apparition d'autres poussées sur les premiers périhéliees. Chose encore plus surprenante est le fait que ces poussées aux périhéliees ne sont pas inversées par rapport à celles des apogées, ce qui a pour conséquence de ne pas faire décroître le paramètre mais de faire croître l'excentricité. En effet, aux périhéliees on a (cf. chapitre 1, la dynamique) :

$$\begin{cases} h_{x,y} = 0 \\ e_y \approx 0 \\ L \approx \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \sin L \approx 0 \\ \cos L \approx 1 \\ W \approx 1 + e_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{P} \text{ est du signe de } u_2 \\ \dot{e}_x \text{ est du signe de } u_2 \\ \dot{e}_y \text{ est du signe de } -u_1 \end{cases}$$

d'où la croissance de  $P$  et  $e_x$  puisque la poussée ortho-radiale est positive et importante.

Ceci à pour effet une croissance plus rapide de l'altitude de l'apogée probablement dans le but de rapprocher celle-ci de l'altitude géostationnaire.

Afin de vérifier cette hypothèse, on peut tracer l'évolution de l'altitude de l'apogée au cours du transfert et ce pour plusieurs  $c_{Lf}$ . Cette évolution est représentée à la figure 5.7.

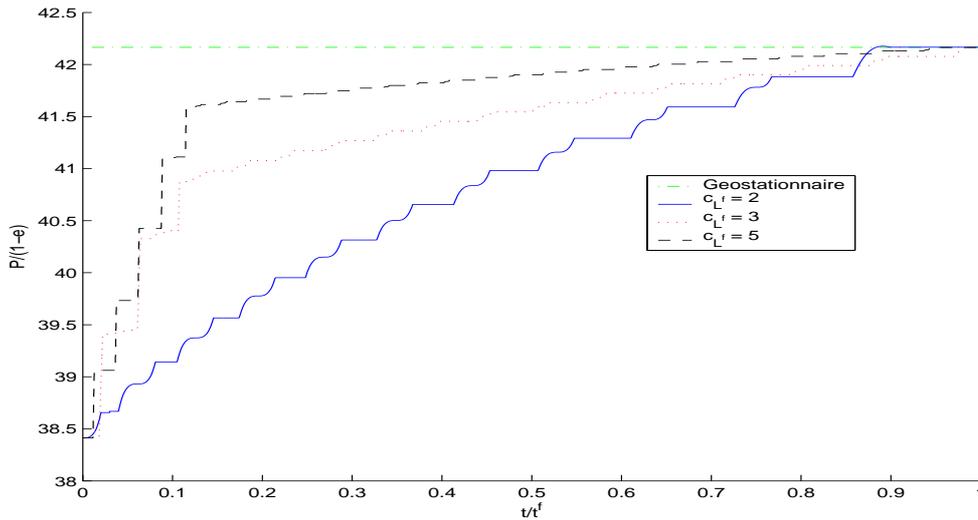


FIG. 5.7 – Evolution de l'altitude de l'apogée pour les conditions initiales 5% inférieures et plusieurs  $c_{Lf}$ .

Tout d'abord, faisons remarquer que plus le  $c_{Lf}$  est élevé, plus le transfert est efficace en terme de consommation. De plus sur toutes les évolutions de l'altitude de l'apogée, celle-ci se termine sur la valeur de l'altitude géostationnaire ce qui est tout à fait normal.

On peut voir que proportionnellement parlant, plus le transfert est efficace, plus l'élévation de l'altitude de l'apogée est concentrée sur le début du transfert. En effet, cette élévation est beaucoup plus régulière pour  $c_{Lf} = 2$  que pour  $c_{Lf} = 3$  ou 5. Or les élévations les plus efficaces se font aux périgées par l'intermédiaire d'une faible augmentation combinée de l'excentricité et du paramètre. Il peut paraître étonnant d'augmenter l'excentricité alors que le but final est d'avoir une orbite circulaire, mais il semblerait que pour que le transfert soit le plus efficace possible, l'essentiel est d'avoir une altitude de l'apogée la plus proche possible de l'altitude géostationnaire. Ceci sera vérifié dans la section suivante où nous considérerons des conditions initiales relativement éloignées des conditions nominales.

### Cas impulsional

Comme pour le chapitre précédent, on peut s'interroger sur les similitudes entre les transferts que l'on vient de présenter et leurs homologues

du cas impulsif. Une telle comparaison avait déjà relevée une grande ressemblance entre le transfert nominal continu et impulsif (cf. chapitre précédent, section consacrée au traitement des minima locaux).

Il serait alors bon de vérifier si ces similitudes se retrouvent sur les trois transferts que nous venons de présenter en commençant par une comparaison portant sur le transfert coplanaire avec forme nominale de l'orbite initiale. Rappelons que le transfert impulsif utilisé utilise deux manœuvres (son calcul est donné à l'annexe C).

Pour le transfert coplanaire nominal, le tableau 5.2 donne la répartition apogée/périgée, la répartition directionnelle (dans le repère ortho-radial  $(q, s)$ ) dans les deux cas.

Cas	Poussées aux apogées			Poussées aux périgées			$m^f$ (kg.)
	%	$q$	$s$	%	$q$	$s$	
Impulsif	94.93	0.	1	5.07	0.	-1	1391.717
10 $N$ ; $c_{Lf} = 2$	92.63	0.01	0.99	7.37	0.10	-0.98	1382.829
10 $N$ ; $c_{Lf} = 10$	94.79	5.e-3	0.99	5.21	-6.e-3	-0.99	1391.383
1 $N$ ; $c_{Lf} = 5$	95.03	0.02	0.99	4.97	-0.02	-0.99	1390.411

TAB. 5.2 – *Transfert coplanaire nominal : cas impulsif et continu.*

On constate qu'on retrouve tout d'abord la masse finale qui est du même ordre pour le cas impulsif et le cas continu avec grand  $c_{Lf}$  ce qui ne fait que confirmer notre intuition voulant que le cas limite du continu est l'impulsif (pour la masse finale).

Cette opinion est d'ailleurs encore plus confortée en ce qui concerne la répartition des poussées entre apogées et périgées qui est tout à fait du même ordre dans tous les cas, même celui avec un  $c_{Lf}$  relativement faible. La même remarque s'applique aux directions de poussées mis à part que la direction radiale est tout de même plus présente dans le cas continu que dans l'impulsif.

De plus, comme indiqué au chapitre précédent, on retrouve les inversions de directions de poussée entre les apogées et les périgées puisque pour le cas impulsif la direction est positive sur  $s$  à l'apogée et négative au périgée.

Vérifions maintenant que les mêmes remarques peuvent être appliquées au transfert dont le couple  $(P^0, e_x^0)$  est de 5% supérieures au couple nominal. Le tableau 5.3 donne la comparaison entre le cas impulsif et quelques cas continus.

On remarque encore une fois la cohérence des masses finales. On constate de plus qu'on retrouve la part plus importante de poussées sur les périgées qui semble être d'environ 16% pour ce transfert.

Cas	Poussées aux apogées			Poussées aux périgées			$m^f$ (kg.)
	%	$q$	$s$	%	$q$	$s$	
Impulsionnel	84.18	0	1	15.82	0	-1	1393.769
10 $N$ ; $c_{Lf} = 2$	82.76	0.03	0.99	17.24	0.02	-0.96	1383.845
10 $N$ ; $c_{Lf} = 10$	84.20	4.e-3	0.99	15.80	-5.e-3	-0.99	1393.419
1 $N$ ; $c_{Lf} = 5$	82.79	0.02	0.99	17.21	-0.02	-0.99	1392.350

TAB. 5.3 – *Transfert coplanaire, conditions initiales 5% supérieures aux nominales : cas impulsionnel et continu.*

Sinon, on peut appliquer les mêmes remarques que précédemment.

Finissons alors par une comparaison pour le transfert avec conditions initiales 5% inférieures aux conditions nominales. Cette comparaison est donnée par le tableau 5.4.

Cas	Poussées aux apogées			Poussées aux périgées			$m^f$ (kg.)
	%	$q$	$s$	%	$q$	$s$	
Impulsionnel	95.73	0	1	4.27	0	1	1385.209
10 $N$ ; $c_{Lf} = 2$	99.99	0.01	0.99	0.01	8.e-8	1.	1377.562
10 $N$ ; $c_{Lf} = 10$	95.18	1.e-3	0.99	4.82	8.e-3	0.99	1384.863
1 $N$ ; $c_{Lf} = 5$	94.58	2.e-3	0.99	5.42	0.03	0.97	1383.905

TAB. 5.4 – *Transfert coplanaire, conditions initiales 5% inférieures aux nominales : cas impulsionnel et continu.*

Encore une fois, on a correspondance entre le transfert impulsionnel et le transfert continu. Cette correspondance se voit tout d'abord sur la masse finale mais également sur les directions de poussées, la répartition des poussées entre apogée et périgée et plus important sur l'ordre des poussées. Cette similitude n'est cependant observable que pour les cas continus avec un  $c_{Lf}$  relativement important. Ceci découle d'une remarque faite au moment de la présentation de la stratégie de poussée qui disait que les poussées sur les périgées n'apparaissaient que pour des  $c_{Lf}$  relativement élevés alors que pour de faibles  $c_{Lf}$  il n'y a quasiment pas de poussées sur les périgées (d'où le 1% de poussée sur les périgées pour 10  $N$  et  $c_{Lf} = 2$ ).

Nous reprendrons les comparaisons avec le cas impulsionnel pour les transferts qui seront présentés dans la suite de ce chapitre, mais pour l'instant intéressons nous à une autre étude de sensibilité.

Pour finir avec la sensibilité de notre transfert par rapport à ses conditions initiales, nous allons rapidement étudier l'influence de l'inclinaison de l'orbite initiale.

### Sensibilité par rapport à l'inclinaison

Comme on fait une étude de sensibilité, on ne va encore une fois considérer que de faibles variations (au plus  $1^\circ$ ) par rapport à l'inclinaison nominale (de  $7^\circ$ ). Pour une étude avec des variations importantes, nous renvoyons le lecteur à la fin de ce chapitre.

Commençons par observer l'influence de l'inclinaison sur le temps de transfert et la longitude finale minimum. Le tableau 5.5 résume les résultats.

Inclinaison	$t_{min}^f$ (h.)	$m(t_{min}^f)$ (kg.)	$L_{min}^f$ (rad.)
$6^\circ$	84.989	1343.593	29.857
$6.5^\circ$	85.114	1343.363	29.883
$7^\circ$	85.249	1343.115	29.911
$7.5^\circ$	85.390	1342.855	29.939
$8^\circ$	85.543	1342.574	29.970

TAB. 5.5 –  $t_{min}^f$ ,  $m(t_{min}^f)$  et  $L_{min}^f$  en fonction de l'inclinaison.

On peut voir qu'une faible variation d'inclinaison n'a pas une grande influence sur le transfert. De plus la variation de  $t_{min}^f$  et  $L_{min}^f$  suit celle de l'inclinaison c'est-à-dire qu'ils diminuent avec celle-ci (et augmentent avec elle).

Ceci se retrouve sur les stratégies de poussées et l'évolution des états qui ne diffèrent qu'imperceptiblement pour les variations de l'inclinaison considérées.

Il semble donc que l'inclinaison n'a pas de grande influence sur le transfert ce qui est confirmé par l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  pour différentes inclinaisons. Cette évolution est donnée par la figure 5.8.

Le fait que les  $L_{min}^f$  des trois inclinaisons soient très proches légitime l'emploi de  $c_{Lf}$  plutôt que de  $t^f$  pour tracer l'évolution (pour avoir une courbe plus lisse mais toujours aussi significative).

On peut constater que la différence entre les trois inclinaisons reste très faible. De plus, c'est bien l'inclinaison la plus faible ( $6^\circ$ ) qui donne la meilleure masse finale alors que l'inclinaison la plus élevée donne la plus grande consommation.

Les différences induites sur les stratégies de poussées et les trajectoires sont elles aussi faibles, raison pour laquelle nous ne faisons pas de compa-

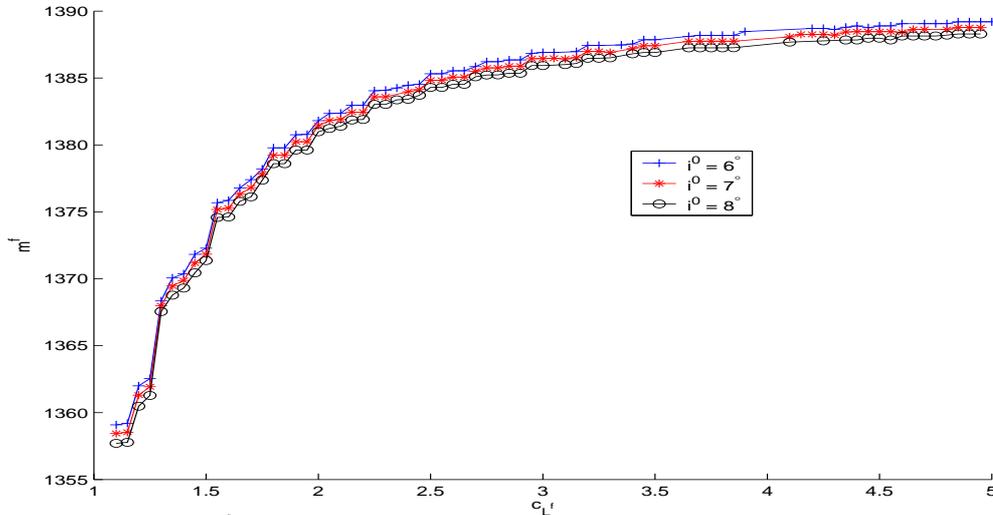


FIG. 5.8 –  $m^f$  vs.  $c_{L^f}$  pour trois inclinaisons différentes (6, 7 et 8 degrés) et  $T_{max} = 10N$ .

raison entre les différents transferts. La même remarque nous pousse à ne pas présenter de comparaison avec le cas impulsif.

Pour que l'inclinaison ait une véritable influence sur le transfert, il faudrait donc qu'elle soit beaucoup plus importante. Nous vérifierons cette affirmation à la fin de ce chapitre.

En attendant, étudions le comportement de notre transfert pour des conditions initiales sur l'orbite relativement éloignées des conditions nominales.

## 5.2 Grandes variations

Dans cette section, on s'intéresse au comportement des transferts confrontés à des conditions initiales assez éloignées des conditions nominales.

Ceci nous sert d'une part à valider notre méthode de résolution pour un large éventail de transfert GTO-GEO et d'autre part à dégager les particularités de notre transfert nominal. On pourra également vérifier que nos lois empiriques restent vraies et que la comparaison avec le cas impulsif reste toujours valide.

Sauf pour l'étude d'orbites fortement inclinées, on ne considère que des transferts coplanaires. On fera alors varier la forme de l'orbite, c'est-à-dire son paramètre et son excentricité. Pour la variation de l'excentricité on laissera  $e_y^0$  nul et on fera uniquement varier  $e_x^0$  puisque l'orientation de l'orbite initiale n'a vraisemblablement qu'une très faible influence sur le transfert à poussée faible.

Nous commençons par étudier un transfert coplanaire de même paramètre que le paramètre nominal et dont l'excentricité est diminuée d'un tiers.

**Premier jeu :**  $(P^0, e_x^0) = (11.625 \text{ Mm}, 0.5)$

Nous prenons ce jeu de conditions initiales car elles impliquent une orbite initiale dont l'apogée possède une altitude deux fois moindre que l'altitude de l'orbite géostationnaire. Il est alors intéressant d'étudier quels seront les changements induits par une telle orbite initiale.

Avant d'étudier la maximisation de la masse finale, il nous faut étudier le transfert en temps et en longitude finale minimums.

**Transferts en temps et longitude finale minimums**

Le tableau 5.6 donne les temps et les longitudes finales minimums pour différents  $T_{max}$ .

$T_{max}$ (N.)	$t_{min}^f$ (h.)	$T_{max} * t_{min}^f$	$L_{min}^f$ (rad.)	$(L_{min}^f - L^0) * T_{max}$
10.	98.095	980.950	62.420	592.784
5.	195.546	977.730	122.202	595.302
2.	493.132	986.263	300.467	594.652

TAB. 5.6 –  $t_{min}^f$  et  $L_{min}^f$  pour le premier jeu de conditions initiales et différents  $T_{max}$ .

On peut voir qu'on garde à peu près l'indépendance des produits  $t_{min}^f T_{max}$  et  $(L_{min}^f - L^0) T_{max}$  déjà relevée pour notre transfert nominal. Les valeurs observées pour ce dernier sont résumées dans le tableau 5.7.

$T_{max}$ (N.)	$t_{min}^f$ (h.)	$T_{max} * t_{min}^f$	$L_{min}^f$ (rad.)	$(L_{min}^f - L^0) * T_{max}$
10.	84.270	842.704	29.698	265.569
5.	167.467	837.335	56.375	266.166
2.	418.096	836.193	137.032	267.781

TAB. 5.7 –  $t_{min}^f$  et  $L_{min}^f$  pour le cas nominal coplanaire et différents  $T_{max}$ .

Le temps de transfert minimum est approximativement 15% supérieur à celui du transfert nominal. Ceci est compréhensible par le fait que ce qui importe pour le temps de transfert est plus le changement à effectuer sur le

demi-grand axe que celui à effectuer sur l'excentricité ou le paramètre. Et en effet, la valeur du demi-grand axe du cas nominal est :

$$a_{\text{nominale}}^0 = P^0 / (1 - e^{0^2}) \approx 26.571 \text{ Mm.}$$

alors que pour notre jeu de conditions initiales on a :

$$a_{\text{jeu1}}^0 = 15.5 \text{ Mm.}$$

On a alors bien que le changement à effectuer sur le demi-grand axe est plus important dans le cas du premier jeu de conditions initiales que dans le cas nominal.

Pour ce qui est de la longitude finale minimum, elle augmente beaucoup plus que le temps et son augmentation est d'approximativement 120%. Comme le temps de transfert n'augmente pas dans les mêmes proportions, on en conclut que les premières révolutions sont très rapides du fait de la faible excentricité.

Pour confirmer cette remarque, voyons une stratégie de poussée et une trajectoire en temps minimum pour ce premier jeu de conditions initiales. Cette stratégie et cette trajectoire sont représentées à la figure 5.9.

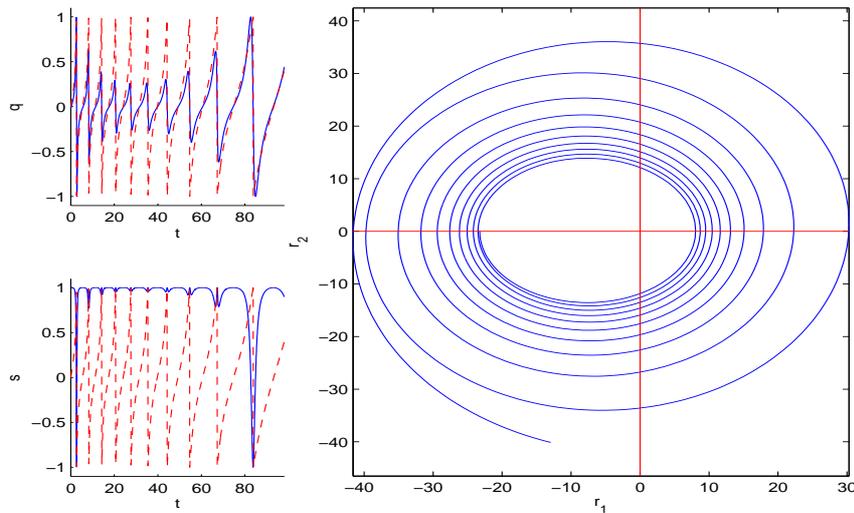


FIG. 5.9 – *Stratégie de poussée et trajectoire en temps minimum pour le premier jeu de conditions initiales et  $T_{\text{max}} = 10N$ .*

On peut voir qu'en effet, les premières révolutions sont assez similaires entre elles alors que pour le transfert nominal on peut constater une rapide évolution de ces orbites.

De plus, la stratégie de poussée possède des inversions de la poussée ortho-radiale beaucoup moins importantes que dans le cas nominal (cf. figure 5.2).

Tout cela laisse présager quelques changements sur le transfert en masse finale maximum, ce qui est fait au paragraphe suivant.

### Transfert à masse finale maximum

Comme dans la première section, on utilise la formulation non autonome pour la résolution et ce sera le cas dans toute la suite du chapitre.

La première chose à vérifier est si l'évolution de la masse finale est de la même forme que dans le cas nominal. L'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  est représentée à la figure 5.10.

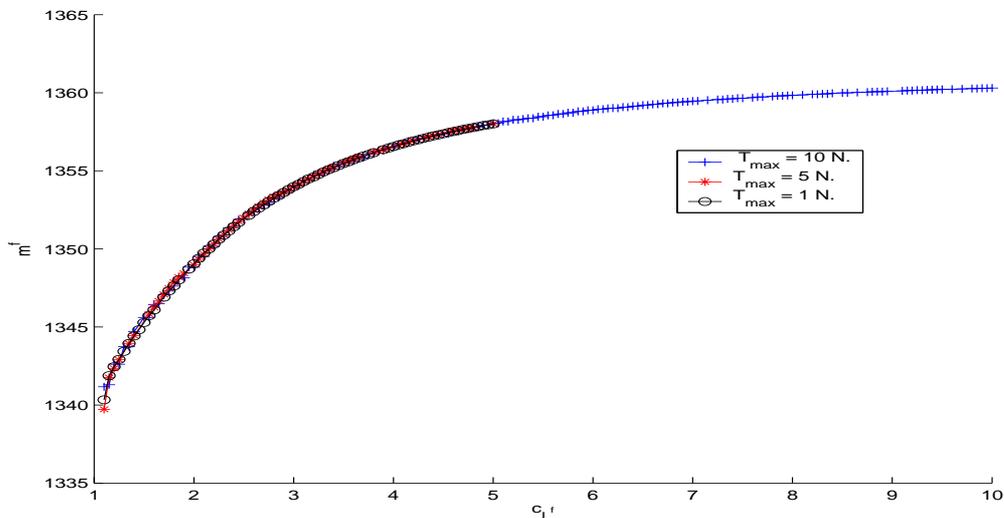


FIG. 5.10 –  $m^f$  vs.  $c_{Lf}$  pour le premier jeu de conditions initiales et plusieurs  $T_{max}$ .

Tout d'abord on garde l'indépendance empirique de  $m^f$  en fonction de  $T_{max}$  pour un  $c_{Lf}$  donné. Le gain principal de consommation est également réalisé pour les premiers  $c_{Lf}$  bien que la croissance de  $m^f$  semble moins brusque que dans le cas nominal.

Comme on pouvait s'y attendre au vu des résultats de la minimisation du temps de transfert, la consommation est moins bonne pour notre jeu de conditions initiales que pour le transfert nominal. En effet, comme pour la minimisation du temps de transfert la consommation du premier jeu est approximativement 15% supérieure à celle du cas nominal on pouvait difficilement s'attendre à ce que la minimisation de la consommation donne des résultats similaires en terme de consommation.

Par contre, la masse finale limite semble être ici d'environ 1360 kg ce qui, si nous supposons que la masse finale optimale pour notre transfert nominal est de 1390 kg, donne une consommation 27% supérieure.

On en conclut que la forte excentricité de notre orbite initiale nominale est une bénédiction en ce qui concerne la maximisation de la masse finale.

On note de plus que la relation entre  $c_{tf}$  et  $c_{Lf}$  reste linéaire et indépendante de  $T_{max}$ , avec ici  $c_{tf} \approx 0.97c_{Lf} + 0.09$ .

Voyons maintenant quels sont les changements concernant les stratégies de poussées et l'évolution des états qui sont représentés à la figure 5.11.

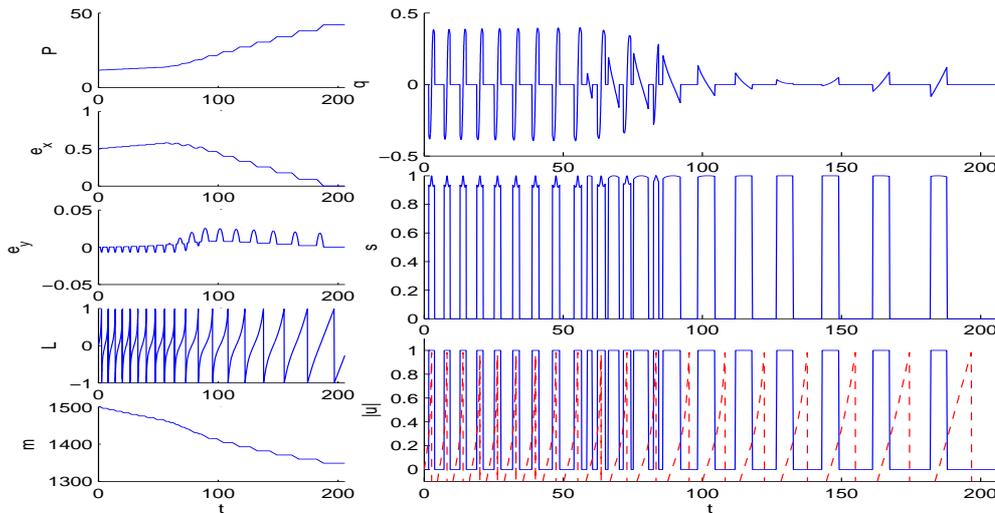


FIG. 5.11 – Stratégie de poussée et évolution de états pour le premier jeu de conditions initiales,  $c_{Lf} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

Sur la stratégie de poussée, on peut tout d'abord voir que toutes les premières poussées sont sur des périhéliees jusqu'à un bon tiers du temps de transfert. De plus ces poussées sur les périhéliees ont la même direction que les suivantes sur les apogées. On note qu'un tel phénomène a déjà été observé dans la première section de ce chapitre. Cependant, il était moins marqué puisque les conditions initiales restaient assez proches des nominales.

Ces poussées aux périhéliees ont pour effet d'augmenter l'excentricité et dans une moindre mesure le paramètre de l'orbite. L'hypothèse faite à propos de nos premières observations (cf. section précédente) semble être la bonne. Rappelons qu'on avait interprété cette augmentation de l'excentricité comme une tentative pour rapprocher l'altitude de l'apogée de celle de l'orbite géostationnaire le plus rapidement possible.

De plus, on peut constater qu'on n'a plus du tout de poussées sur les derniers périhéliees et donc que le paramètre est tout le temps croissant (sans diminution à la fin du transfert).

On peut aussi constater que les premières révolutions sont très rapides du fait de l'augmentation de l'excentricité non accompagnée d'une augmentation du paramètre. Ceci est également visible sur le graphe de la trajectoire

qui est donnée par la figure 5.12.

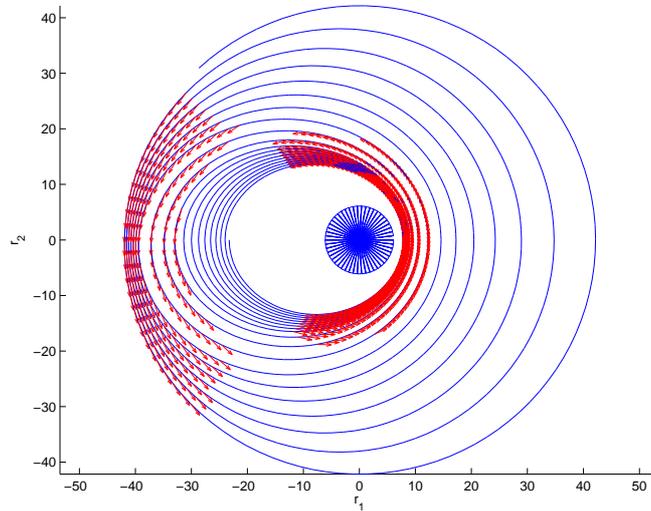


FIG. 5.12 – Trajectoire pour le premier jeu de conditions initiales,  $c_{Lf} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

On voit bien les premières poussées centrées sur les périées et les dernières sur les apogées. De plus les premières révolutions se font bien sur des orbites de plus en plus excentriques puisque les premiers périées sont quasiment confondus.

Vérifions maintenant jusqu'à quel point nous pouvons nous permettre de faire une analogie avec le cas impulsif. Le tableau 5.8 donne une comparaison entre le cas impulsif et quelques cas continus.

Cas	Poussées aux apogées			Poussées aux périées			$m^f$ (kg.)
	%	$q$	$s$	%	$q$	$s$	
Impulsif	71.66	0	1	28.34	0	1	1361.192
$10 N ; c_{Lf} = 2$	81.42	0.01	0.98	18.58	5.e-3	0.97	1348.830
$10 N ; c_{Lf} = 10$	66.23	1.e-3	0.99	33.77	0.01	0.99	1360.303
$1 N ; c_{Lf} = 5$	58.28	1.e-3	0.99	41.72	0.04	0.98	1358.002

TAB. 5.8 – Transfert coplanaire, premier jeu de conditions initiales : cas impulsif et continu.

Il est important de noter que pour le cas impulsif, la première impulsion n'a pas lieu sur un apogée mais sur un périée. On retrouve donc la structure du cas continu avec ses premières poussées uniquement sur les

périgées.

De plus, la première impulsion donne une orbite intermédiaire avec un paramètre valant environ 13.09  $Mm$  et d'excentricité valant environ 0.69 ce qui correspond tout à fait à l'évolution des états déjà présentés.

On retrouve également la cohérence des masses finales et les directions de poussées. Par contre la répartition des poussées entre apogées et périgées est très peu stable par rapport à  $c_{Lf}$ . Ceci est sans doute à rapprocher avec l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  qui est moins croissante que pour le cas nominale. On en conclut que les stratégies de poussées optimales ont besoin de  $c_{Lf}$  plus important que dans le cas nominal pour se mettre en place de façon stable.

Nous allons maintenant étudier un second jeu de conditions initiales.

**Second jeu :**  $(P^0, e_x^0) = (20 Mm, 0.75)$

On considère ce transfert coplanaire car il correspond à une altitude d'apogée initiale (80  $Mm$ .) bien supérieure à celle de l'orbite géostationnaire. De plus le demi-grand axe (45.7  $Mm$ .) est quant à lui assez proche de celui de l'orbite géostationnaire (42.165  $Mm$ .).

Commençons par quelques vérifications sur le temps et la longitude de transfert minimums.

### Transferts en temps et longitude finale minimums

Le tableau 5.9 donne les temps et longitudes finales minimums pour différentes poussées.

$T_{max}$ (N.)	$t_{min}^f$ (h.)	$T_{max} * t_{min}^f$	$L_{min}^f$ (rad.)	$(L_{min}^f - L^0) * T_{max}$
10.	65.849	658.491	16.349	132.076
5.	131.134	655.668	31.0659	139.621
2.	336.109	672.219	73.036	139.790

TAB. 5.9 –  $t_{min}^f$  et  $L_{min}^f$  pour le second jeu de conditions initiales et différents  $T_{max}$ .

On remarque que le temps et la longitude finale minimums sont plus faibles que pour le transfert nominal (cf. tableau 5.7) ce qui tendrait à confirmer que c'est le changement de demi-grand axe à effectuer qui est le bon critère pour estimer le coût d'un transfert (au moins en terme de temps et longitude finale).

Par contre on s'aperçoit que l'indépendance des produits  $t_{min}^f T_{max}$  et  $(L_{min}^f - L^0) T_{max}$  semble moins bien vérifiées que pour les transferts précédem-

ment étudiés. Il se peut cependant que ces légères variations du produit soient dues à des minima locaux parasites. De plus comme la longitude finale est relativement faible pour  $10 N$ , il ne faudrait pas tenir compte de la valeur du produit en ce  $T_{max}$  car il ne comporte pas assez de révolutions. En effet, l'indépendance du produit est plutôt à voir comme une proportionnalité entre le nombre minimum de révolutions et la poussée (et dans ce cas on a bien le respect de l'indépendance du produit).

Observons rapidement une stratégie de poussée et l'évolution des états pour un transfert en temps minimum. Ceci est représenté à la figure 5.13.

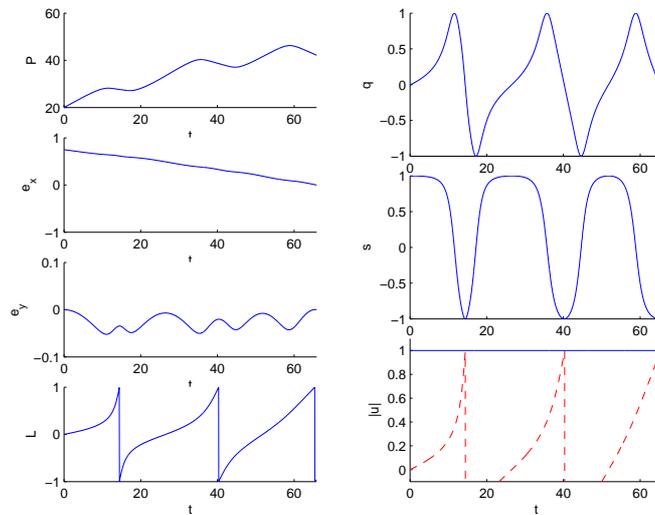


FIG. 5.13 – Evolution des états et stratégie de poussée pour le transfert en temps minimum avec le second jeu de conditions initiales et  $T_{max} = 10N$ .

On retrouve la stratégie de notre transfert nominal si on excepte que le transfert est ici plus rapide. En effet, les deux composantes du contrôle sont très régulières et l'excentricité décroît de façon également régulière.

La seule différence vient de l'évolution du paramètre de l'orbite qui est franchement décroissant aux passages aux périhéliees.

Intéressons nous maintenant à la maximisation de la masse finale.

### Maximisation de la masse finale

L'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  est représentée à la figure 5.14.

Comme on s'y attendait, on garde l'indépendance empirique de  $m^f$  en fonction de  $T_{max}$  pour un  $c_{Lf}$  donné.

La croissance de  $m^f$  est ici très brusque, encore plus que pour notre transfert nominal. De plus, la masse finale limite est très élevée car elle semble être d'au moins  $1410 \text{ kg}$ . Rappelons que dans le cas nominal elle est d'envi-

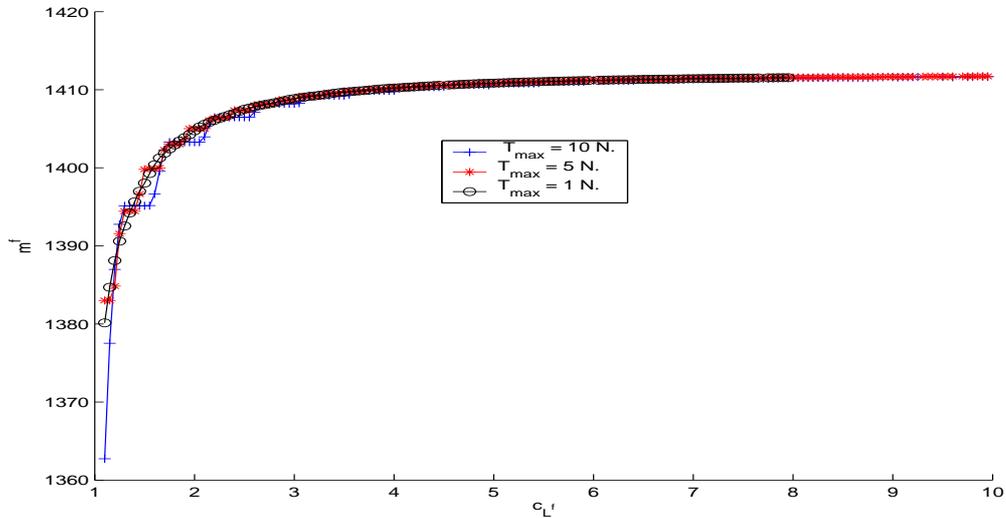


FIG. 5.14 –  $m^f$  vs.  $c_{L^f}$  pour le second jeu de conditions initiales et plusieurs  $T_{max}$ .

ron 1390 kg. Ceci nous permet de conclure définitivement sur l'importance de la différence entre le demi-grand axe initial et le terminal.

On note de plus qu'on garde la relation linéaire entre  $c_{t^f}$  et  $c_{L^f}$  et qu'elle semble toujours indépendante de  $T_{max}$ .

Voyons quelle est l'évolution et la stratégie de poussée pour ce problème. La figure 5.15 donne ces informations.

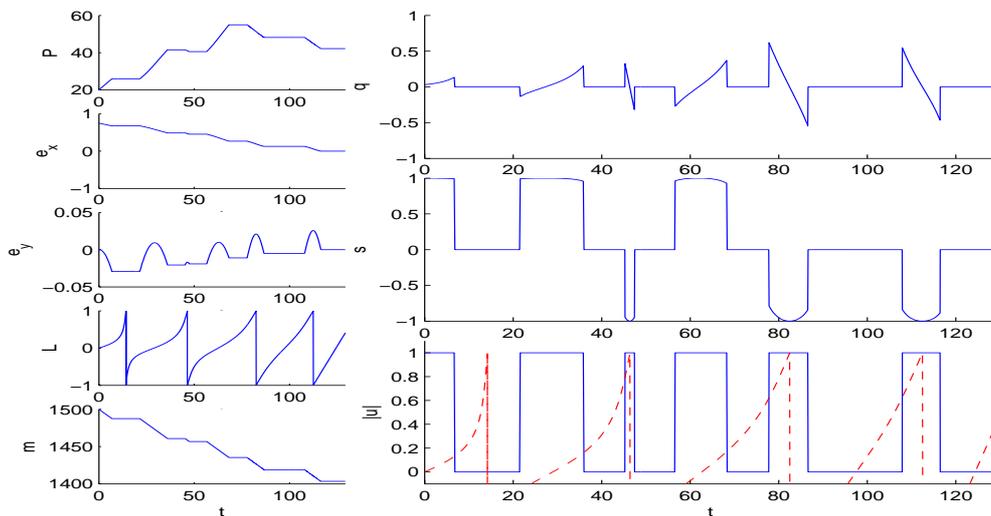


FIG. 5.15 – Stratégie de poussée et évolution des états pour le second jeu de conditions initiales,  $c_{L^f} = 2$  et  $T_{max} = 10\text{ N}$ .

On constate que le paramètre augmente beaucoup (plus de 50 Mm)

pour décroître fortement à la fin du transfert. Cette décroissance est comme d'habitude assurée par des poussées inversées sur les derniers périgées.

A propos des poussées aux périgées, elles sont dans notre cas presque aussi importantes que celles aux apogées. (37% de poussée sur les périgées contre 63% sur les apogées). De plus ces poussées se trouvent sur trois quart des périgées. On ne peut donc clairement plus parler de poussées parasites, leur utilité étant indéniable.

En ce qui concerne l'excentricité, elle décroît de façon tout à fait régulière.

A titre indicatif, on présente à la figure 5.16 la trajectoire correspondant à la stratégie précédente.

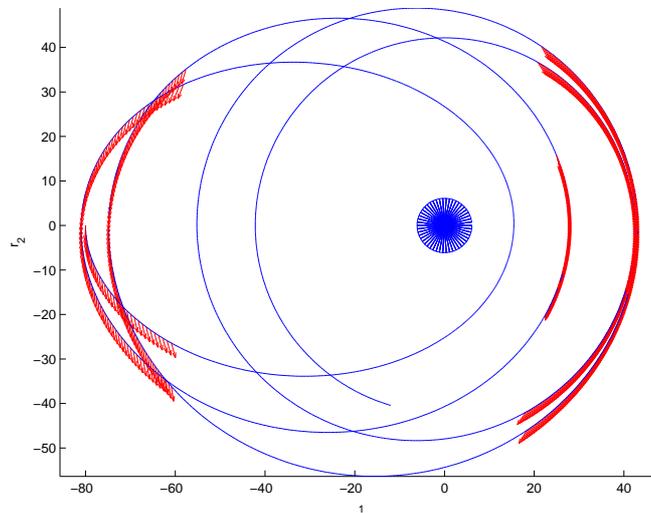


FIG. 5.16 – Trajectoire pour le second jeu de conditions initiales,  $c_{L_f} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

On retrouve bien entendu la répartition des poussées observée précédemment.

On peut également voir que l'altitude initiale de l'apogée est bien supérieure à celle de l'orbite géostationnaire et donc que ce n'est pas elle qui influence le plus le transfert mais bien le demi-grand axe.

Intéressons nous maintenant à la comparaison avec le cas impulsionnel. Cette dernière est donnée au tableau 5.10.

Tout d'abord, on note la cohérence des masses finales qui encore une fois tend à légitimer notre intuition selon laquelle la consommation limite du cas continu est celle du cas impulsionnel.

De plus, la répartition des poussées entre périgées et apogées ainsi que la direction de ces poussées montre de grandes similitudes. On note que contrairement au premier jeu de conditions initiales, la structure du cas

Cas	Poussées aux apogées			Poussées aux périgées			$m^f$ (kg.)
	%	$q$	$s$	%	$q$	$s$	
Impulsionnel	62.45	0	1	37.55	0	-1	1412.010
10 $N$ ; $c_{Lf} = 2$	62.77	0.05	0.99	37.23	0.03	-0.95	1403.284
10 $N$ ; $c_{Lf} = 10$	61.92	4.e-3	0.99	38.08	-2.e-3	-0.99	1411.662
1 $N$ ; $c_{Lf} = 5$	60.07	0.01	0.99	39.93	-0.02	-0.99	1410.853

TAB. 5.10 – *Transfert coplanaire, second jeu de conditions initiales : cas impulsionnel et continu.*

continu coïncide, dès les faibles  $c_{Lf}$ , avec celle du cas continu. On peut encore une fois expliquer ceci par la très forte croissance (sur les premiers  $c_{Lf}$ ) de la courbe de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  qui reflète le fait que la mise en place de la stratégie de poussée optimale ne nécessite pas une grande allocation de temps de transfert supplémentaire.

Etudions maintenant un troisième jeu de conditions initiales.

**Troisième jeu :**  $(P^0, e_x^0) = (20 \text{ } Mm, 0.5)$

On utilise ce jeu de conditions initiales pour finir de nous convaincre que c'est bien le demi-grand axe qui est important et non l'altitude. En effet, l'altitude initiale (40  $Mm$ .) de notre jeu de conditions initiales est très proche de l'altitude de l'orbite géostationnaire alors que le demi-grand axe en est un peu plus éloigné. On devrait donc avoir un transfert moins efficace que le précédent mais tout de même plus performant que le transfert nominal.

Commençons donc par quelques observations sur le temps et la longitude finale de transfert.

### Transferts en temps et longitude finale minimums

Le tableau 5.11 résume les résultats obtenus pour ce troisième jeu de conditions initiales.

$T_{max}$ (N.)	$t_{min}^f$ (h.)	$T_{max} * t_{min}^f$	$L_{min}^f$ (rad.)	$(L_{min}^f - L^0) * T_{max}$
10.	60.586	605.865	24.082	209.404
5.	120.971	604.853	44.398	206.282
2.	308.298	616.569	107.076	207.869

TAB. 5.11 –  $t_{min}^f$  et  $L_{min}^f$  pour le troisième jeu de conditions initiales et différents  $T_{max}$ .

Contrairement à ce que nous pensions, le temps de transfert minimum est meilleur que pour le cas précédent (cf. tableau 5.9). Cette différence n'est que de 10% mais présage d'un très bon comportement face à la minimisation de la consommation.

La longitude de transfert minimum est quant à elle très supérieure à celle du second jeu de conditions initiales.

La figure 5.17 représente l'évolution des états et la stratégie de poussée pour un transfert en temps minimum.

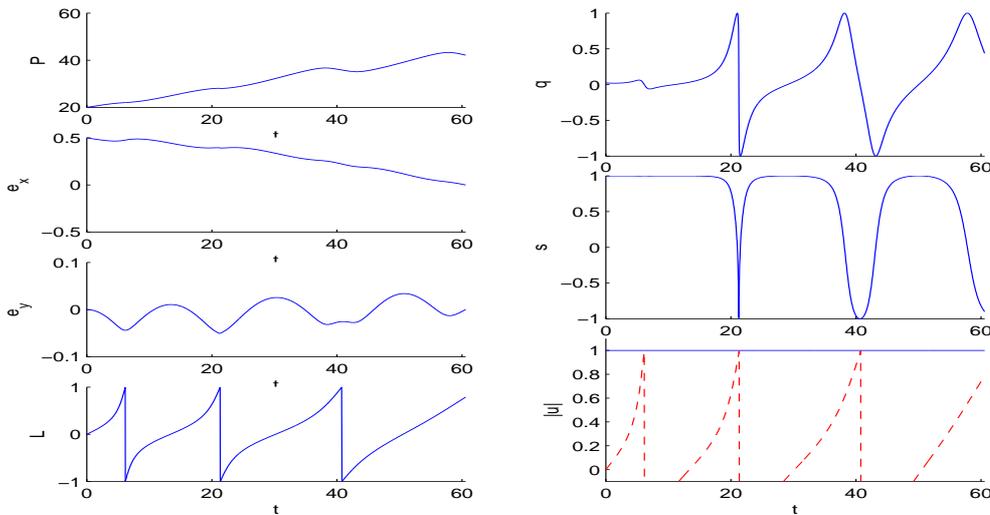


FIG. 5.17 – Evolution des états et stratégie de poussée pour un transfert en temps minimum avec le troisième jeu de conditions initiales et  $T_{max} = 10N$ .

Les stratégies de poussées et les évolutions des états pour le transfert en temps minimum n'ont rien de spécial. On note simplement qu'on retrouve les inversions de poussées aux péricées (sauf les tous premiers) et la faible décroissance du paramètre de l'orbite lors de ces inversions.

Passons à la maximisation de la masse finale.

### Maximisation de la masse finale

La figure 5.18 donne l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$ .

Le gain est ici encore plus brusque que pour le cas précédent. La masse finale limite semble être d'environ 1426 kg ce qui est véritablement très bon et de 15 kg supérieur au cas précédent.

On retrouve de plus toutes les lois empiriques déjà constatées.

La figure 5.19 représente l'évolution des états et la stratégie de poussée pour une solution.

On constate qu'il n'y a absolument aucune poussée sur les péricées et donc pas de décroissance du paramètre de l'orbite.

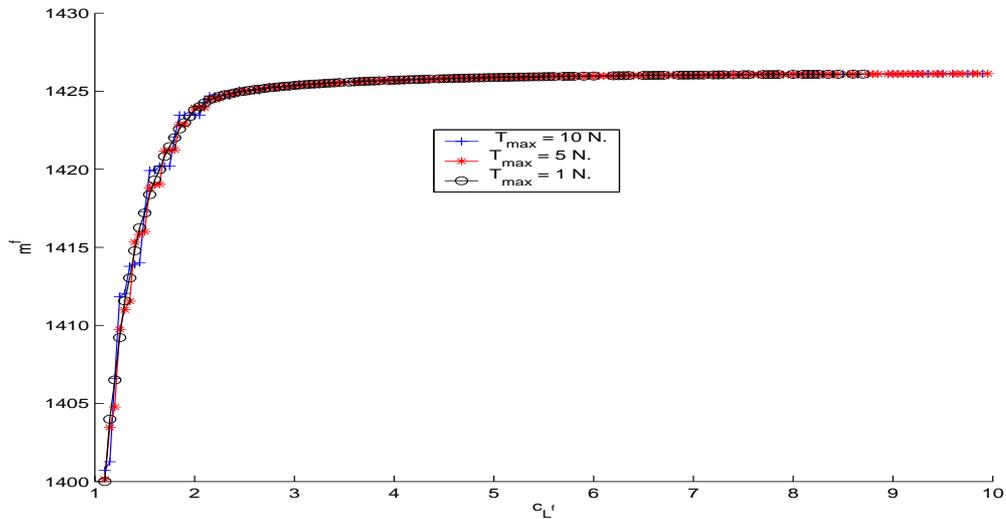


FIG. 5.18 –  $m^f$  vs.  $c_{L^f}$  pour le troisième jeu de conditions initiales et plusieurs  $T_{max}$ .

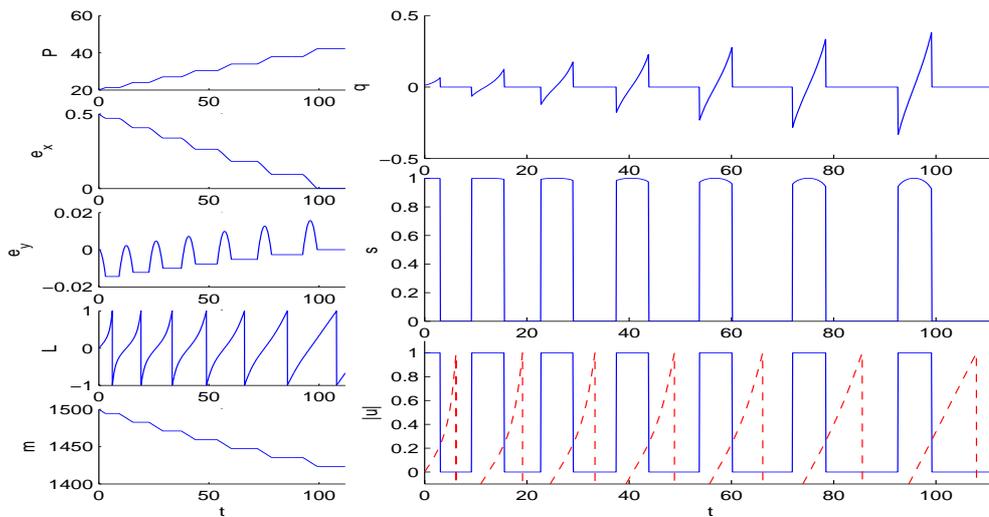


FIG. 5.19 – Stratégie de poussée et évolution de états pour le troisième jeu de conditions initiales,  $c_{L^f} = 2$  et  $T_{max} = 10N$ .

On peut cependant se demander si cette stratégie est stable quand on augmente le  $c_{L^f}$ . Vu que la masse finale obtenue pour  $c_{L^f} = 2$  ( $m^f = 1423.463$  kg) n'est guère éloignée de la masse finale limite (pour  $c_{L^f} = 10$  on a  $m^f = 1426.125$  kg) on pourrait raisonnablement penser qu'il n'apparaît pas de poussées sur les périgées.

Cependant, en faisant la comparaison habituelle avec le cas impulsionnel, on s'aperçoit que la stratégie impulsionnelle est décomposée en une première

Cas	Poussées aux apogées			Poussées aux périgées			$m^f$ (kg.)
	%	$q$	$s$	%	$q$	$s$	
Impulsionnel	95.60	0	1	4.40	0	1	1426.212
10 $N$ ; $c_{Lf} = 2$	100	2.e-2	0.99				1423.463
10 $N$ ; $c_{Lf} = 10$	95.43	-4.e-5	1.	4.57	0.03	0.99	1426.125
1 $N$ ; $c_{Lf} = 5$	95.76	2.e-3	0.99	4.24	0.01	0.99	1425.873

TAB. 5.12 – *Transfert coplanaire, troisieme jeu de conditions initiales : cas impulsionnel et continu.*

poussée sur un périgée et une seconde sur un apogée. Le tableau 5.12 donne une comparaison plus poussée.

On constate que la poussée impulsionnelle sur le périgée est de faible amplitude en comparaison de celle sur l'apogée. Mais cette répartition n'a cependant rien d'extraordinaire puisque nous avons déjà pu en observer de semblable (transfert nominal et premier jeu) mis à part que dans ces cas là, la première impulsion était sur un apogée.

L'orbite intermédiaire du transfert impulsionnel est de paramètre 20.260  $Mm$  et d'excentricité 0.520, c'est-à-dire que cette orbite est légèrement plus elliptique que l'orbite initiale. On remarque aussi que l'altitude de l'apogée de cette orbite intermédiaire est, au  $km$  près, celle de l'orbite géostationnaire. Si l'on trace la stratégie de poussée et l'évolution des états pour le cas continu avec un grand  $c_{Lf}$ , on retrouve la stratégie du transfert impulsionnel. Ceci est donc encore une fois un indice étayant notre intuition.

En ce qui concerne les masses finales, elles sont cohérentes, de même que les directions de poussées.

Pour clore l'étude de l'influence des grandes variations de la forme de l'orbite initiale sur le transfert, nous présentons le paragraphe suivant.

### Temps minimum pour de grandes variations

Nous ne faisons ici que des remarques d'ordre général et ne nous intéressons qu'au cas de la minimisation du temps de transfert car la maximisation de la masse finale demanderait un nombre exorbitant de tests numériques. Cependant, nous pouvons raisonnablement penser qu'un transfert étant meilleur qu'un autre en terme de temps minimum reste meilleur en terme de maximisation de la masse finale.

Nous donnons en premier lieu une courbe représentant le temps de transfert minimum en fonction de  $e_x^0$  et du demi-grand axe initial ( $a^0$ ) et ce pour un transfert coplanaire. Cette surface est celle de la figure 5.20.

Sur cette figure, nous avons  $(a^0, e_x^0) \in [20, 80] \times [0.1, 0.85]$ . Comme on

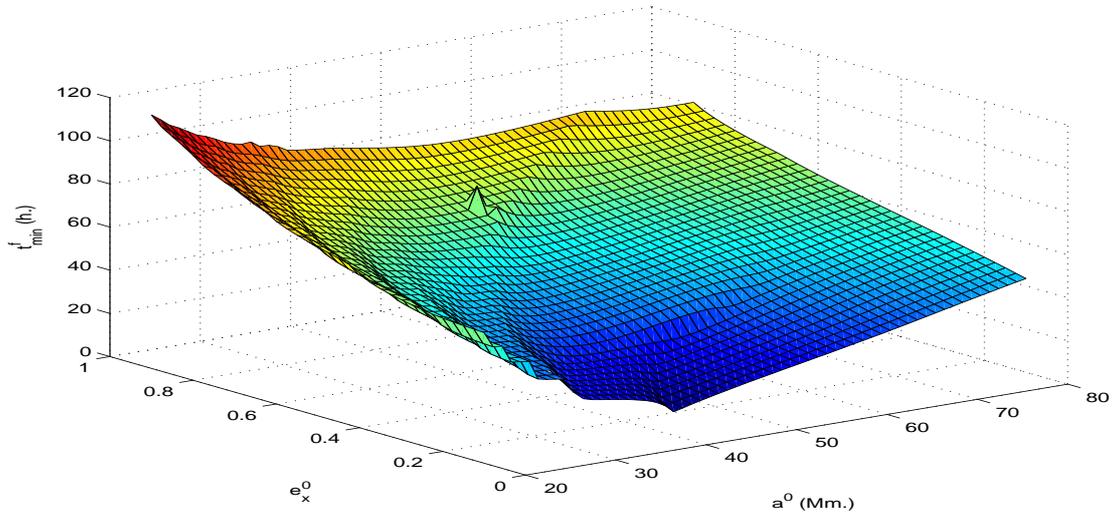


FIG. 5.20 –  $t_{min}^f$  vs.  $(a^0, e_x^0)$  pour de grandes variations de ce couple et  $T_{max} = 10 N$ .

pouvait s’y attendre, le plus petit  $t_{min}^f$  est obtenue pour une orbite initiale très proche de l’orbite géostationnaire (plus précisément pour  $(a^0, e_x^0) = (41, 0.1)$ ).

De plus, on peut voir que quelque soit le demi-grand axe initial, la meilleure excentricité est la plus faible, c’est-à-dire qu’à demi-grand axe égal, l’orbite initiale la plus favorable au transfert est la plus circulaire. Cette remarque n’est vrai que parce que le plus faible grand axe testé est de 20  $Mm$ . Si nous avions continué à diminuer  $a^0$ , on aurait probablement découvert une exception à cette règle.

Intéressons nous pour finir à l’évolution du temps de transfert minimum en fonction de  $(P^0, e_x^0)$ . La figure 5.21 nous donne cette évolution pour  $(P^0, e_x^0) \in [15, 50] \times [0.1, 0.85]$ .

Comme pour l’évolution en fonction du demi-grand axe, on peut constater que celle en fonction du paramètre est très régulière et le semble même plus que pour la figure 5.20.

On a encore un minimum du temps de transfert pour  $e_x^0 = 0.1$  et  $P^0$  proche de celui de l’orbite géostationnaire ( $P^0 = 41 Mm$  pour être plus précis). Par contre, pour  $P^0$  fixé, la meilleure orbite n’est pas toujours la plus circulaire comme on peut le voir pour  $P^0 = 15 Mm$  où la meilleure orbite est au contraire la plus excentrique. On peut expliquer ceci par le fait que pour la figure 5.20, on n’a pas testé de demi-grand axe assez faible (le plus faible était de 20  $Mm$ ).

Cependant on peut considérer que dans l’ensemble l’évolution par rapport à  $P^0$  et  $a^0$  est assez similaire et que ce qui détermine un transfert

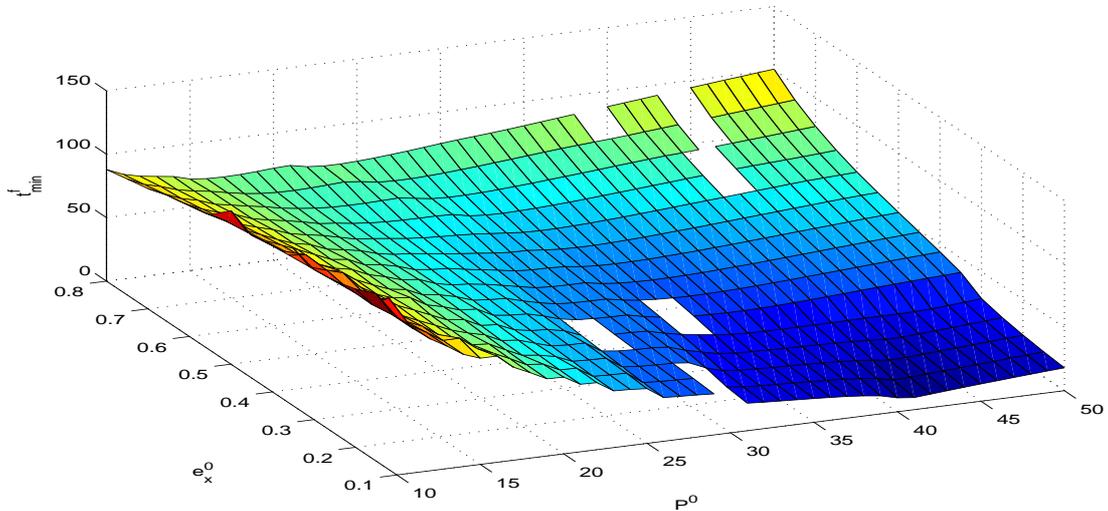


FIG. 5.21 –  $t_{min}^f$  vs.  $(P^0, e_x^0)$  pour de grandes variations de ce couple et  $T_{max} = 10 N$ .

efficace est une combinaison subtile entre la circularité de l'orbite initiale et l'altitude de son apogée.

Il y a bien entendu un autre élément influençant le transfert. Cet élément est l'inclinaison qui, bien que n'ayant qu'une faible influence pour de petites variations peut grandement pénaliser le transfert dès qu'on en considère des plus importantes. Nous vérifions dans le paragraphe suivant notre affirmation.

### Fortes inclinaisons

Nous abordons maintenant une rapide étude de l'influence des grandes variations de l'inclinaison sur le transfert. On a déjà vu au début du chapitre que le transfert est peu sensible aux faibles variations de l'inclinaison. Cependant, on se doute bien que ce ne sera plus le cas pour des grandes variations.

Dans toute l'étude, on se limite à une poussée de  $10 N$ . On ne considère plus que la forme nominale de l'orbite ( $P^0$  et  $e^0$  nominaux).

Commençons par traiter le cas du transfert en temps minimum et en longitude finale minimum.

### Transfert en temps et longitude finale minimum

Le tableau 5.22 résume les principaux résultats obtenus.

$i^0$	$t_{min}^f$ (h.)	$L_{min}^f$ (rad.)
0°	84.270	29.709
15°	88.662	30.521
30°	101.492	32.077
45°	114.980	34.266
60°	132.045	34.924
75°	147.151	?
90°	156.700	?

FIG. 5.22 –  $t_{min}^f$  et  $L_{min}^f$  pour différentes inclinaisons initiales et  $T_{max} = 10N$ .

Tout d’abord, le temps de transfert minimum est bien croissant par rapport à l’inclinaison initiale, ce qui est rassurant. On peut considérer que cette croissance est par ailleurs relativement importante puisque pour  $i^0 = 90^\circ$  l’augmentation est d’environ 86% par rapport au transfert coplanaire. On sait donc déjà que la maximisation de la masse finale risque de donner d’assez mauvais résultats pour les fortes inclinaisons.

Quant à  $L_{min}^f$ , il est aussi croissant mais beaucoup moins que  $t_{min}^f$ . Les ‘?’ signifie que nous ne sommes pas arrivé à résoudre le problème de la minimisation de la longueur finale. On supposera alors que la croissance de  $L_{min}^f$  reste lente afin de pouvoir tout de même tenter d’appliquer la formulation longitudinale pour la maximisation de la masse finale.

Observons maintenant les différences entre les stratégies de poussées induites par le changement de l’inclinaison initiale. Trois stratégies de poussée en temps minimum sont représentées à la figure 5.23.

On constate que l’inclinaison influe sur la régularité de toutes les composantes. En effet, pour le transfert coplanaire, on peut voir que toutes les composantes du contrôle sont régulières avec bien entendu la composante hors-plan toujours nulle. Pour les deux cas non coplanaires représentés, on voit bien que la régularité est perdue.

De plus, la composante ortho-radiale n’est plus prédominante par rapport à la composante normale. On peut aussi constater que la composante ortho-radiale subit toujours des inversions de poussées aux passages aux péricées mais que cette fois-ci les inversions sont opposées à celle du cas coplanaire sur les premiers péricées. On peut voir le même phénomène sur la composante radiale.

Rajoutons que la composante normale est de plus en plus faible à mesure que le transfert évolue, on peut donc en conclure que la correction d’inclinaison se fait surtout au début du transfert. Pour vérifier cette affirmation,

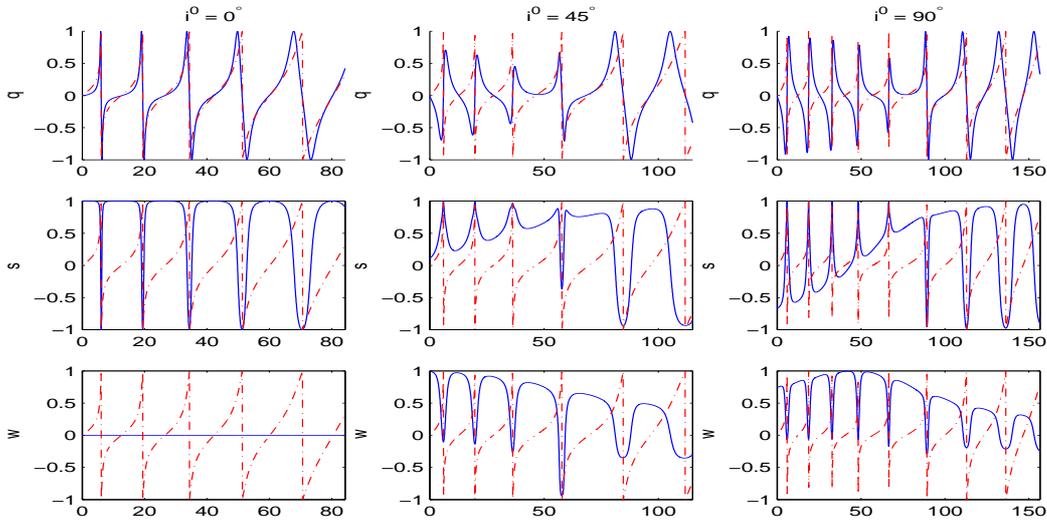


FIG. 5.23 – Stratégie de poussée en temps minimum pour trois inclinaisons différentes ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) et  $T_{max} = 10 N$ .

jetons un œil à l'évolution des états qui est donnée à la figure 5.24.

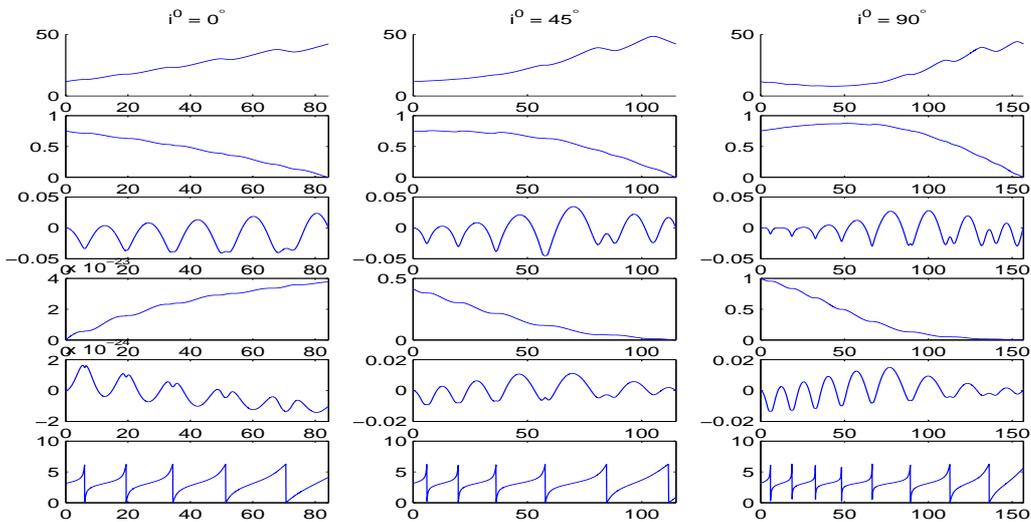


FIG. 5.24 – Evolution des états pour le transfert en temps minimum, trois inclinaisons différentes ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) et  $T_{max} = 10 N$ .

L'évolution de l'inclinaison ( $h_x, h_y$ ) dans le cas coplanaire est en fait nulle vu l'échelle de représentation ( $1.e - 23$ ).

On peut noter un certain nombre de différences entre ces trois transferts. La première différence est observable sur l'évolution du paramètre. En effet, il semble être de croissance de moins en moins régulière à mesure que

l'inclinaison initiale augmente. Pour  $90^\circ$  on peut même voir qu'il commence par décroître sous sa valeur initiale, ce qui n'avait jamais été observé auparavant. La décroissance du paramètre peut très bien être un effet de bord de la décroissance de l'inclinaison étant donné que toutes nos corrections sont liées les unes aux autres.

En parallèle de l'évolution du paramètre, on peut aussi constater une grande diversité entre les évolutions de l'excentricité des trois transferts. En effet, alors que pour le cas coplanaire l'excentricité est régulièrement décroissante, cette même excentricité est croissante au début du transfert pour  $i^0 = 90^\circ$ .

Les deux premières observations nous amène à nous poser la question suivante : *l'orbite initiale ne passant pas très loin de la Terre, la décroissance du paramètre et la croissance de l'excentricité n'induisent-ils pas une collision avec celle-ci ?*

La réponse à cette question est malheureusement affirmative car pour l'inclinaison de  $90^\circ$ , l'altitude la plus faible est d'environ  $4.36 Mm$  alors que le rayon de la Terre est d'environ  $6.128 Mm$ . Nous avons donc bien collision pour cette inclinaison et il nous faut donc explicitement prendre en compte la contrainte de zone de sécurité (1.11). Une telle prise en compte revient à introduire des contraintes d'états dans notre problème de contrôle optimal qui rend l'application du PMP beaucoup plus compliquée. Nous n'essaierons donc pas de résoudre le problème avec contrainte de sécurité mais nous nous contenterons de la vérifier *a posteriori* comme nous le faisons déjà.

Cependant, après quelques vérifications, il semble que ces collisions n'apparaissent que pour des inclinaisons très élevées (plus de  $85^\circ$ ).

Nous donnons à la figure 5.25 les trajectoires correspondant aux trois inclinaisons utilisées.

Passons maintenant à la maximisation de la masse finale.

### Maximisation de la masse finale

Observons tout d'abord l'évolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  pour différentes inclinaisons initiales, ce qui est donné par la figure 5.26.

Il n'est pas nécessaire de considérer des inclinaisons aussi élevées que pour la minimisation du temps de transfert puisqu'on constate déjà une grande différence sur les consommations. En effet, de  $0$  à  $45^\circ$  on a une perte de masse finale de l'ordre de  $50 kg$ . ce qui est loin d'être négligeable.

Voyons maintenant qu'elles sont les stratégies de poussées associées à ces transferts comme le montre la figure 5.27.

Comme on pouvait s'y attendre, la poussée normale est de plus en plus importante à mesure que l'inclinaison augmente. Elle prend même plus d'importance que la poussée ortho-radiale sur les premières révolutions.

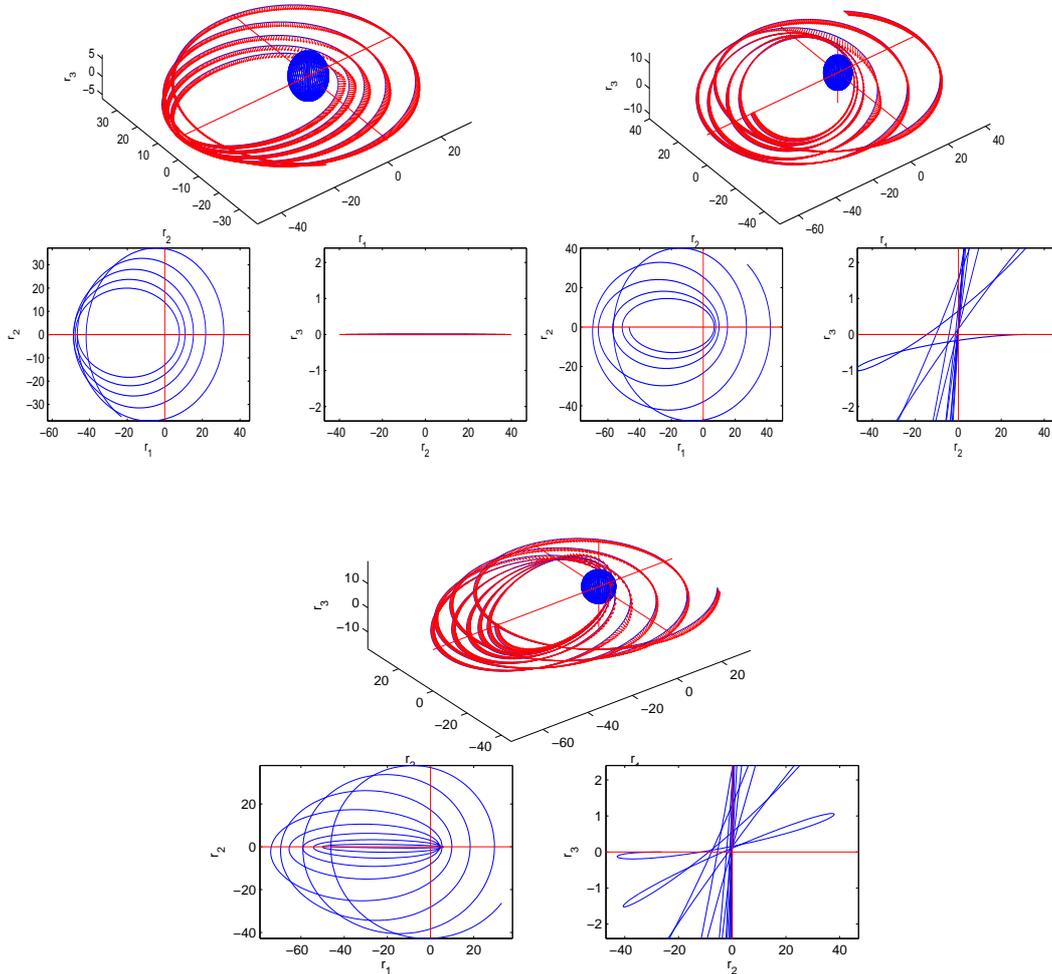


FIG. 5.25 – Trajectoires pour le transfert en temps minimum, trois inclinaisons différentes ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ) et  $T_{max} = 10 N$ .

On constate aussi l'apparition de poussées sur les premiers périgées et un plus grand nombre de poussées sur les derniers périgées quand l'inclinaison devient plus importante.

A titre indicatif, on donne les trois trajectoires associées aux stratégies de la figure 5.27. Ces trajectoires sont données aux figures 5.28.

L'évolution des états n'étant pas très particulière, on ne la donne pas. On note simplement que la correction de l'inclinaison est un peu plus importante au début du transfert et que la correction de l'excentricité est plus faible au début du transfert, ce qui rejoint les remarques faites pour les transferts en temps minimum.

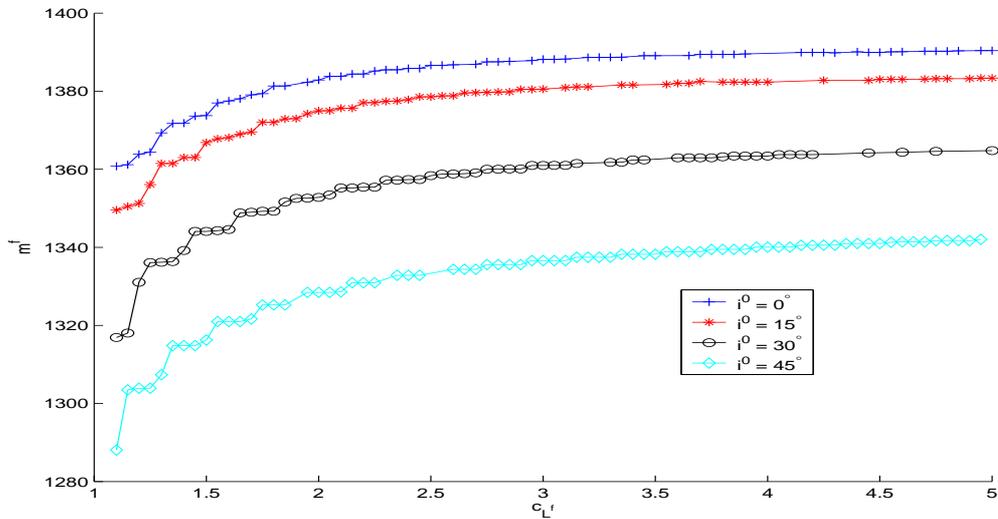


FIG. 5.26 –  $m^f$  vs.  $c_{L^f}$  pour différentes inclinaisons initiales et  $T_{max} = 10N$ .

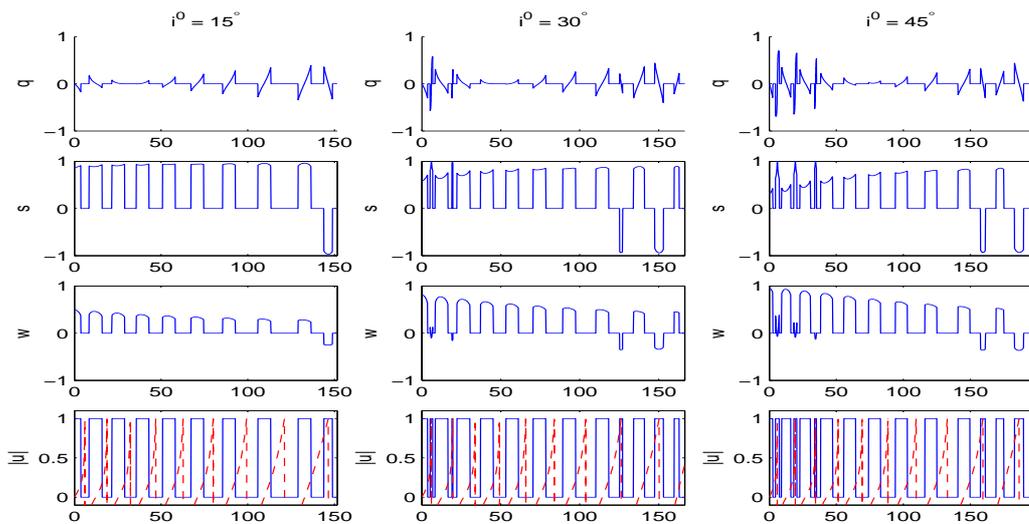


FIG. 5.27 – Stratégie de poussée en masse finale maximum pour trois inclinaisons différentes ( $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ),  $c_{L^f} = 2$  et  $T_{max} = 10 N$ .

### Cas impulsif

Intéressons nous rapidement aux liens avec le cas du transfert impulsif.

Tout d'abord notons que cette comparaison nous a permis de mettre en défaut notre méthode de résolution dont le comportement se dégrade à mesure que l'incinaison initiale augmente. En effet, la stratégie d'initialisation

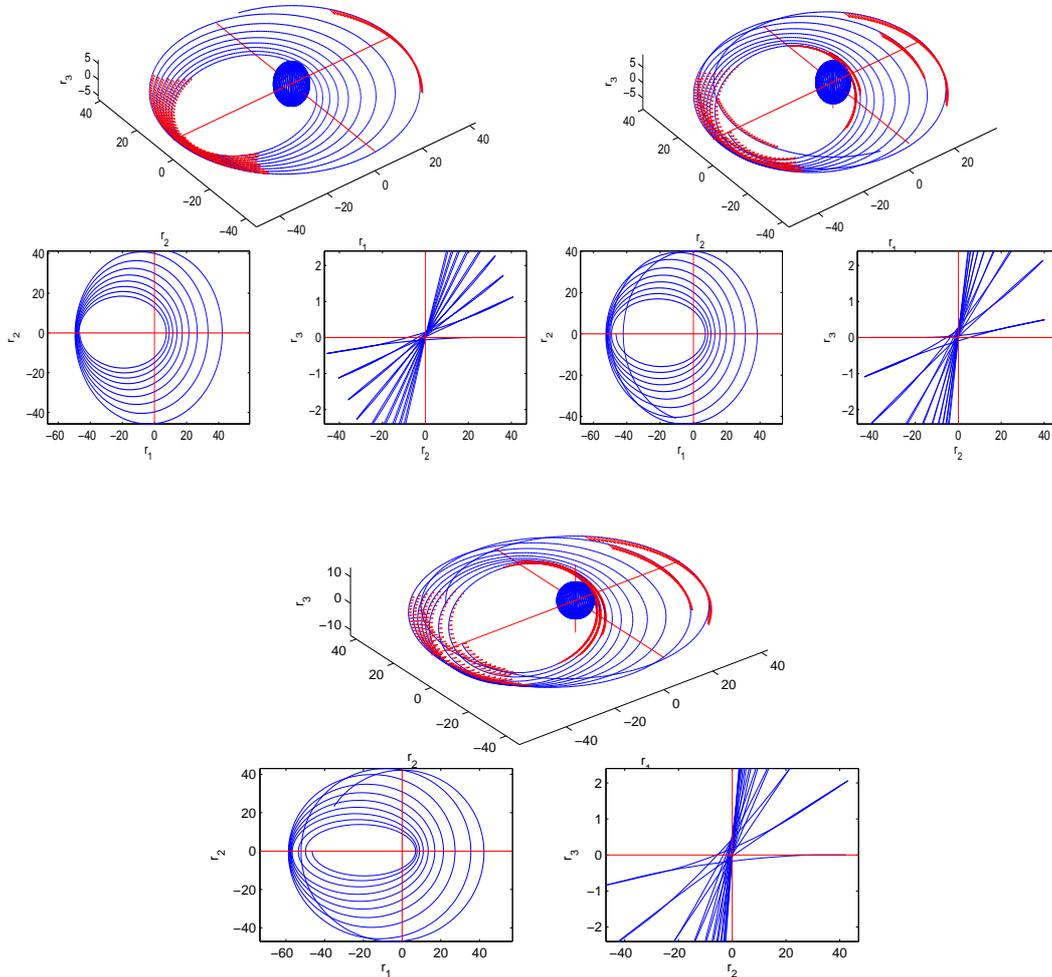


FIG. 5.28 – Trajectoires en masse finale maximum pour trois inclinaisons différentes ( $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ),  $c_{Lf} = 2$  et  $T_{max} = 10 N$ .

échoue pour des inclinaisons supérieures à  $50^\circ$ .

Nous nous restreignons ici à comparer les meilleures masses finales obtenues pour le cas continu et celles obtenues pour le cas impulsif. Comme pour le cas continu nous n'arrivons pas à résoudre le problème pour de fortes inclinaisons en un temps raisonnable, nous ne donnons les masses finales du cas continu que jusqu'à environ  $50^\circ$ .

La figure 5.29 donne la comparaison entre le cas impulsif et continu en terme de masse finale.

Pour les inclinaisons sous  $35^\circ$ , on peut constater que les masses finales des cas bi-impulsif et continu correspondent tout à fait. De plus, le transfert tri-impulsif prend le pas sur le transfert bi-impulsif pour de fortes

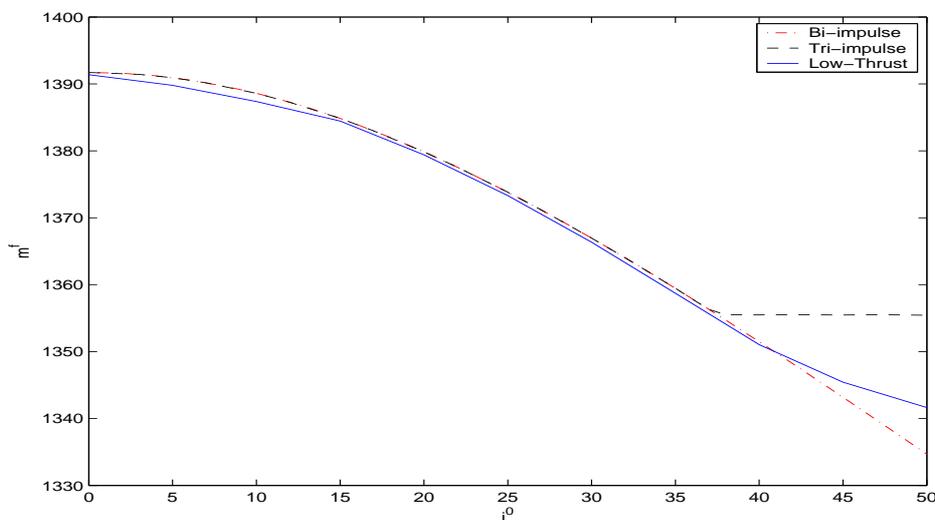


FIG. 5.29 – Masse finale en fonction de  $i^0$  pour le cas continu ( $T_{max} = 10N$ ) et impulsif (Bi et Tri).

inclinaisons, ce dernier devenant sous-optimal. Pour ces fortes inclinaisons ( $i^0 \geq 40^\circ$ ) le transfert continu devient également meilleur que le transfert bi-impulsionnel bien qu'il n'atteigne pas les masses finales du transfert tri-impulsionnel.

Cette non concordance entre les masses finales du transfert continu et du transfert tri-impulsionnel s'explique par le fait que pour de forts  $i^0$ , la croissance de  $m^f(c_{Lf})$  est moins forte que pour de faibles  $i^0$  et que l'asymptote de cette courbe ne sera atteinte que pour de très grands  $c_{Lf}$ . Or, notre méthode rencontre des difficultés numériques à converger pour ces grands  $i^0$  et  $c_{Lf}$ , on ne peut donc pas vérifier numériquement la concordance des masses finales. De plus, notons que le transfert tri-impulsionnel optimal est ici parabolique (voir [45]) et donc de temps infini ou en pratique très important (puisque les solutions calculées ici passent juste par des orbites intermédiaires de très fortes excentricités valant approximativement 0.99) ce qui explique la nécessité de prendre  $c_{Lf}$  très grand pour pouvoir comparer *proprement* avec le cas continu.

Comparons cependant la répartition des poussées pour quelques inclinaisons initiales et ce entre le transfert bi-impulsionnel et le transfert continu, ce qui est fait au tableau 5.13.

On constate tout d'abord que la répartition des impulsions dans le cas impulsif est très stable, ce qui se retrouve sur les solutions données à l'annexe C qui sont très proches les unes des autres. Au contraire, les répartitions pour le cas continu évoluent en faveur des poussées aux périgées quand  $i^0$  augmente.

$i^0$	Cas	Poussées aux apogées				Poussées aux périgées				$m^f$ (kg.)
		%	$q$	$s$	$w$	%	$q$	$s$	$w$	
15°	Impulsionnel	95.12	0	0.97	0.25	4.88	0	-0.97	-0.23	1384.845
	10N; $c_{Lf} = 10$	95.31	0.08	0.94	0.34	4.69	-0.01	-0.97	-0.23	1384.452
30°	Impulsionnel	95.58	0	0.91	0.41	4.42	0	-0.93	-0.38	1366.962
	10N; $c_{Lf} = 10$	96.14	0.05	0.80	0.58	3.86	-0.01	-0.92	-0.39	1366.402
40°	Impulsionnel	95.96	0	0.88	0.47	4.04	0	-0.90	-0.43	1351.479
	10N; $c_{Lf} = 10$	81.88	5.e-3	0.74	0.65	18.12	-6.e-3	-0.24	-0.26	1351.035
50°	Impulsionnel	96.33	0	0.86	0.50	3.67	0	-0.89	-0.46	1334.670
	10N; $c_{Lf} = 5$	66.98	0.01	0.68	0.66	33.02	-1.e-4	-0.25	-0.17	1335.625

TAB. 5.13 – Cas bi-impulsionnel et continu, comparaison des stratégies de poussées pour de fortes inclinaisons.

Notons que le lecteur peut être surpris par les faibles valeurs de  $(s, w)$  dans le cas continu, cela vient du fait que leur calcul se fait par une moyenne arithmétique (et donc une poussée positive puis négative s’annule).

On peut encore une fois voir au tableau 5.13 que pour  $i^0 = 50^\circ$ , le cas continu devient meilleur que le bi-impulsionnel. Voyons alors une stratégie de poussée pour cette inclinaison, elle est donné par la figure 5.30.

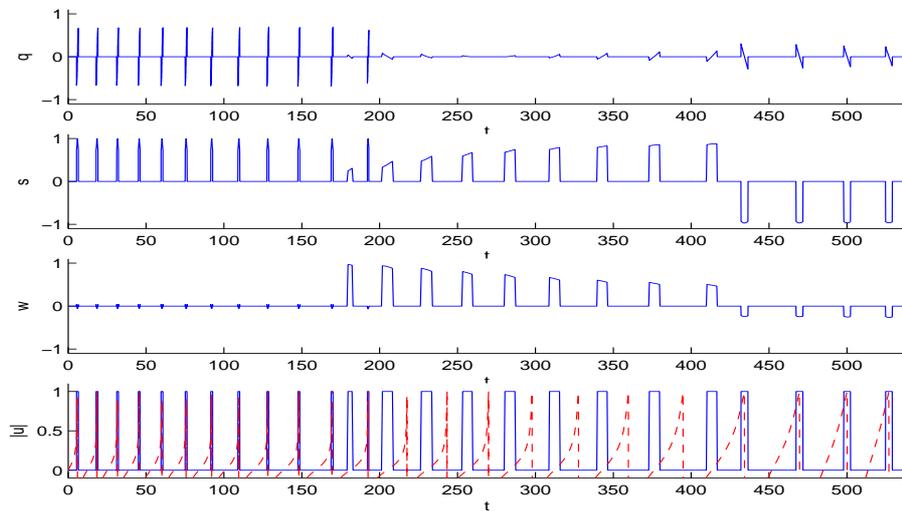


FIG. 5.30 – Stratégie de poussée (en fonction du temps) pour  $i^0 = 50^\circ$ ,  $T_{max} = 10N$  et  $c_{Lf} = 5$ .

On constate ici assez clairement que la stratégie de poussée peut se décomposer en trois étapes. La première consiste en des poussées uniquement

sur les périées et presque sans poussées normales au plan (donc sans correction de l'inclinaison). La seconde étape comprend uniquement des poussées sur les apogées avec cette fois-ci une correction de l'inclinaison relativement importante. La dernière étape de la stratégie consiste en des poussées uniquement sur les périées mais, contrairement à la première étape, les poussées normales au plan sont présentes et sont inversées par rapport à celles des apogées. Les poussées ortho-radiales sont elles aussi inversées par rapport à aux poussées aux apogées mais, plus important, par rapport aux poussées de la première étape.

Ces trois phases montrent alors les prémisses du transfert tri-impulsionnel bien que comme il a été dit précédemment, il faudrait considérer un  $c_{Lf}$  beaucoup plus important pour pouvoir conclure correctement. Notons cependant qu'on a bien une augmentation de l'excentricité due à la première phase de poussée sur les périées, malgré le fait que l'on soit loin d'avoir une excentricité valant 1.

On note qu'on pourrait utiliser le cas continu pour connaître le nombre optimal d'impulsions du cas impulsionnel. Ceci reste cependant à vérifier même si nous possédons tout de même de bons indices.

## Conclusion

Ce chapitre nous a tout d'abord permis de valider notre méthode de résolution qui s'est révélée efficace sur tous les transferts considérés à l'exception des transferts avec fortes inclinaisons initiales qui posent des problèmes d'initialisation du suivi de chemin.

Nous avons pu observer un grand nombre de stratégies de poussées tout en vérifiant nos diverses loi empiriques. On a pu également voir qu'un transfert meilleur qu'un autre en terme de temps de transfert minimum, reste meilleur en terme de consommation.

De toutes les observations faites, la plus intéressante est certainement le lien qui a pu être renforcé entre le cas impulsionnel et notre cas continu. L'observation du cas continu pourrait même suggérer le nombre d'impulsions optimales du cas impulsionnel. Reste cependant un problème d'ordre théorique qui serait de démontrer que le cas limite des transferts continus est bien le transfert impulsionnel en termes de masse finale lorsque l'on augmente le nombre de révolutions (le cas où l'on augmente  $T_{max}$  ayant déjà été démontré par Neustadt [47]).

# Chapitre 6

## Contrainte de cône

Dans ce chapitre est traité la résolution numérique du problème de transfert orbital avec prise en compte d'une contrainte de cône double. N'ayant aucun résultat numérique préalable sur le transfert avec cette contrainte nous nous intéressons en premier lieu au transfert coplanaire en temps minimum. Ensuite, nous nous intéressons au cas non coplanaire. Pour finir nous étudierons la maximisation de la masse finale pour le transfert coplanaire accompagné de quelques remarques sur le transfert non coplanaire. Dans tout le chapitre on s'intéressera surtout au cas limite de la contrainte mono-entrée (avec demi-angle au sommet nul) même si dans la réalité cet angle est faible mais non nul.

### 6.1 Transfert coplanaire en temps minimum

#### Introduction

On rappelle que la contrainte de cône double est une restriction sur la direction de la poussée. Cette dernière doit former avec le vecteur ortho-radial du repère du même nom ou son opposé ( $s$  ou  $-s$ ) un angle d'au plus  $\alpha$ . Ceci revient à restreindre les poussées admissibles à un cône de révolution double autour de  $s$  et  $-s$ , centré à l'origine et de demi-angle au sommet  $\alpha$ , chaque cône simple étant le symétrique de l'autre par rapport à l'origine.

Posons  $\mathcal{U}_\alpha$  l'ensemble des contrôles admissibles :

$$\mathcal{U}_\alpha = \{u \in \mathbf{B}(0, 1) \setminus \{0\}^m \mid |u_2|/|u| \geq \cos \alpha\} \cup \{0\}^m \subset \mathbb{R}^m.$$

avec  $m$  la dimension du contrôle, 2 en coplanaire et 3 en non coplanaire. On note que pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  la contrainte de cône double est inactive ( $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{B}(0, 1)$ ).

On étudie tout d'abord le problème de minimisation du temps de transfert car d'une part c'est le premier critère qui vient à l'esprit pour les transferts à poussées faibles et d'autre part la résolution du problème de maxi-

minimisation de la masse finale nécessite la connaissance du temps de transfert minimum (ou de la longitude de transfert minimum qui est très liée au temps).

La contrainte réelle sur l'angle  $\alpha$  est de l'ordre de  $7^\circ$ . Nous nous intéressons cependant au cas limite où  $\alpha = 0$  pour la simple raison que nous ne voyons pas pourquoi nous arrêter à  $7^\circ$  si l'on peut descendre plus bas. De plus la résolution pour  $\alpha = 0$  passera par la résolution pour  $\alpha = 7^\circ$ .

### Méthode

La méthode de résolution de ce problème en temps minimum sera une fois de plus le tir simple associé à une méthode de continuation. En effet, il paraît tout naturel de déduire la solution pour  $\alpha = 0$  des solutions pour  $\alpha > 0$ . On fera donc une homotopie sur le demi-angle au sommet  $\alpha$  en le faisant décroître de  $\frac{\pi}{2}$  jusqu'à 0 (le système mono-entrée). On a plusieurs choix possible pour l'évolution de  $\alpha$  en fonction du critère homotopique  $\lambda$  ( $\in [0, 1]$  rappelons-le). On choisit une évolution linéaire classique.

$$\begin{aligned} \alpha_\lambda &= (1 - \lambda)\alpha_0 + \lambda\alpha_1 \\ &= (1 - \lambda)\frac{\pi}{2} \quad (\text{dans notre cas}) \end{aligned}$$

On définit alors le problème de contrôle optimal  $(P_{tf}^c)_\lambda$  suivant :

$$(P_{tf}^c)_\lambda \left\{ \begin{array}{l} \min t^f \\ \dot{x}(t) = f_0(x) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \\ \dot{m}(t) = -\beta T_{max} |u| \\ \alpha = \alpha_\lambda \\ u \in \mathcal{U}_\alpha \\ x(0) = x^0 \\ m(0) = m^0 \\ h(x(t^f)) = 0 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

on adopte la même notation pour les problèmes coplanaire et non coplanaire, le contexte étant toujours suffisamment explicite.

On note  $\mathcal{S}_{tf}(z, \lambda)$  la fonction de tir associée à  $(P_{tf}^c)_\lambda$ . On suppose qu'on est capable d'en trouver un zéro en  $\lambda = 0$ , i.e pour le problème de minimisation du temps de transfert sans contrainte de cône. Nous renvoyons le lecteur à [14] pour la résolution de  $(P_{tf}^c)_0$ .

La minimisation du Hamiltonien est très simple et consiste simplement à projeter la commande obtenue sans contrainte de cône sur le cône le plus proche en gardant une norme maximum et à vérifier que la commande ainsi

obtenue reste toujours meilleure que la commande nulle sans quoi on prend cette dernière.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour l'expression exacte de la minimisation. Notons que l'on suppose que le vecteur  $|{}^t Bp|$  n'est orthogonal au vecteur  $s$  (de la base ortho-radiale) que sur un ensemble de mesure nulle.

## Résolution

La méthode homotopique employée a tout d'abord été la continuation discrète qui permet de résoudre le problème pour la plupart des  $T_{max}$ . Malheureusement, on rencontre quelquefois des problèmes de convergence qu'on peut difficilement expliquer si on garde cette continuation. On va donc essayer d'appliquer la continuation différentielle ce qui va nous permettre d'expliquer la divergence sporadique de l'homotopie discrète.

Après quelques applications de la continuation différentielle on s'aperçoit que certains chemins de zéros partent à l'infini, notamment la valeur du  $t^f$  solution. Ceci est problématique car ayant tout de même quelques succès, il serait intéressant de savoir pourquoi certains chemins de zéros semblent diverger alors que d'autres non.

Pour cela, une fois n'est pas coutume, l'existence de minima locaux va nous être favorable. En effet, il nous faut remarquer que le problème de minimisation du temps de transfert  $(P_{tf}^c)_0$  admet des minima locaux. Or la divergence de certains chemins de zéros vient probablement (et ce sera confirmé par la suite) d'une mauvaise structure de la stratégie de poussée en  $\lambda = 0$  qui ne cadre pas du tout avec celle qu'on aurait en  $\lambda = 1$ . Or une différence de structure induira, comme pour la maximisation de la masse finale, une non différentiabilité de la fonction de tir.

A l'usage il apparaît que certains chemins de zéros issus de solutions locales permettent de trouver une solution de  $(P_{tf}^c)_1$  alors que ce n'est pas le cas pour la solution globale (en tout cas moins locale puisqu'on n'a pas de preuve de l'optimalité).

On peut en avoir un exemple sur la figure 6.1.

*Note* : On ne représente pas l'inconnue associée à la masse (le  $p_m(0)$ ) puisque sur toutes les résolutions la poussée est toujours maximale et on peut donc enlever la masse de l'ensemble des états comme pour le transfert en temps minimum sans contrainte de cône

Sur cette figure, bien qu'ici on ne pousse pas la résolution jusqu'à 0 radian mais 0.1, on voit bien qu'un des deux chemins part à l'infini (appelons-le  $c1$ ) alors que l'autre (appelons-le  $c2$ ) paraît presque vertical par comparaison. Or  $c2$  est clairement issu d'une solution locale puisque son  $t_{min}^f$  ( $\approx 170.61$  h.) est plus élevé que celui de  $c1$  ( $\approx 167.46$  h.).

De plus on voit que le  $t_{min}^f$  de  $c2$  devient inférieur à celui de  $c1$  vers la fin de l'homotopie. Et comme à la fin de l'homotopie on n'est qu'à  $\alpha = 0.1$

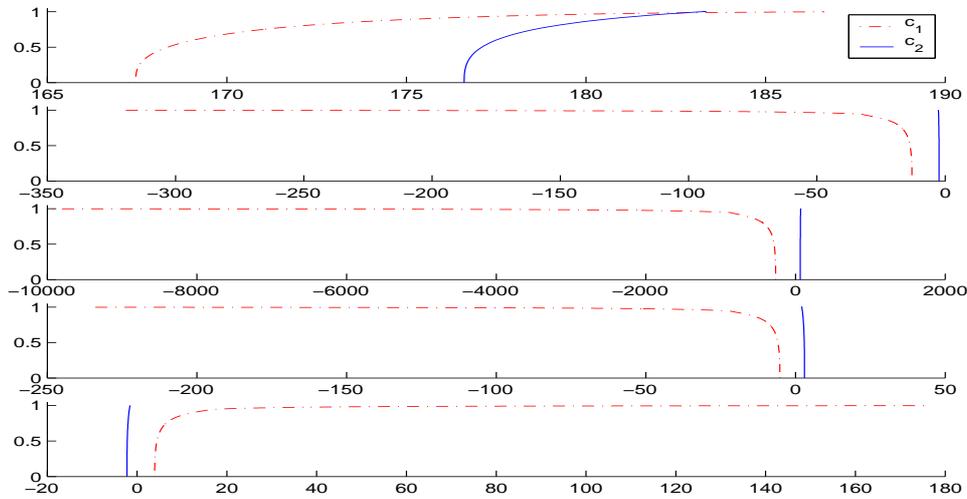


FIG. 6.1 – Suivis de chemins de zéros pour  $T_{max} = 5N$ . de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  à  $0.1rad$  avec de haut en bas  $\lambda$  en fonction de  $t_{min}^f$ ,  $p_P(0)$ ,  $p_{e_x}(0)$ ,  $p_{e_y}(0)$ ,  $p_L(0)$ .

radian, on imagine bien que la différence entre les deux temps minimum ira croissante.

On peut d'ores et déjà expliquer la divergence de la continuation discrète qui, si on ne prend pas la bonne séquence de  $\lambda$  peut très bien *sauter* d'un chemin à l'autre et ainsi passer d'un chemin convergent vers un chemin divergent sans possibilité de retour. On n'a donc aucun contrôle sur le choix du chemin de zéros qu'on suit. C'est pourquoi nous n'utiliserons plus que la continuation différentielle pour tout le reste du chapitre.

Afin de comprendre la raison de la divergence de  $c1$  et du bon comportement de  $c2$ , on va comparer les stratégies de poussées correspondantes dont les chemins sont issus (les solutions en  $\lambda = 0$ ). Cette comparaison est faite à la figure 6.2.

Cette figure nous donne immédiatement un critère décidant de la convergence ou non du chemin de zéros issu d'une solution. En effet, on voit bien que la stratégie de  $c2$  est beaucoup plus régulière que celle de  $c1$  en ce sens qu'on y voit une inversion de la poussée à tous les passages aux périgées. On peut constater cette inversion de poussée soit sur la composante ortho-radiale du contrôle soit sur l'angle du contrôle par rapport à la direction ortho-radiale. L'expérience montre que ce critère est le bon et qu'il est quasiment infaillible, si tant est qu'on ne cherche pas à le satisfaire de façon drastique (une esquisse d'inversion aux premiers périgées est suffisante).

Cependant il subsiste encore un problème qui est celui de l'initialisation. En effet, on a pu voir que la résolution du problème de transfert en temps minimum ne nous fournissait pas toujours un point d'initialisation satis-

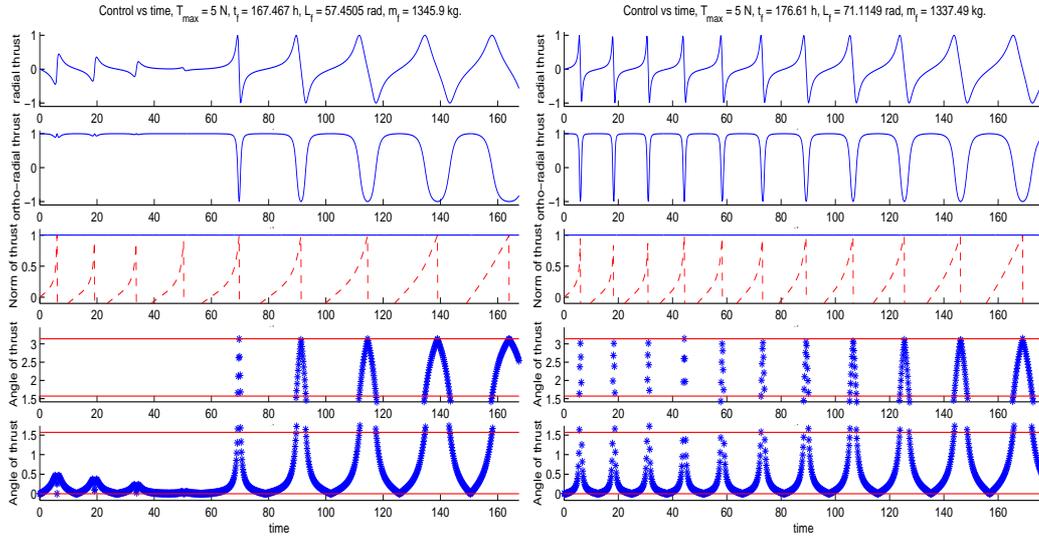


FIG. 6.2 – Contrôle (radial, ortho-radial et norme) et angle formé avec le vecteur ortho-radial de la base en fonction du temps pour les deux solutions (la gauche est celle de  $c1$ , la droite celle de  $c2$ ) de  $(P_{t_f}^c)_0$  à  $T_{max} = 5N$ .

faisant au critère de régularité énoncé ci-avant. Nous ne sommes capable que de fournir une heuristique qui permet en général de trouver une bonne initialisation. Cette heuristique est la suivante :

1. trouver une solution quelconque  $\bar{z}$  de  $(P_{t_f}^c)_0$  (avec le code **TfMin** [20] par exemple) ;
2. vérifier si  $\bar{z}$  satisfait le critère de régularité. Si oui, on a trouvé l'initialisation désirée. Si non, relancer le tir simple sur  $(P_{t_f}^c)_0$  en inversant les signes de  $p_{e_x}(0)$ ,  $p_{e_y}(0)$ , et  $p_L(0)$  ;
3. Si on converge vers une solution  $\tilde{z} \neq \bar{z}$ , elle devrait vérifier le critère de régularité.

*Note* : ceci n'est qu'une heuristique, on n'a donc aucune garantie de résultats bien qu'elle se soit révélée très efficace sur notre problème.

Cette heuristique se base uniquement sur nos observations expérimentales qui semblent indiquer que les solutions régulières possèdent un  $p_{e_x}(0)$  positif, un  $p_{e_y}(0)$  aussi positif et un  $p_L(0)$  négatif.

Vu la prolifération des minima locaux à poussée faible on n'a absolument aucune garantie quant à l'optimalité des solutions trouvées.

Cependant, avec cette méthode on arrive sans problème à trouver des solutions  $(P_{t_f}^c)_1$  (jusqu'à  $\alpha = 0$ ) pour des poussées descendant jusqu'à  $0.1N$ .

Le tableau 6.3 résume les temps de calculs (sur Pentium IV 2.8 GHz) et de transfert ainsi que la norme de la fonction de tir solution pour plusieurs poussées.

$T_{max}$ (N.)	$t_{min}^f$ (h.)	$t_{exec}$ (s.)	$ S_{tf}^c $
10.	89.44	2.	2.e-7
1.	910.17	34.	2.e-5
0.5	1915.31	148.	4.e-5
0.1	9206.64	973.	3.e-4

FIG. 6.3 – Résultats pour le transfert coplanaire en temps minimum avec contrainte de cône double de demi-angle au sommet nul.

Dans ce tableau le temps d'exécution  $t_{exec}$  ne tient compte que du temps de la continuation différentielle et du raffinage de la solution, on ne tient pas compte du temps d'initialisation (en général étape manuelle mais peu nécessaire en temps de calcul).

On peut constater que les temps d'exécution sont de plus en plus importants et ne croissent pas linéairement en fonction de  $T_{max}$ .

De plus la norme de la fonction de tir à la solution n'est pas très bonne ce qui vient du caractère discontinu de la commande car la structure optimale passe d'un cône à l'autre durant le transfert.

Pour le moment nous avons exposé la résolution du problème mais pas les résultats proprement dit. Comblons de suite cette lacune.

## Résultats

Commençons par observer une stratégie de poussée solution de  $(P_{tf}^c)_1$  qui est représentée sur la figure 6.4.

On constate bien que le contrôle n'a pas de composante radiale ce qui était prévisible puisque l'angle du cône est nul.

On retrouve la stratégie d'inversion des poussées aux périégées qui est initiée par la structure de la commande en  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (d'où le critère de régularité).

On note également que du fait des inversions de poussées notre contrôle est discontinu et que par conséquent la résolution sans homotopie présentera des difficultés similaires à celles rencontrées pour le critère de maximisation de la masse finale, à savoir une grande sensibilité par rapport à l'initialisation.

Quant à l'évolution des états et états adjoints du système elle n'a rien de particulièrement remarquable mis à part une décroissance très régulière

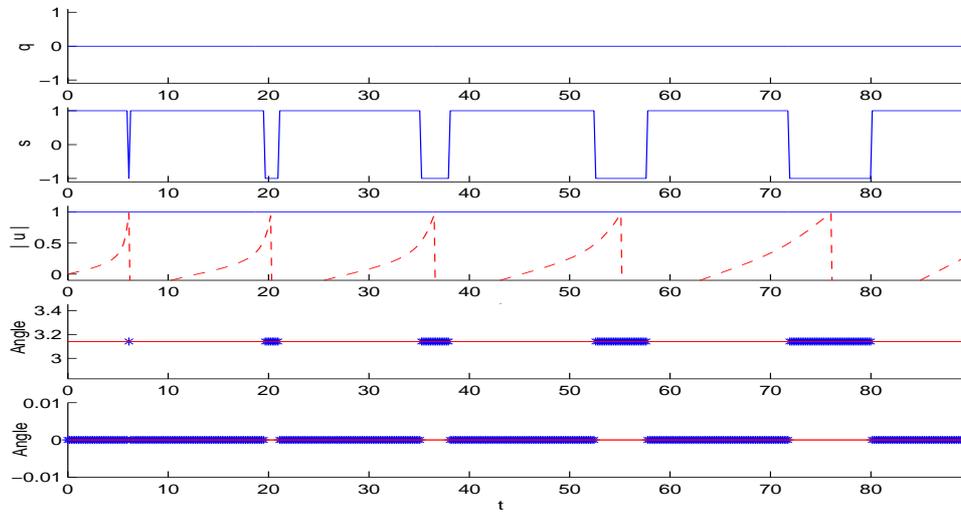


FIG. 6.4 – Stratégie de poussée en temps minimum pour  $\alpha = 0$  et  $T_{max} = 10N$ .

de l'excentricité de l'orbite.

Nous n'avons toujours pas abordé le point le plus intéressant de cette étude qui est l'évolution du temps de transfert minimum. En effet, il faudrait savoir si la prise en compte de la contrainte de cône double n'induit pas un temps de transfert prohibitif. La réponse est négative et de plus on garde la loi empirique de la constance du produit  $T_{max}t_{min}^f$  pour un demi-angle au sommet  $\alpha$  donné. Ceci est illustré à la figure 6.5 .

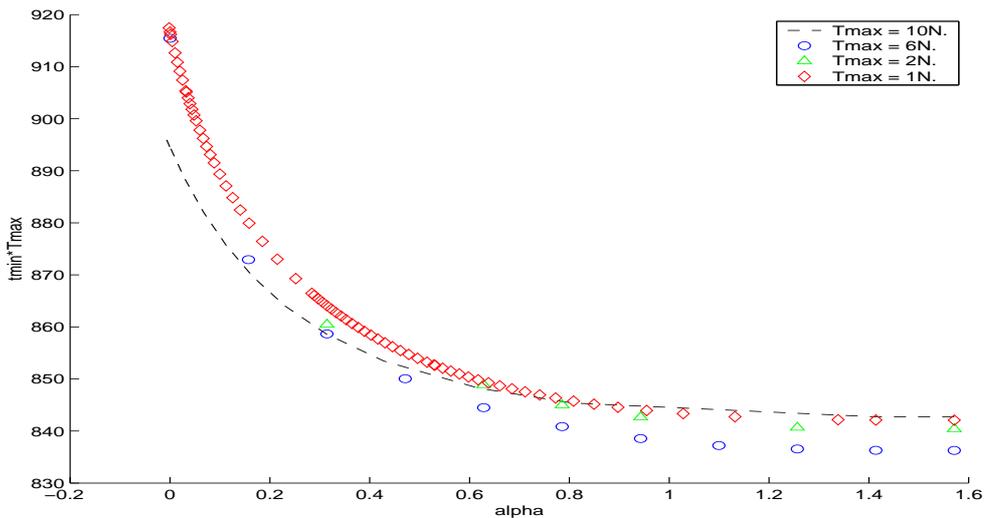


FIG. 6.5 – Produit  $T_{max}t_{min}^f$  en fonction de  $\alpha$  pour plusieurs  $T_{max}$ .

La relation empirique est bien présente bien qu'elle ne soit pas aussi évidente que dans le cas sans contrainte. Ceci peut venir de minima locaux qui peuvent parasiter nos valeurs.

On constate que l'augmentation du  $t_{min}^f$  en fonction de  $\alpha$  est de moins de 10% ce qui est tout à fait acceptable.

On pouvait d'ailleurs s'attendre à un résultat de la sorte étant donné que les stratégies de poussées sans contrainte de cône ont déjà une poussée majoritairement ortho-radiale.

Cette conservation de la loi empirique sera d'un usage appréciable pour la résolution du problème de transfert coplanaire avec contrainte de cône double et maximisation de la masse finale. Mais avant de s'attaquer à ce problème, étudions le transfert en temps minimum non coplanaire avec contrainte de cône double.

## 6.2 Transfert non coplanaire en temps minimum

### Introduction

On s'intéresse ici au problème non coplanaire en temps minimum avec tout d'abord la contrainte de cône double. Autant le passage du transfert coplanaire au non coplanaire ne pose pas de problème particulier dans le cas sans contrainte de cône, autant on peut s'attendre à une explosion du temps minimum si on garde la même contrainte de cône double. En effet, dans le cas limite mono-entrée, i.e avec demi-angle au sommet nul, le système n'est même pas contrôlable du fait de l'impossibilité d'une poussée hors-plan, seule capable de corriger l'inclinaison du plan orbital.

On devrait donc modifier la contrainte de cône pour se permettre une correction de l'inclinaison. Cependant, bien qu'une telle extension ait été testée (pour notre tranquillité de conscience) elle est quelque peu surréaliste attendu qu'il n'y a aucune raison qu'un transfert solution du problème non contraint découple la correction d'inclinaison et la correction d'altitude et d'excentricité. Nous allons tout d'abord étudier l'évolution du temps de transfert minimum dans le cas strict de la contrainte de cône double.

### Cône double

Le problème à résoudre est ici le problème ( $P_{tf}^c$ ) (cf. section précédente) en 3 dimensions. Sachant que le satellite n'est plus contrôlable pour le cas mono-entrée, on se contentera de faire quelques observations sur l'évolution du temps de transfert minimum.

L'application du principe du maximum nous donne une fonction de tir de la même forme que le cas coplanaire avec bien entendu deux états

supplémentaires  $((h_x, h_y)$  le vecteur inclinaison). La minimisation du Hamiltonien est similaire au cas coplanaire mis à part que la projection sur le cône le plus proche doit se faire dans une dimension supérieure.

Comme pour la section précédente on applique une continuation différentielle qui fera décroître le demi-angle au sommet  $\alpha$ . Nous nous sommes de plus restreint au cas  $T_{max} = 10N$ , en supposant que les observations qualitatives resteront valables pour les poussées plus faibles (ce que nous sommes en droit d'espérer au vu de la régularité du problème).

Du cas coplanaire, on sait déjà que pour avoir une chance de pousser assez loin la décroissance de  $\alpha$ , il nous faut suivre un chemin de zéros issu d'une solution régulière de  $(P_{t^f}^c)_0$ . Or comme ici une stratégie de poussée corrige également l'inclinaison, on en déduit que la régularité recherchée doit concerner non seulement la composante ortho-radiale mais aussi la normale.

Pour  $10N$ , on trouve facilement deux stratégies extrêmes régulières qui sont représentées sur la figure 6.6.

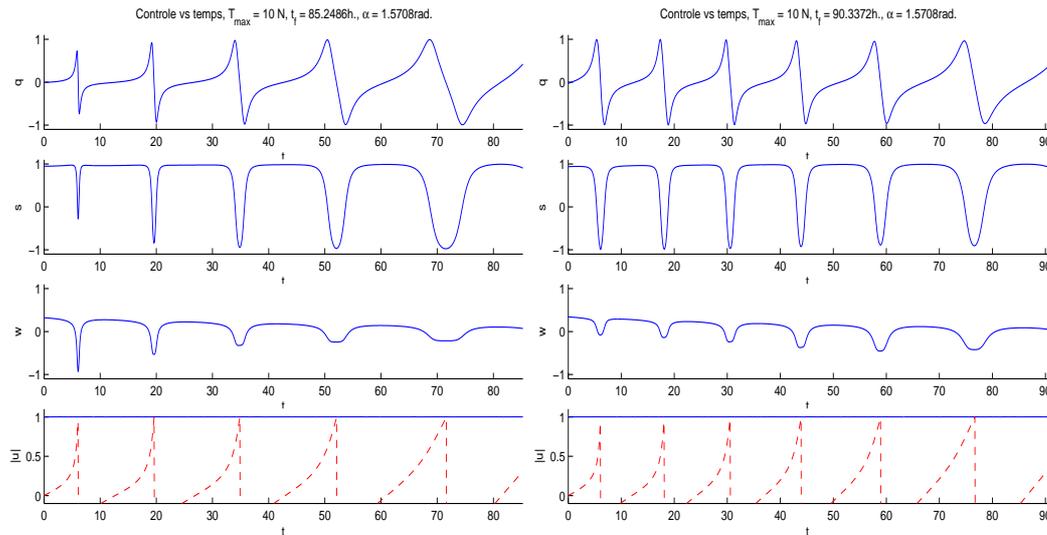


FIG. 6.6 – Deux stratégies de poussée régulières pour  $(P_{t^f}^c)_0$  et  $T_{max} = 10N$ .

Appelons s1 la stratégie de gauche et s2 celle de droite.

On peut constater que ces deux stratégies sont très régulières avec des inversions de poussées à tous les passages aux périhéliees. On remarque d'ailleurs que ces inversions concernent également la composante normale.

Remarquons de plus que la stratégie s2 est clairement locale puisque son  $t^f$  est supérieur à celui de s1. D'ailleurs s1 est également locale car on peut trouver facilement une meilleure stratégie en terme de minimisation de  $t^f$ .

Constatons également que la magnitude des poussées normales est très faible par rapport à celle des poussées ortho-radiales, ce qui est aussi le

cas des stratégies de poussées pour les autres critères. On comprend bien ce phénomène qui est dû à la faible inclinaison de notre orbite initiale au regard de son l'excentricité. Cette constatation à elle seule nous permet d'espérer que la décroissance de  $\alpha$  pourra être réalisée jusqu'à des valeurs relativement faibles.

Après expérimentations sur ces deux points de départs prometteurs, il apparaît que la décroissance est au moins possible jusqu'à 0.12 rad (soit  $\approx 6.9^\circ$ ) pour  $s1$  et 0.11 rad (soit  $\approx 6.3^\circ$ ) pour  $s2$ . Les deux stratégies de poussée correspondantes à ces deux angles sont représentées à la figure 6.7.

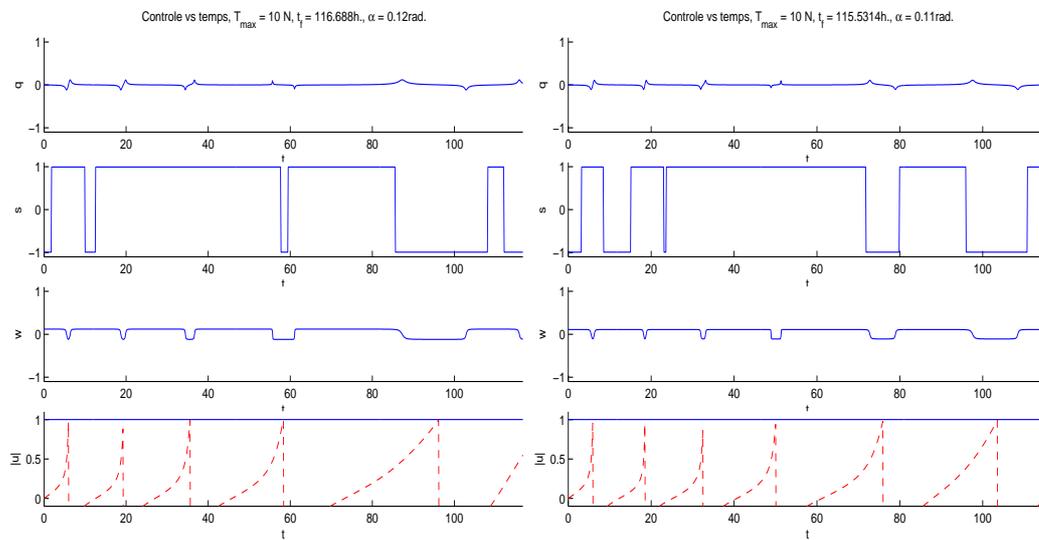


FIG. 6.7 – Stratégies de poussées pour  $\alpha = 0.12$  (issue de  $s1$ , à gauche) et  $\alpha = 0.11$  (issue de  $s2$ , à droite).

On note tout d'abord que ces deux angles limites sont inférieurs à l'angle limite de  $7^\circ$  qui est la contrainte réelle qui nous a été donnée. On ne va cependant pas exploiter cet avantage en vérifiant qu'on arrive à des angles limites similaires pour des poussées plus faibles ceci n'étant pas l'objet de cette étude.

Il est assez surprenant de constater que sur aucune des deux stratégies on ne constate d'inversion de poussées sur tous les péricées. En effet on a bien les inversions pour la poussée normale mais elles ne se retrouvent pas toujours sur la poussée ortho-radiale. Ceci a pour effet d'accroître d'avantage le paramètre de l'ellipse (il atteint les  $50Mm$  alors que ce n'est jamais le cas sans la contrainte de cône) et de commencer par augmenter l'excentricité au lieu de la faire décroître dès le début du transfert. Cela vient du fait que pour pouvoir corriger l'inclinaison il nous faut une poussée normale maximum qui induit une poussée ortho-radiale très forte. La correction de l'inclinaison entraîne alors une poussée ortho-radiale cumulée bien supérieure à ce qui

est nécessaire pour les corrections du paramètre et de l'excentricité. C'est pour cela que la stratégie consiste à augmenter artificiellement le coût de ces deux corrections en n'allant pas au plus cours de la déformation de l'orbite.

Une des différences majeures entre ces deux stratégies est que celle de s2 comporte 1 révolution de plus que celle de s1 ce qui, vu le transfert considéré, correspond à une augmentation de  $t^f$  de 20 % alors que la différence sur  $\alpha$  n'est que de 10 %.

Au vu des remarques précédentes, on peut se demander si malgré l'emploi de la continuation différentielle on n'a pas eu de *saut* de chemin de zéros car la structure des poussées ne correspond plus exactement aux structures initiales. Pour cela examinons les deux chemins de zéros associés aux stratégies s1 et s2 qui sont représentés à la figure 6.8.

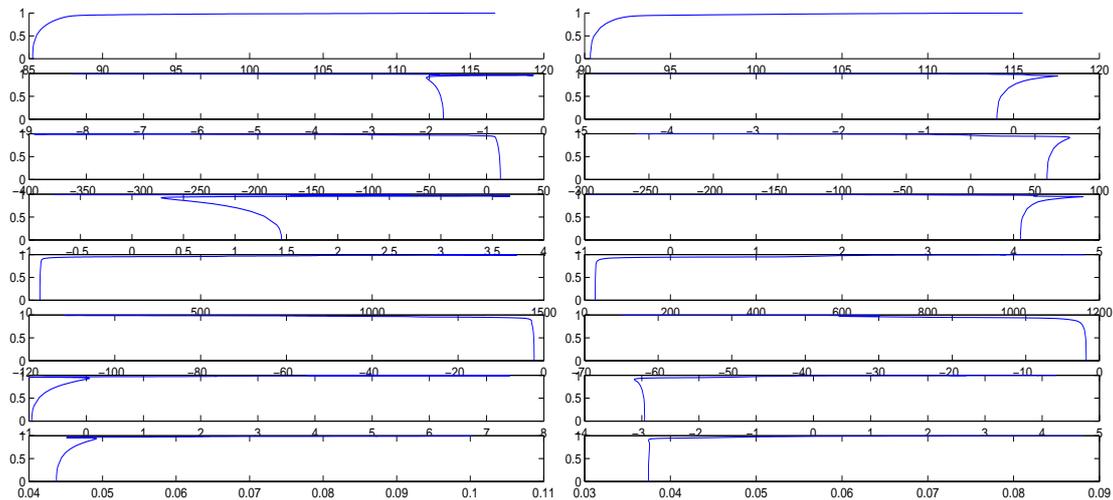


FIG. 6.8 – Chemins de zéros correspondant aux deux stratégies s1 (gauche) et s2 (droite).

Avant d'aller plus loin, il nous faut expliquer comment un *saut* de chemin de zéros peut être possible sur la continuation différentielle. Un tel évènement est peu probable mais non impossible puisque dans la phase de correction on ne vérifie pas que l'on reste sur le même chemin mais juste que l'on retourne sur le chemin de zéros le plus proche. De plus, la correction se faisant par des pas de Newton il se peut que le point obtenu par la prédiction ne se situe plus dans la zone de convergence du chemin précédemment suivi mais dans celle d'un autre chemin voisin.

Retournons maintenant à nos deux chemins de zéros. On peut effectivement voir sur les deux chemins une sorte de décrochage très brutal. Cependant, comme il ne débouche pas sur un chemin d'évolution complètement différent de celui avant décrochage on en conclut que ce dernier n'est proba-

blement dû qu'à une précision dégradée du suivi de chemin. C'est en fait ce qu'on constate lors des étapes de raffinement où on voit apparaître des points qui ne sont pas de très bons zéros. Ces points permettent tout de même de trouver de bons zéros par la suite.

On constate également que comme on pouvait s'y attendre les chemins de zéros semblent partir à l'infini, raison pour laquelle ils ne convergeront pas vers  $\alpha = 0$ .

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de  $t^f$  pour les deux stratégies. Elle est donnée à la figure 6.9.

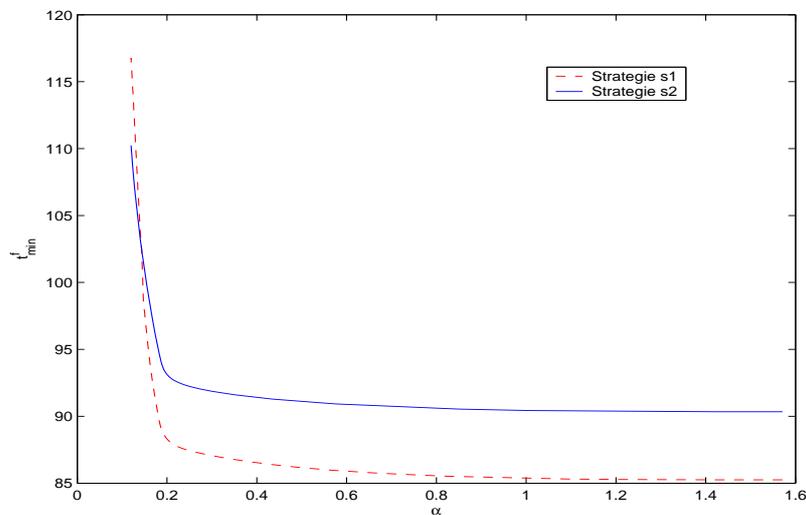


FIG. 6.9 – Evolution de  $t^f$  pour les deux stratégies s1 et s2 par rapport à  $\alpha$ .

Comme on pouvait s'y attendre on a une croissance très brusque du temps de transfert pour les dernières valeurs de  $\alpha$  (les plus petites). On assiste donc véritablement à une explosion du temps transfert qui rend le transfert numériquement très dur à réaliser.

Pendant, le transfert reste réalisable tant que  $\alpha > 0$  bien qu'il soit clair que les temps de transfert correspondant deviennent prohibitifs.

On constate que la stratégie s2 devient meilleure que s1 vers la fin du transfert ce qui n'est pas vraiment surprenant puisqu'on a déjà vu le cas se produire pour le transfert coplanaire.

Ceci confirme donc que la contrainte de cône doit être relaxée afin de s'autoriser des poussées hors-plan. Ceci est d'autant plus vrai que même si les temps de transfert pour notre inclinaison initiale ne sont pas d'une durée repoussante, la prise en compte d'une inclinaison initiale plus importante (correspondant par exemple à un défaut de largage d'Ariane ou du lancement à partir d'une base de lancement moins équatoriale) rendra ces mêmes temps de transfert inacceptables.

La section suivante introduit la minimisation de la consommation avec contrainte de cône double.

### 6.3 Transfert coplanaire, maximisation de la masse finale

#### Formulation et méthode

On étudie dans cette section le problème du transfert coplanaire avec maximisation de la masse finale et contrainte de cône double. La contrainte est celle présentée dans la première section de ce chapitre, l'ensemble des commandes admissibles est donc  $\mathcal{U}_\alpha$ .

Pour la modélisation du problème de transfert, on dispose de trois formulations différentes. La première formulation ( $t^f$  fixé et  $L^f$  libre) pourra être intéressante du fait de l'existence des minima locaux qui, comme on a pu le voir, peuvent se révéler utiles en tant qu'initialisation correcte d'un suivi de chemin de zéros.

Cependant, on a remarqué que pour le problème non contraint la stratégie optimale vérifie déjà une contrainte de cône double d'angle  $\alpha$  faible (car la poussée est presque uniquement ortho-radiale). On va donc choisir une des deux dernières formulations en espérant que les minima locaux nous seront inutiles. Notre choix se porte finalement sur la troisième formulation ( $t^f$  libre et  $L^f$  fixé) pour des raisons pratiques de mise en œuvre (on n'a pas besoin de chercher le  $c_{L^f}^{opt}$  qui variera très certainement avec  $\alpha$ ) et de rapidité de convergence. Il est à noter qu'il n'est plus nécessaire d'appliquer le changement de variable après l'application du PMP puisque que dans le cas coplanaire l'expression de la dynamique du système reste linéaire par rapport au contrôle.

On prend comme masse de référence la masse finale résultant du transfert en temps minimum et on se fixe la longueur finale comme un multiple suffisamment grand de la longueur finale minimum du cas non contraint.

On aura pour la résolution trois homotopies à effectuer. La première porte sur les conditions initiales et est une continuation discrète. La seconde relie le critère de minimisation de l'énergie à celui de minimisation de la consommation. Et finalement la troisième fait décroître  $\alpha$  jusqu'à la valeur souhaitée (en général 0).

La minimisation du Hamiltonien pour la dernière homotopie est similaire à celle de la minimisation du temps de transfert. Elle est explicitée dans l'annexe B.

Pour la décroissance de  $\alpha$  on prend la même dépendance linéaire par

rapport au paramètre homotopique que pour la minimisation du temps de transfert.

Voyons maintenant les résultats obtenus.

### Résultats

Aucune des trois homotopies ne pose de problème et on obtient très rapidement des résultats. Une stratégie de poussée pour  $T_{max} = 10N$ . est donnée à la figure 6.10

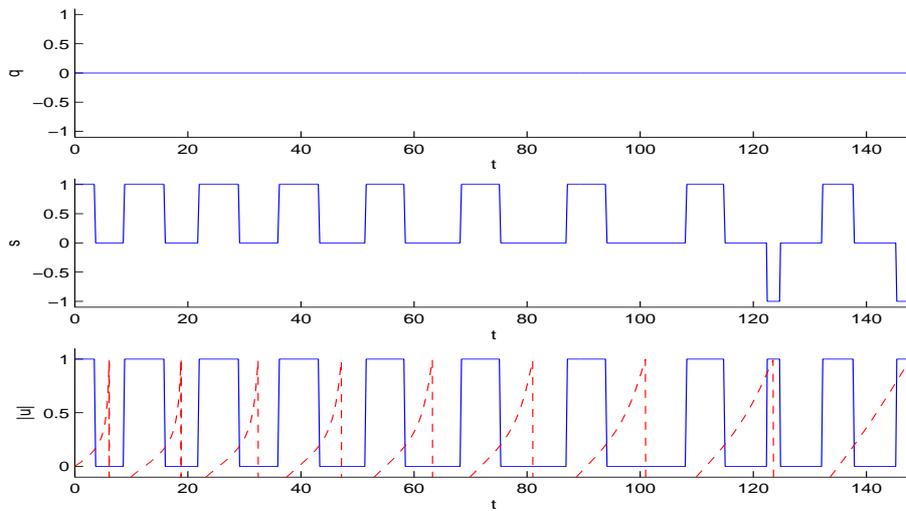


FIG. 6.10 – Stratégie de poussée pour  $T_{max} = 10N$ ,  $c_{Lf} = 2$  et  $\alpha = 0$ .

On constate immédiatement qu'on retrouve les poussées centrées autour des passages aux apogées et celles autour des derniers périgées. La différence entre cette stratégie et celles sans contrainte de cône vient uniquement du fait que la poussée radiale est nulle.

Les chemins de zéros menant aux solution pour  $\alpha = 0$  sont verticaux jusqu'à environ  $\alpha = 0.3$  radian après quoi ils varient dans de faibles proportions. Ceci venant du respect intrinsèque pas les stratégies non contraintes de la contrainte de cône double.

La masse finale ne décroît par beaucoup quand  $\alpha$  diminue comme on peut le voir sur la figure 6.11.

La décroissance est d'ailleurs de plus en plus faible à mesure que  $c_{Lf}$  augmente.

Pour  $c_{Lf} = 1.5$  la perte de masse finale est de l'ordre de  $3kg$ . et est donc tout à fait acceptable si on considère que l'augmentation du  $t_{min}^f$  est de l'ordre de 10 %.

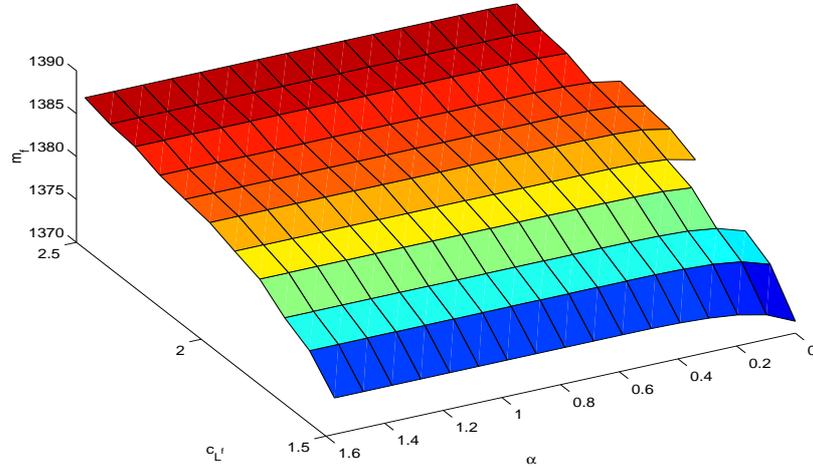


FIG. 6.11 – Evolution de la masse finale en fonction de  $c_{Lf}$  et  $\alpha$  pour  $T_{max} = 10N$ .

En ce qui concerne le temps final induit par  $c_{Lf}$  et  $\alpha$ , la figure 6.12 représente son évolution.

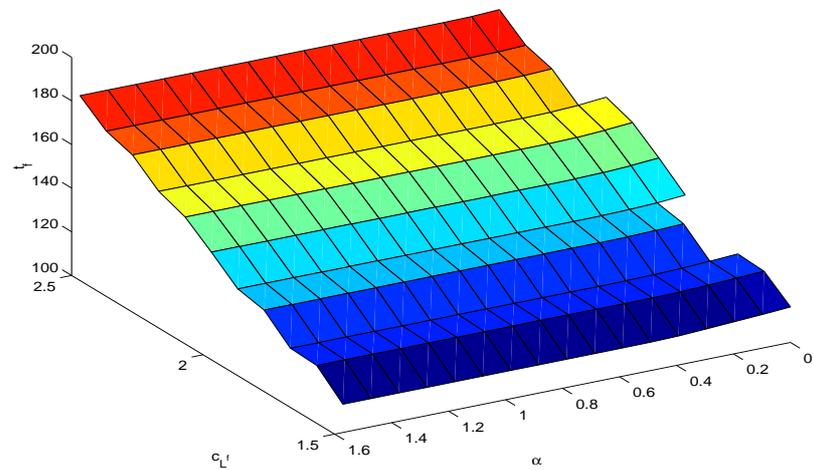


FIG. 6.12 – Evolution de  $t^f$  par rapport à  $c_{Lf}$  et  $\alpha$  pour  $T_{max} = 10N$ .

On constate que  $t^f$  ne croît pas beaucoup et que sa croissance est même inférieure à celle du  $t_{min}^f$ .

De tous les résultats présentés dans cette section on peut conclure que la maximisation de la masse finale avec contrainte de cône double et transfert

coplanaire ne pose aucun problème de résolution.

De plus la consommation de carburant reste tout à fait acceptable même dans le cas limite où  $\alpha = 0$ . Les temps de transfert induits restent également acceptables.

Pour clore ce cas coplanaire, ajoutons qu'on retrouve les résultats 10 N pour les autres poussées. Le tableau 6.13 résume les temps de calcul, masse finale et temps final pour différentes poussées (le  $c_{tf}$  qu'il faut appliquer au  $t_{min}^f$  du transfert non contraint).

$T_{max}$ (N.)	$c_{Lf}$	$t_{exec}$ (s.)	$c_{tf}$	$m^f$ (kg.)	$ \mathcal{S} $
10.	1.5	14.	1.36	1370.87	2.e-10
1.	1.5	213	1.37	1373.00	8.e-11
0.5	1.5	193	1.37	1373.05	1.e-6
0.1	1.5	836	1.37	1372.97	1.e-9
10.	2.	10	1.73	1381.87	1.e-10
1.	2.	93	1.74	1382.19	2.e-10
0.5	2.	182	1.74	1382.17	1.e-10
0.1	2.	1185	1.74	1382.17	2.e-9

FIG. 6.13 – Résumé des résultats du transfert coplanaire avec masse maximale et contrainte de cône.

On constate qu'on garde la régularité du problème en terme de masse finale (indépendance par rapport à  $T_{max}$  a  $c_{Lf}$  donné) et du temps final ( $c_{tf}$  vs.  $c_{Lf}$  indépendant de  $T_{max}$ ). Cette régularité nous permet d'affirmer, sans l'avoir vérifié, que la longitude finale minimum de transfert pour  $\alpha = 0$  est, comme pour le cas non contraint, inversement proportionnel à  $T_{max}$ .

Les temps d'exécution indiqués tiennent compte des trois homotopies. Les proportions respectives des temps d'exécution de chaque homotopie (1 : conditions initiales; 2 : énergie vers masse; 3 : décroissance de  $\alpha$ ) sont approximativement de (20–30–50) %. Le temps d'exécution de la décroissance de  $\alpha$  est donc toujours plus important que celui des autres homotopies. Cependant il reste acceptable.

Les résultats obtenus nous permettent d'estimer que notre méthode de résolution est tout à fait satisfaisante pour le cas coplanaire. Touchons maintenant quelques mots à propos du cas non coplanaire.

### Transfert non-coplanaire

Comme pour le transfert en temps minimum, le système avec cône double et angle au sommet nul n'est pas contrôlable du fait de l'impossibilité de la correction hors-plan. Les expérimentations menées avec ce cône double se sont soldées par un échec à partir de  $\alpha = 0.15$  radian (pour  $T_{max} = 10N$  et  $c_{Lf} = 2$ ) ce qui est moins bon que pour le transfert en temps minimum. Notons que cet angle est supérieur à  $7^\circ$  et ne satisfait donc pas la contrainte opérationnelle. Notons de plus qu'à longitude finale égale ( $c_{Lf} = 2$ ), le transfert (toujours pour  $T_{max} = 10N$ ) avec  $\alpha = 0.15$  radian consomme  $15\text{ kg}$  de plus que celui sans contrainte de cône, ce qui est relativement important.

### Conclusion

Ce chapitre consiste en une solide étude préliminaire du transfert avec contrainte de cône double. L'idée de notre méthode de résolution dans le cas sans contrainte de cône s'est vue appliquée avec succès au cas coplanaire contraint. Les deux critères de minimisation du temps de transfert et de maximisation de la masse finale sont traités avec une certaine réussite pour le cas coplanaire. Cependant, le cas non coplanaire pose plus de problèmes et il semble que l'approche homotique employée ne soit pas appropriée.

Des résultats obtenus, le plus important est le fait que le temps de transfert minimal n'augmente pas dans des proportions trop importantes quand la contrainte de cône double (coplanaire) devient plus restrictive.

De plus, pour le cas coplanaire, la maximisation de la masse finale montre que la consommation n'est pas affectée de façon excessive à mesure que décroît le demi-angle au sommet du cône double (toujours dans le cas coplanaire).



## Chapitre 7

# Approche directe

Ce chapitre présente une approche directe du problème de transfert orbital coplanaire avec maximisation de la masse finale. On y introduit tout d'abord l'outil utilisé, **Knitro**, et le passage de notre problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation. Passage réalisé par discrétisation complète de l'état et du contrôle. On étudie ensuite l'application de l'approche directe à deux problèmes simples possédant les mêmes caractéristiques que le problème de transfert mais à un degré moindre. La fin du chapitre est consacrée aux premières expérimentations menées sur notre problème de transfert.

### 7.1 Méthode utilisée : Knitro

Cette étude n'est pas menée de façon totalement gratuite puisqu'elle nous permet d'une part de valider notre méthode indirecte et d'autre part de vérifier la faisabilité de l'approche directe. Cette faisabilité se révélerait intéressante car elle permettrait d'envisager de résoudre le problème de transfert avec des contraintes d'états ou avec la contrainte de cône. En effet, on a vu dans le chapitre précédent que la méthode indirecte utilisée ne donne pas toujours de résultat satisfaisant sur cette contrainte de cône.

Il a déjà été présenté une approche directe basée sur la discrétisation du contrôle qui était le sujet du rapport [16].

L'approche directe utilisée ici consiste en la transformation d'un problème de contrôle optimal de dimension infinie en un problème d'optimisation en dimension finie. Cette transformation se fait par discrétisation de l'état et du contrôle.

Le logiciel employé pour la résolution est **Knitro**. Nous allons maintenant présenter rapidement le principe de base de l'algorithme utilisé par

**Knitro.**

Pour plus de précisions quant aux étapes de l'algorithme (quel calcul de la région de confiance, quelle approximation du hessien du Lagrangien ...) nous renvoyons le lecteur à [13] et [12].

Les problèmes traités par l'algorithme sont des problèmes d'optimisation non linéaire de la forme :

$$(NLP)_0 \begin{cases} \min & J(x) \\ l(x) & = 0 \\ g(x) & \leq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

avec  $J : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $l : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$  et  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  régulières,  $(NLP)_0$  n'est pas convexe et  $n$  est grand.

La méthode consiste alors à transformer la résolution du problème 7.1 en la résolution successive de sous-problèmes barrières de la forme :

$$(P_\mu) \begin{cases} \min_{x,s} & J(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln(s_i) \\ l(x) & = 0 \\ g(x) + s & = 0 \\ s & \geq 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

avec  $\mu$  le paramètre barrière et  $s$  le jeu (positif). Chaque sous problème est résolu approximativement (entendre par là : sans une grande précision) par des itérations *SQP* avec région de confiance. D'une résolution à l'autre on fera bien entendu décroître  $\mu$  jusqu'à arriver à l'annuler.

**Remarque 7.1.** *Notons que l'approche par point intérieur se rapproche de l'idée des méthodes homotopiques ou encore des méthodes de pénalisation. Dans notre cas le paramètre homotopique serait le paramètre barrière  $\mu$  qu'on souhaite réduire à zéro.*

Pour caractériser une solution du problème barrière  $(P_\mu)$ , on introduit son Lagrangien :

$$\mathbf{L}(x, s, \lambda_l, \lambda_g) = J(x) - \mu \sum_{i=1}^m \ln(s_i) + {}^t\lambda_l l(x) + {}^t\lambda_g (g(x) + s). \quad (7.3)$$

Pour la solution de 7.2, on se contentera d'une solution approchée  $(\hat{x}, \hat{s})$  satisfaisant  $E(\hat{x}, \hat{s}; \mu) \leq \epsilon_\mu$ , où  $E$  mesure les conditions d'optimalités de  $(P_\mu)$  et est définie par :

$$E(x, s, \mu) = \max \left( \|\nabla J(x) + A_l(x)\lambda_l + A_g(x)\lambda_g\|_\infty, \right. \\ \left. \|S\lambda_g - \mu e\|_\infty, \|l(x)\|_\infty, \|g(x) + s\|_\infty \right) \quad (7.4)$$

avec  $e = {}^t(1, \dots, 1)$ ,  $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_m)$  et  $A_l(x) = [\nabla l_1(x), \dots, \nabla l_k(x)]$ ,  $A_g(x) = [\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)]$ .

Les termes de 7.4 correspondent aux équations du système KKT perturbé sur lequel l'algorithme est basé.

$\lambda_g$  et  $\lambda_l$  sont approximés à chaque itération *SQP*.

On fait décroître  $\epsilon_\mu$  d'un problème à l'autre et il doit converger vers 0. Le test final d'optimalité se fait sur  $E(x, s; 0)$ .

On peut alors décomposer l'algorithme comme suit :

**Algorithme 1 :** Algorithme barrière de résolution de  $(NLP)_0$

Choisir  $\mu > 0$  et  $\epsilon_\mu > 0$ ,  $\theta \in ]0, 1[$  et la précision finale  $\epsilon_{tol}$ .

Choisir un point initial  $x$  et  $s > 0$  et évaluer la fonction objectif, les contraintes et leurs dérivées en  $x$ .

**Répéter jusqu'à**  $E(x, s, 0) \leq \epsilon_{tol}$

1. Appliquer une méthode *SQP* avec régions de confiance, en partant de  $(x, s)$  pour trouver une solution approchée  $(\hat{x}, \hat{s})$  du problème barrière  $(P_\mu)$  satisfaisant  $E(\hat{x}, \hat{s}; \mu) \leq \epsilon_\mu$
2. Poser  $\mu \leftarrow \theta\mu$ ,  $\epsilon_\mu \leftarrow \theta\epsilon_\mu$ ,  $x \leftarrow \hat{x}$  et  $s \leftarrow \hat{s}$ .

**Fin**

L'étape 1 (l'itération *SQP* de l'algorithme) est bien entendu la plus coûteuse mais nous ne la présenterons pourtant pas, cela n'apportant pas grand chose à la compréhension.

Nous allons maintenant rapidement présenter l'approche directe appliquée à quelques exemples simples.

## 7.2 Problèmes simples

### Introduction

Afin d'avoir une idée de la possibilité de résolution de notre problème de transfert avec maximisation de la masse finale, nous testons tout d'abord des problèmes simples comportant à un degré moindre les mêmes difficultés.

Nous traitons alors un problème avec commande discontinue de dimension 1 puis un problème avec commande discontinue de dimension 3 avec de plus une équation de variation de masse de la forme de celle du transfert orbital.

Ces tests préliminaires sont une vérification simple du comportement de **Knitro** et seront utiles pour l'explication des résultats obtenus pour le transfert.

Traitions maintenant notre premier problème simple.

**Problème simple 1**

Le premier problème traité est :

$$(P_1) \begin{cases} \min \int_0^2 |u(t)| dt \\ \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ |u(t)| \leq 1 \\ x(0) = 0 \\ x(2) = 0.5 \end{cases} \quad (7.5)$$

Par application du principe du maximum de Pontryagin, on trouve très facilement la solution dont le contrôle  $u$  vaut 0 sur  $[0, \bar{t}]$  et 1 sur  $]\bar{t}, 2]$  avec  $\bar{t} \approx 1.3068$ .

Le coût optimal est donc de l'ordre de :

$$J^* = 2 - \bar{t} \approx 0.6932.$$

Comme on en a déjà fait la remarque à la fin de la section précédente, l'implantation de l'approche directe se fait ici par discrétisation de l'état  $x$  et du contrôle  $u$ .

De plus, le problème étant très régulier si l'on excepte la discontinuité en  $\bar{t}$ , on peut se contenter de discrétiser la dynamique de l'état ( $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ ) par un schéma d'Euler. Ce schéma a l'énorme avantage d'être facilement dérivable et implémentable.

Avant de discrétiser  $(P_1)$ , il nous faut soulever un point important de l'approche directe. Cette approche nécessite en effet la dérivabilité du critère et de toutes les contraintes par rapport aux paramètres à optimiser ( $J$ ,  $h$ ,  $g$  régulières). Or notre critère est malheureusement non dérivable en zéro ce qui est d'autant plus préjudiciable que la commande optimale est justement nulle sur un grand intervalle de temps.

Nous n'avons donc pas le choix, il nous faut modifier notre critère afin de le rendre dérivable par rapport à  $u$ . Pour ce faire, on choisit de le lisser de la façon suivante :

$$\min \int_0^2 |u(t)| dt \Rightarrow \min \int_0^2 |u(t)|_\varepsilon dt. \quad (7.6)$$

avec

$$|u|_\varepsilon \stackrel{def}{=} \sqrt{u^2 + \varepsilon}.$$

et  $\varepsilon > 0$ . On a bien entendu égalité des critères si  $\varepsilon = 0$ . On note que ce lissage n'est pas unique, on aurait très bien pu prendre  $|u|^{1+\varepsilon}$  par exemple (mais ce critère n'est pas  $C^2$ ).

Nous pouvons maintenant présenter le problème d'optimisation obtenu par discrétisation du problème de contrôle.

Soit alors  $NS$  le nombre de pas de discrétisations et  $h_i$  ( $i = 1, \dots, NS$ ) le pas de discrétisation au point  $x_i$ . Le schéma de discrétisation nous donne la dynamique discrétisée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = (t_i)_{i=0, \dots, NS} \\ t_0 = 0 \\ t_{NS} = 2 \\ h_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \dots, NS \\ x = (x_i)_{i=0, \dots, NS} \\ x_0 = x(0) \\ x_{NS} = x(2) \\ u = (u_i)_{i=0, \dots, NS-1} \\ |u_i| \leq 1, i = 0, \dots, NS - 1 \text{ (contraintes de boîtes)} \\ h_i(x) = x_i + (h_i - 1)x_{i-1} - h_i u_{i-1}, i = 1, \dots, NS \end{array} \right. \quad (7.7)$$

l'inconnue du problème d'optimisation est alors :

$$z = (x_0, \dots, x_{NS}, u_0, \dots, u_{NS-1}). \quad (7.8)$$

le critère à minimiser est (schéma d'Euler) :

$$J(z) = \sum_0^{NS-1} h_{i+1} |u_i|_\varepsilon. \quad (7.9)$$

Le problème d'optimisation est maintenant complètement défini et on peut s'attaquer à sa résolution.

Pour cette résolution on teste deux initialisations. La première est une initialisation nulle ( $z = 0$ ), la seconde est une initialisation faisable (évolution linéaire de l'état).

On teste également deux discrétisations différentes. La première est une discrétisation uniforme, la seconde est adaptée à la discontinuité du contrôle en ce sens qu'elle comporte  $\bar{t}$  (avant et après, la discrétisation est uniforme).

Le tableau 7.1 résume les expérimentations menées.

*Note* : *NCV* signifie ici non convergent après 1000 itérations et \* désigne toutes les valeurs ayant été testées  $1.e - 4$  et  $1.e - 8$  pour  $\varepsilon$ , zéro et faisable pour l'initialisation, et 10, 50, 250 et 500 pour  $NS$ .

Les résultats obtenus sont corrects en terme de précisions mais on note qu'il ne faut pas augmenter de manière excessive le nombre de pas de discrétisation au risque de faire exploser le temps de calcul.

$\varepsilon$	Discrétisation	Initialisation	$NS$	texec (s.)	$J^*(z)$
1.e-4	uniforme	faisable	50	0.41	0.6898
1.e-4	uniforme	faisable	500	33.52	0.7025
1.e-4	uniforme	zéro	50	0.29	0.6898
1.e-8	uniforme	*	*		NCV
*	adaptée	*	*		0.5

TAB. 7.1 – Résultats pour  $(P_1)$ .

$(P_1)$  étant assez simple, les deux initialisations convergent sans aucun problème pour  $\varepsilon = 1.e - 4$  et la discrétisation uniforme.

On comprend aisément que pour  $\varepsilon$  trop faible ( $1.e - 8$  ici), le critère devient numériquement non dérivable en ce sens que les dérivées calculées ne reflètent plus le comportement réel du problème.

Plus étonnant sont les résultats pour la discrétisation adaptée dont le critère vaut 0.5 ce qui n'est en principe pas possible. Nous supposons que ceci vient du fait qu'en  $\bar{t}$  le contrôle optimal n'a pas de valeur unique ce qui perturbe la résolution de  $(P_1)$ . Cette explication n'est cependant pas tout à fait satisfaisante puisque le problème résolu n'est pas  $(P_1)$  mais  $(P_1)_\varepsilon$  avec le lissage qui lui n'induit pas de discontinuité sur le contrôle. Notons que le contrôle trouvé n'a rien à voir avec le contrôle optimal et que le critère d'optimalité est extraordinairement bien vérifié.

Comparons maintenant visuellement les solutions calculées pour différentes valeurs de  $NS$ . La figure 7.1 représente cette comparaison.

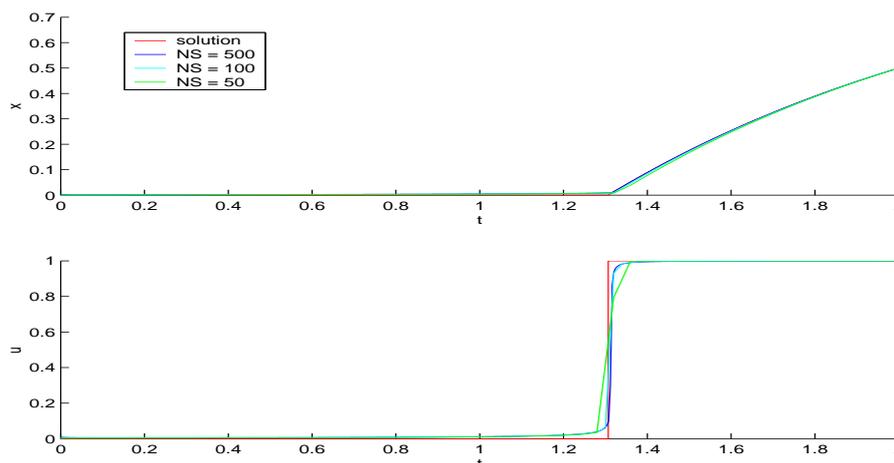


FIG. 7.1 – Comparaison des solutions calculées avec la solution optimale pour  $\varepsilon = 1.e - 4$  et plusieurs  $NS$  (discrétisation uniforme).

Comme on pouvait s'y attendre, on constate que plus le nombre de points

de discrétisation est élevé, plus la solution trouvée est proche de la solution optimale.

De plus, le lissage approche assez correctement la discontinuité mais on sent malgré cela que pour un grand nombre de discontinuités, on risque de perdre beaucoup de précision sur la fonction coût. On devrait cependant pouvoir améliorer la précision sans pour autant augmenter de façon prohibitive le nombre de pas de discrétisation en adoptant un schéma de discrétisation plus précis (trapèze, Runge-Kutta, ...).

Abordons maintenant le second problème.

### Problème simple 2

Ce problème est le suivant :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^2 |u(t)| dt \text{ ou } \min -m(2) \\ \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + u(t) \\ \dot{m}(t) = -|u(t)| \\ |u(t)| \leq 1 \\ (x, y, m)(0) = (0, 0, 10) \\ (x, y, m)(2) = (0.75, 0, ?) \end{array} \right. \quad (7.10)$$

L'application du PMP nous donne un coût optimal :

$$\int_0^2 |u^*(t)| dt = 0.7811 \text{ ou encore } m^*(2) = 9.2389. \quad (7.11)$$

pour les mêmes raisons que dans le problème 1, on lisse les  $|u|$ , ce qui nous donne le problème :

$$(\tilde{P}_2) \left\{ \begin{array}{l} \min \int_0^2 |u(t)|_\varepsilon dt \text{ ou } \min -m(2) \\ \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + u(t) \\ \dot{m}(t) = -|u(t)|_\varepsilon \\ |u(t)| \leq 1 \\ (x, y, m)(0) = (0, 0, 10) \\ (x, y, m)(2) = (0.75, 0, ?) \end{array} \right. \quad (7.12)$$

Comme pour le problème  $(P_1)$  on discrétise les états et le contrôle selon un schéma d'Euler. On note  $z$  les paramètres du problème d'optimisation obtenu.

On n'utilise plus que la discrétisation uniforme puisqu'on a rencontré des problèmes avec la discrétisation adaptée de  $(P_1)$ . Ceci n'est pas un handicap puisque de toutes manières on n'est pas sensé connaître l'instant de commutation du contrôle.

Le tableau 7.2 résume les expérimentations menées.

$\varepsilon$	$NS$	Critère ?	texec (s.)	$J(z)$
1.e-4	10	consommation	0.07	0.7776
1.e-4	100	consommation	9.52	0.7776
1.e-4	250	consommation	N/A	NCV
1.e-4	10	masse	0.10	9.222
1.e-4	100	masse	12.7	9.222
1.e-4	250	masse	71.70	9.222
1.e-8	10 à 250	les deux	N/A	NCV

TAB. 7.2 – Résultats d'exécution pour les deux critères et plusieurs  $NS$  ( $N/A$  = Non Applicable).

On constate que les deux critères sont quasiment équivalents en terme de résultats et que le nombre de pas de discrétisation ne doit pas être trop élevé sous peine de non convergence. Notons qu'en toute logique les deux critères devraient être tout à fait équivalents mais ce serait oublier que la fonctionnelle à minimiser et les contraintes dégalités ne sont pas traitées de la même façon.

On pourra donc prendre le critère masse pour notre problème de transfert orbital, critère beaucoup plus simple à implémenter.

Comparons maintenant les solutions calculées avec la solution optimale, ce qui est fait sur la figure 7.2.

Les différences entre les solutions sont plus importantes que pour le problème  $(P_1)$  surtout pour un faible nombre de pas de discrétisation. Cependant, ces différences restent toujours acceptables si on considère un nombre de pas de discrétisation suffisamment important.

Passons maintenant au transfert orbital coplanaire.

### 7.3 Transfert orbital

Pour utiliser notre approche directe sur le problème de transfert orbital, nous allons tout d'abord en donner la formulation adoptée.

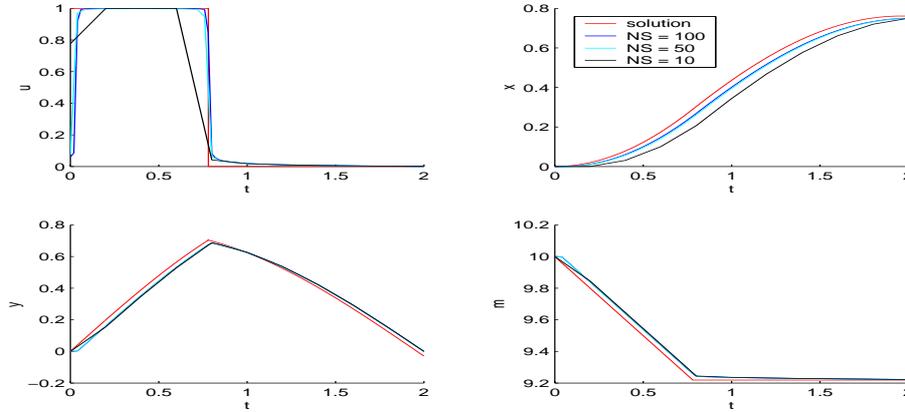


FIG. 7.2 – Comparaison des solutions calculées avec la solution optimale pour plusieurs  $NS$ .

### Formulations

On considère ici notre problème de transfert orbital coplanaire. L'approche utilisée pour transformer notre problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation est celle donnée dans [15]. Nous allons cependant la rappeler.

Tout d'abord on utilise la formulation en longitude du problème car comme on va discrétiser notre problème à pas fixe (et uniforme), le temps n'est clairement pas la bonne variable indépendante (les évolutions des paramètres orbitaux sont beaucoup plus régulières par rapport à la longitude  $L$ ).

Le problème d'optimisation sera alors simplement notre problème de contrôle discrétisé suivant  $L$ . Soit alors  $NS$  le nombre de pas de discrétisation. Le problème d'optimisation sera alors de la forme :

$$\begin{cases} \min J(z) \\ l(z) = 0 \\ g(z) \leq 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

avec  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,4})$  l'état  $(P, e_x, e_y, m)$  au point de discrétisation  $L_i$  et  $z$  la variable regroupant les états et le contrôle à tous les instants de discrétisations :

$$z = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{0,4}, \dots, x_{NS,1}, x_{NS,2}, x_{NS,3}, x_{NS,4}, u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{NS-1,1}, u_{NS-1,2}).$$

*Remarque :* on n'a pas besoin de  $u_{NS,\{1,2\}}$ .

Le nombre total de variables sera alors de  $n = 4 * (NS + 1) + 2 * NS$ .

Les contraintes d'égalités sont données d'une part par les contraintes aux

deux bouts :

$$\begin{aligned}
x_{0,1} &= P^0 \\
x_{0,2} &= e_x^0 \\
x_{0,3} &= e_y^0 \\
x_{0,4} &= m^0 \\
x_{NS,1} &= P^f \\
x_{NS,2} &= e_x^f \\
x_{NS,3} &= e_y^f
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Et d'autre part par les contraintes sur la dynamique des états :

$$x_{i+1} = x_i + h_i \Phi(L_i, x_i, u_i, h_i), i = 0, \dots, NS - 1 \tag{7.15}$$

où  $h_i = L_{i+1} - L_i$  et où la fonction  $\Phi$  est donnée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
\Phi(L, x, u, h) &= \frac{1}{6}f(L, \phi_1(L, x, u, h), u) \\
&+ \frac{1}{3}f(L + h/2, \phi_2(L, x, u, h), u) \\
&+ \frac{1}{3}f(L + h/2, \phi_3(L, x, u, h), u) \\
&+ \frac{1}{6}f(L, \phi_4(L, x, u, h), u)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(L, x, u, h) &= x \\
\phi_2(L, x, u, h) &= x + h/2f(L, \phi_1(L, x, u, h), u) \\
\phi_3(L, x, u, h) &= x + h/2f(L + h/2, \phi_2(L, x, u, h), u) \\
\phi_4(L, x, u, h) &= x + hf(L + h/2, \phi_3(L, x, u, h), u)
\end{aligned}$$

Quant aux contraintes d'inégalités, elles viennent simplement du fait que le contrôle est borné :

$$u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2 \leq T_{max}^2, i = 0, \dots, NS - 1 \tag{7.17}$$

On normalise ces contrôles, toujours notés  $u_{i,1}$  et  $u_{i,2}$  :

$$u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2 \leq 1, i = 0, \dots, NS - 1. \tag{7.18}$$

La dynamique s'écrit de la façon suivante (avec  $x = (P, e_x, e_y)$  séparé de la masse  $m$ ) :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dL} &= \frac{T_{max}}{m}(u_1 f_1(L, x) + u_2 f_2(L, x)) \\
\frac{dm}{dL} &= -T_{max} \sqrt{\frac{P}{\mu^0} \frac{P}{W^2}} \beta |u|_\varepsilon
\end{aligned} \tag{7.19}$$

avec  $f_1, f_2$  les champs de vecteur du chapitre 1 (en dimension 2) et  $W$  également comme présenté dans le premier chapitre.

La variation de la masse est lissée pour rester dérivable.

Afin de ne pas aborder en même temps toutes les difficultés inhérentes à notre problème de transfert, nous considérerons 4 approches différentes. Leurs différences venant de la prise en compte ou non de la variabilité de la masse et du critère choisit.

Les critères envisagés sont évidemment la minimisation de l'énergie et la maximisation de la masse :

$$\begin{cases} \min \sum_{i=0}^{NS-1} \sqrt{\frac{P_i}{\mu^0} \frac{P_i}{W_i^2}} h_i (u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2) & \text{(énergie)} \\ \min -x_{NS,4} & \text{(masse finale)} \end{cases}$$

On choisit un schéma d'Euler pour le critère pour pouvoir le dériver à la main. Nous aurions très bien pu utiliser un schéma de Runge-Kutta comme pour la dynamique. Notre choix s'explique simplement par une plus grande facilité de mise en œuvre.

Dans le cas où on considère la masse constante, on utilise le critère de la consommation lissée à la place de la masse finale :

$$\min \sum_{i=0}^{NS-1} \sqrt{\frac{P_i}{\mu^0} \frac{P_i}{W_i^2}} h_i \sqrt{u_{i,1}^2 + u_{i,2}^2 + \varepsilon}.$$

Pour l'implémentation, on calcule les diverses dérivées par différentiation automatique puisque le schéma de discrétisation adopté est trop compliqué à dériver manuellement. L'outil de différentiation utilisé est **Tapenade** [43].

On ne fournit pas le Hessien du lagrangien à **Knitro** puisqu'après quelques expérimentations il apparaît que cela n'améliore en rien la convergence mais augmente grandement les possibilités d'erreurs de codage. On rajoute de plus une mise à l'échelle sur les différents états.

Les formulations employées ayant été précisées, on aborde maintenant les différents problèmes de transfert traités.

### Masse constante, minimisation de l'énergie

On considère en premier lieu le problème à masse constante pour éliminer un état dont la variation n'est pas régulière en l'absence de lissage. Le critère est ici celui de l'énergie pour avoir une commande solution régulière. La principale difficulté du problème d'optimisation est alors sa taille pour les poussées faibles.

Pour la résolution, on initialise les états avec une évolution linéaire. Le contrôle est pris soit identiquement nul, soit toujours maximum dans la direction ortho-radiale.

Ces initialisations ont l'inconvénient de ne pas satisfaire le critère de faisabilité. Mais donner une initialisation faisable demande soit un travail préalable très important si on veut rester proche des solutions optimales, soit d'utiliser par exemple le résultat de la minimisation du temps de transfert avec des états constants en fin de transfert. Nous ne faisons ni l'un ni l'autre puisque l'algorithme gère relativement bien la non faisabilité des points initiaux. De plus, les méthodes directes ne sont pas réputées pour leur sensibilité par rapport à l'initialisation ce qui sera confirmé par les résultats obtenus.

Le nombre de pas de discrétisation est choisi de façon à avoir un nombre minimum de pas par révolution ( $\approx 100$ ). Ceci afin d'avoir une précision acceptable sur les solutions et de pouvoir les comparer à celles trouvées par le tir simple.

La résolution se passe relativement bien et on arrive à résoudre le problème pour des poussées descendant jusqu'à 0.1 Newton, comme le résume le tableau 7.3.

$T_{max}$ (N.)	Initialisation	$NS$	# itérations	$t_{exec}$ (s.)
60	nulle	250	97	5.
60	$u_2$ max	250	137	4.
10	nulle	1000	102	18.
10	$u_2$ max	1000	179	23.
3	nulle	3000	399	180.
3	$u_2$ max	3000	286	177.
1	nulle	5000	320	425.
1	$u_2$ max	5000	454	568.
0.5	nulle	17000	662	1702.
0.5	$u_2$ max	17000	498	1609.
0.1	nulle	85000	5000 (NCV)	33797.
0.1	$u_2$ max	85000	1169	15249.

TAB. 7.3 – Résultats du transfert coplanaire masse constante avec minimisation de l'énergie et approche directe ( $c_{Lf} = 2$ ).

Ces résultats sont pour un  $c_{Lf}$  de 2 et un  $\varepsilon$  de  $1.e - 4$ . Ce  $c_{Lf}$  induit environ 85 révolutions pour une poussée de 1 Newton, de part la régularité de la longitude minimum par rapport à  $T_{max}$  on en déduit facilement le nombre de révolutions pour les autres poussées ( $85./T_{max}$  révolutions).

Les précisions requises pour avoir la convergence sont de  $1.e - 6$  sur la fai-

sabilité et  $1.e-5$  sur l'optimalité. On s'autorise au maximum 5000 itérations ce qui est 5 fois plus que le nombre par défaut.

La condition d'optimalité ( $E(x, s, \mu)$  de (7.4)) requise par défaut étant trop contraignant, on l'a augmenté la passant ainsi de  $1.e-6$  à  $1.e-5$ . Ceci pour des raisons de temps de calcul mais aussi de convergence qui n'est la plupart du temps pas atteinte avec le critère par défaut. On vérifie par la suite qu'une précision de  $1.e-4$  peut suffire dans certain cas et améliore grandement la vitesse de convergence. Il est à noter que le critère de faisabilité est toujours très bien respecté.

Pour des poussées fortes, la différence entre les deux initialisations n'est pas significative. Par contre, pour 0.1 Newton cette différence n'est rien moins que la convergence de l'algorithme. En effet, la convergence n'est pas atteinte pour l'initialisation nulle alors qu'elle l'est pour l'initialisation entièrement ortho-radiale.

Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est croissant en fonction de  $T_{max}$  (à une exception près) et comme le coût de chaque itération est fonction du nombre de paramètres du problème, on en arrive à des temps de calculs relativement important (plus de 4 h. pour la meilleure exécution de 0.1 Newton).

Ce temps d'exécution croissant nous interdit d'envisager des poussées plus faibles ou des longitudes de transfert beaucoup plus importantes sans au préalable faire un sérieux travail sur les initialisations. Pour la discrétisation, on ne peut pas vraiment l'améliorer puisque pour la minimisation de l'énergie, toutes les positions de l'orbite sont utilisées (ce ne sera par contre pas le cas de la minimisation de la consommation).

Vérifions maintenant que les solutions calculées correspondent aux solutions obtenues par le tir simple. La figure 7.3 donne une comparaison de l'approche directe et du tir simple.

On constate que les deux stratégies, sont relativement semblables. On remarque tout de même quelques différences sur les premières révolutions qui viennent peut-être des plus grandes disparités d'évolutions des états et du contrôle lorsque l'orbite est très excentrique.

Ces résultats sont donc satisfaisants.

Ce premier problème de transfert simplifié est donc relativement aisé à résoudre. Cependant la seule difficulté de ce problème est sa taille et non sa régularité. C'est pourquoi nous abordons maintenant le transfert à masse constante avec minimisation de la consommation lissée.

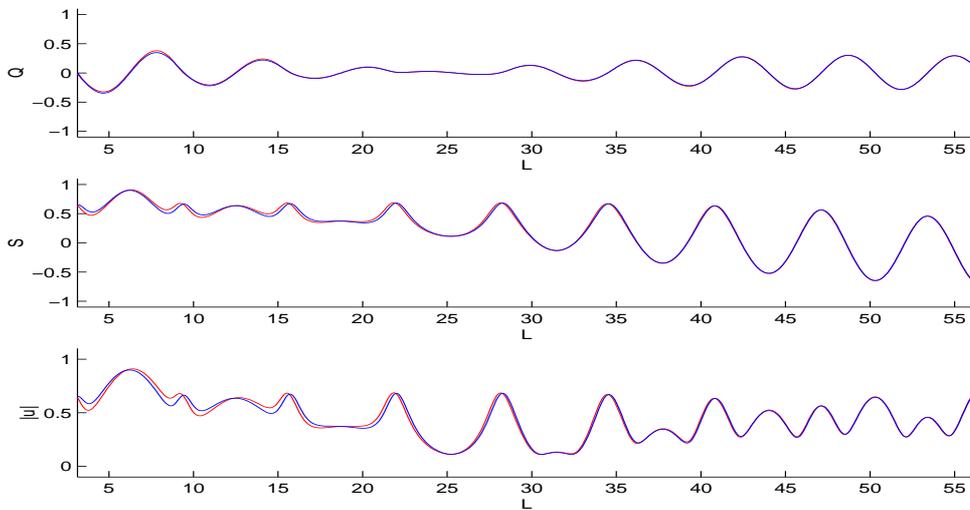


FIG. 7.3 – Stratégie de poussée de l’approche directe et du tir simple pour  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{Lf} = 2$  et  $NS = 1000$ .

### Masse constante, minimisation de la consommation

La difficulté ajoutée par cette formulation est le caractère pseudo-discontinue de la commande solution (pseudo du fait de la régularisation par  $\varepsilon$ ).

On prend les mêmes initialisations que pour la formulation précédente. On note que ces initialisations pourraient être faites en accord avec la structure particulière du contrôle qui privilégie les poussées à l’apogée. Cependant de telles initialisations sont assez compliquées à mettre en œuvre et nécessiteraient de nombreuses expérimentations.

On peut cependant s’inspirer de la méthode homotopique pour tenter une initialisation plus proche de la solution, ou tout du moins faisable. Pour cela, il suffit d’utiliser les résultats de la minimisation de l’énergie pour initialiser la minimisation de la consommation étant donné que cette initialisation montrerait déjà les prémises de la structure optimale. Cette stratégie d’initialisation sera la troisième employée.

De plus, sachant que la poussée sera nulle sur de grands intervalles de temps, on pourrait utiliser une discrétisation plus lâche sur ces intervalles de non poussées. L’inconvénient est qu’on ne connaît pas a priori la localisation exacte des intervalles de poussée nulle. Une idée pour résoudre ce problème de discrétisation serait de faire des raffinages successifs sur une grille de discrétisation en rajoutant des points là où il semble y avoir des poussées et en enlever là où ce n’est pas le cas.

Comme notre étude n'est que préliminaire, on se garde d'employer des discrétisations trop évoluées et on utilise donc la discrétisation uniforme.

Le tableau 7.4 donne un résumé des expérimentations numériques.

$T_{max}$ (N.)	Initialisation	$NS$	# itérations	$t_{exec}$ (s.)
60	nulle	250	127	16.
60	$u_2$ max	250	667	33.
60	énergie	250	673	43.
10	nulle	1000	4199	593.
10	$u_2$ max	1000	5000	445.
10	énergie	1000	63	92.
3	nulle	3000	297	314.
3	$u_2$ max	3000	339	404.
3	énergie	3000	5000 (NCV)	2463.
1	nulle	8500	5000 (NCV)	4082
1	$u_2$ max	8500	5000 (NCV)	3395
1	énergie	8500	5000 (NCV)	4817

TAB. 7.4 – Résultats du transfert coplanaire masse constante avec minimisation de la consommation et approche directe ( $c_{Lf} = 2$ ).

Comme précédemment, le critère d'optimalité est le plus difficile à satisfaire et il a encore été mis à  $1.e - 5$  pour permettre une convergence dans des temps raisonnables.

On peut constater que les résultats sont nettement moins bons que pour la minimisation de l'énergie. On voit même une non convergence à 10 Newton pour l'initialisation entièrement ortho-radiale. De plus, toutes nos initialisations divergent pour 1 Newton ce qui n'est pas un bon présage pour la suite.

L'initialisation avec l'énergie peut donner de très bons résultats (10N.) comme de très mauvais (non convergence pour 3 Newtons). Ceci est cependant assez étonnant puisqu'on pouvait s'attendre à un meilleur comportement de cette initialisation qui est faisable et relativement proche de la solution optimale en terme de structure de la commande.

Les deux autres initialisations ne se départagent pas l'une de l'autre si ce n'est que l'initialisation nulle ne diverge que pour 1 Newton.

Si on compare une solution calculée par l'approche directe avec une solution du tir simple, voilà ce qu'on trouve (figure 7.4).

La différence entre les deux stratégies de poussées est assez faible. Par

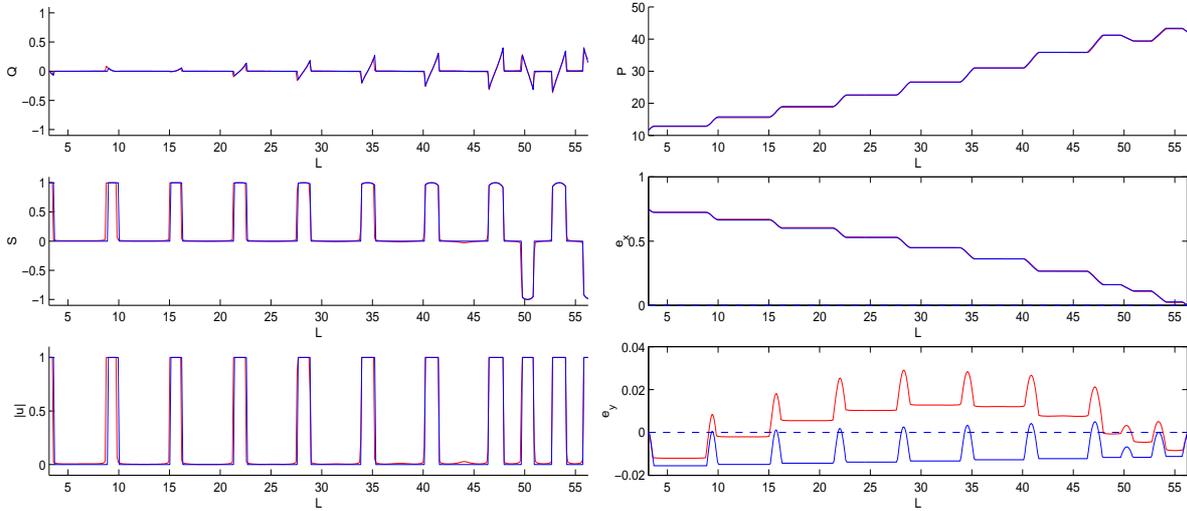


FIG. 7.4 – Stratégie de poussée et évolution des états de l’approche directe et du tir simple pour  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{L^f} = 2$  et  $NS = 1000$ .

contre, on constate que l’évolution de la seconde composante ( $e_y$ ) du vecteur excentricité n’évolue pas de la même façon. En effet dans le cas de l’approche directe, cette composante est la plupart du temps positive alors que c’est l’opposé pour le tir simple. Néanmoins, la structure de l’évolution reste similaire.

On peut également voir que vers la fin du transfert, on a une esquisse de poussée sur ce qui doit être un péricée. Cette esquisse est présente sur un plus grand nombre de péricées si on relaxe plus le critère d’optimalité.

La résolution de ce problème, bien que moins efficace que la version avec minimisation de l’énergie, reste acceptable. Nous allons maintenant nous intéresser à la résolution du problème avec masse variable et minimisation de l’énergie.

### Masse variable, minimisation de l’énergie

Comme indiqué lors de la présentation des formulations, la dynamique de la masse est lissé par  $\varepsilon$

$$\frac{dm}{dL} = -T_{max} \sqrt{\frac{P}{\mu^0} \frac{P}{W^2}} \beta |u|_\varepsilon$$

On considère tout d’abord la minimisation de l’énergie car elle nous permet d’une part de mieux comprendre l’influence du rajout de la dynamique de la masse et d’autre part cela nous permettra également d’initialiser la

maximisation de la masse finale.

On prend, comme précédemment  $\varepsilon = 1.e - 4$ . Et les deux initialisations déjà présentées (l'évolution de la masse est aussi prise linéaire et telle que  $m^f = 0.9m^0$ ). Les résultats obtenus sont donnés au tableau 7.5.

$T_{max}$ (N.)	Initialisation	$NS$	# itérations	$t_{exec}$ (s.)
60	nulle	250	121	6
60	$u_2$ max	250	118	7
10	nulle	1000	667	86
10	$u_2$ max	1000	175	53
3	nulle	3000	609	340
3	$u_2$ max	3000	278	268
1	nulle	8500	642	1247
1	$u_2$ max	8500	327	833
0.5	nulle	17000	580	2469
0.5	$u_2$ max	17000	583	2411

TAB. 7.5 – Résultats du transfert coplanaire masse variable et minimisation de l'énergie ( $c_{Lf} = 2$ ).

On note tout d'abord que la résolution pour 0.1 Newton s'est soldé par un échec. Cependant, jusqu'à 0.5 Newton, nous n'avons pas rencontré de problème particulier. Les fonctions coûts obtenues sont quant à elles tout à fait cohérentes dans ce sens qu'elles respectent une indépendance du produit avec  $T_{max}$  ( $J^*T_{max} \approx c^{te}$ ). Cette dernière constatation est nouvelle mais pourtant pas surprenante si on considère les nombreuses régularités de notre problème de transfert.

L'initialisation entièrement ortho-radiale est meilleure que la complètement nulle du point de vue de la rapidité de convergence. Cependant, les deux convergent et la différence n'est pas extraordinaire.

Comparons maintenant une solution calculée avec une solution du tir simple. Comparaison faites à la figure 7.5.

On constate que les deux stratégies sont quasiment identiques et donc qu'on a bien trouvée la bonne solution.

Les résultats de cette formulation étant concluants, on passe à la prochaine et dernière formulation.

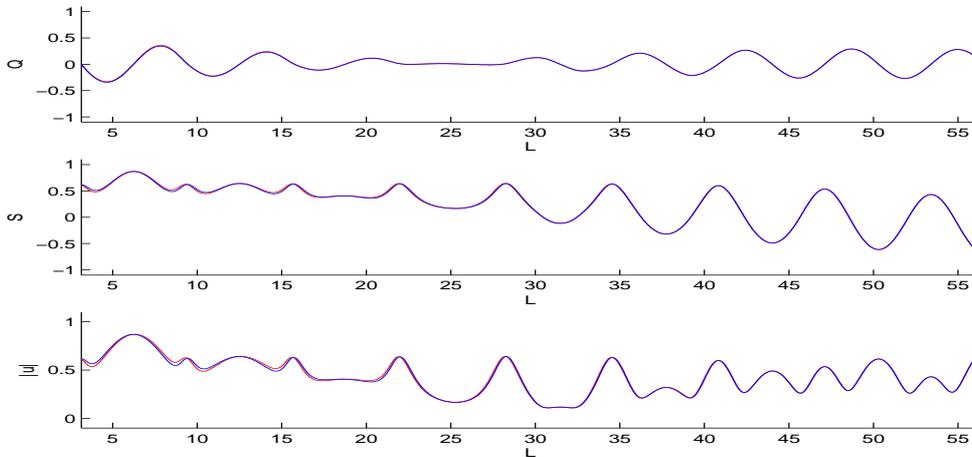


FIG. 7.5 – Stratégie de poussée de l’approche directe et du tir simple pour  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{Lf} = 2$  et  $NS = 1000$ .

### Masse variable, maximisation de la masse finale

Pour l’instant, les résultats obtenus étant relativement encourageants, on s’attaque maintenant au problème du transfert coplanaire avec maximisation de la masse finale. Le critère n’est alors plus la minimisation de la consommation mais bien la maximisation de la masse finale (ils ne sont pas rigoureusement équivalents du fait du schéma de discrétisation de l’état).

On utilise les mêmes initialisations que pour le cas à masse constante ainsi que les mêmes discrétisations.

Dès les premières expérimentations on rencontre un problème de taille. Ce problème peut être vu sur le tableau de résultats 7.6.

$T_{max}$ (N.)	Initialisation	$NS$	# itérations	$t_{exec}$ (s.)	$m^f$ (kg.)
60	nulle	250	138	9	1379.85
60	$u_2$ max	250	176	10	1380.75
60	énergie	250	202	12	1380.75
10	nulle	1000	187	19	1368.5
10	$u_2$ max	1000	119	16	1367.10
10	énergie	1000	124	20	1367.10

TAB. 7.6 – Résultats du transfert coplanaire masse variable et maximisation de la masse finale ( $c_{Lf} = 2$ ).

Pour le  $c_{Lf}$  considéré, la masse finale obtenue par le tir simple est de plus de  $1380kg$ . (rappelons qu’elle est indépendante de  $T_{max}$  pour des  $T_{max}$  faibles). Or on voit immédiatement que pour 10 Newtons, la masse finale

$(m^f)$  est très loin d'être optimale. On peut d'ailleurs remarquer le même phénomène sur les poussées plus faibles.

La figure 7.6 compare la solution du tir simple avec celle de l'approche directe.

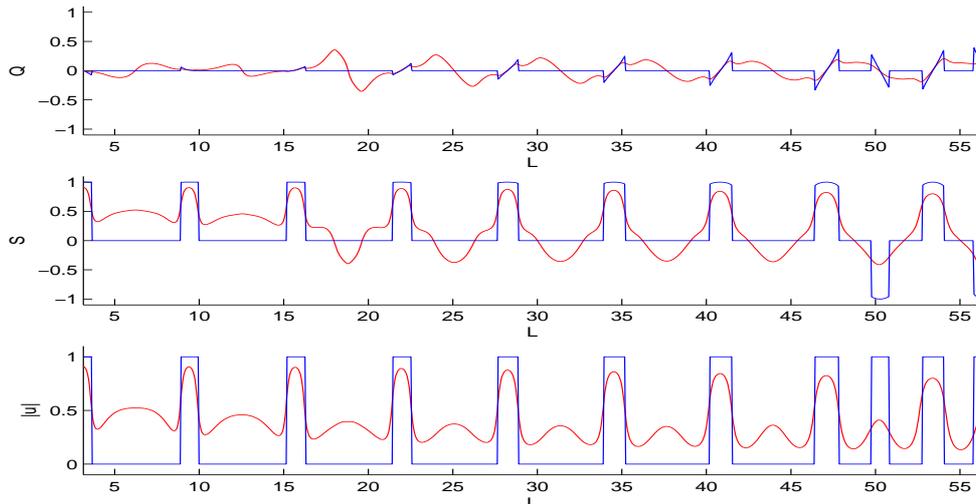


FIG. 7.6 – Stratégie de poussée de l'approche directe et du tir simple pour  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{Lf} = 2$  et  $NS = 1000$  et maximisation de la masse finale.

On constate que le contrôle est bien loin d'être de norme maximale ou nulle bien qu'on puisse deviner la structure optimale obtenue par le tir simple.

La précision requise sur le critère d'optimalité étant toujours de  $1.e - 5$ , on peut essayer de la diminuer en la passant par exemple à sa valeur par défaut, i.e.  $1.e - 6$ . Malheureusement, même en augmentant grandement le nombre maximum d'itérations on n'arrive plus à atteindre la convergence. Cependant, si on compare le résultat obtenu (qui ne satisfait ni le critère d'optimalité, ni celui de satisfaisabilité), on peut voir que la structure de la commande est alors bien meilleure que la précédente (cf. figure 7.7).

On peut effectivement voir que la structure de la commande correspond bien à une structure bang-bang. De plus, les états évoluent de façon presque identiques à ceux du tir simple. On rappelle cependant qu'avec notre discrétisation totale, les états ne sont plus le résultat direct d'une intégration avec le contrôle.

En désespoir de cause, on peut tenter de changer l'expression du critère en reprenant la minimisation de la consommation à la place de la maximisation de la masse finale. Cette formulation à l'avantage de faire directement intervenir les contrôles dans la minimisation alors que pour le critère

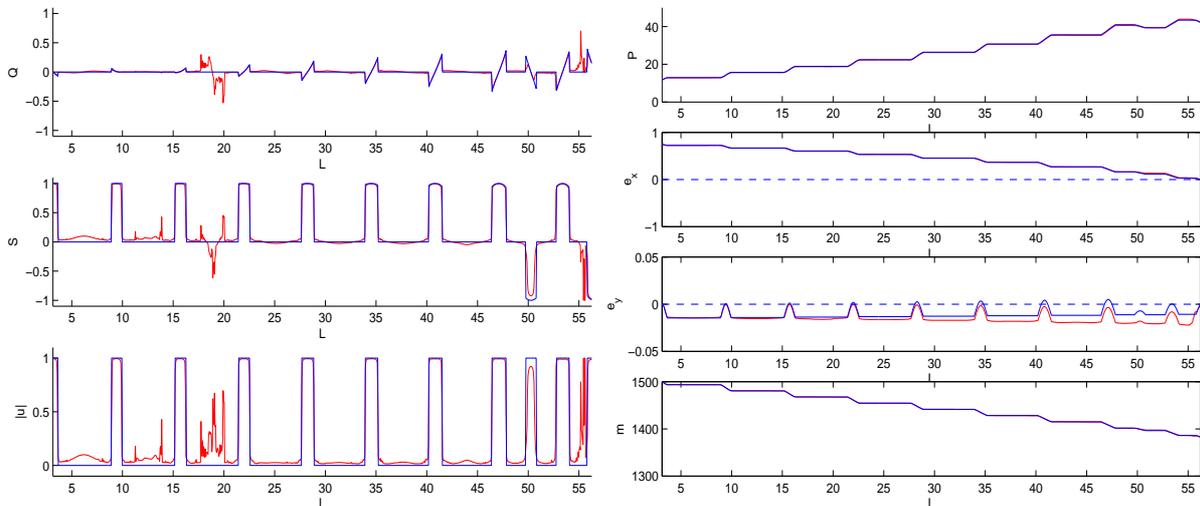


FIG. 7.7 – Stratégie de poussée et évolution des états de l’approche directe (solution non convergente) et du tir simple pour  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{L^f} = 2$  et  $NS = 1000$  et maximisation de la masse finale.

de la masse finale les contrôles n’interviennent qu’indirectement par l’intermédiaire de la dynamique de la masse.

Le tableau 7.7 résume les expérimentations menées avec ce critère.

$T_{max}$ (N.)	Initialisation	$NS$	# itérations	$t_{exec}$ (s.)	$m^f$ (kg.)
60	nulle	250	74	37	1383.64
60	$u_2$ max	250	1000 (NCV)	24	1381.53
60	énergie	250	906	80	1383.64
10	nulle	1000	1000 (NCV)	110	1384.67
10	$u_2$ max	1000	1000 (NCV)	134	1381.27
10	énergie	1000	1000 (NCV)	280	1381.71

TAB. 7.7 – Résultats du transfert coplanaire masse variable et maximisation de la consommation ( $c_{L^f} = 2$ ).

On constate que la convergence est très rare même si les non convergences donnent des stratégies assez proches de celles du tir simple comme le montre la figure 7.8 (la stratégie calculée par l’approche directe est celle pour 10 Newtons avec initialisation par l’énergie)

On peut constater que cette fois-ci les deux stratégies sont semblables et qu’on a bien la structure bang-bang du contrôle.

Il sera donc préférable d’améliorer la convergence de ce critère plutôt que

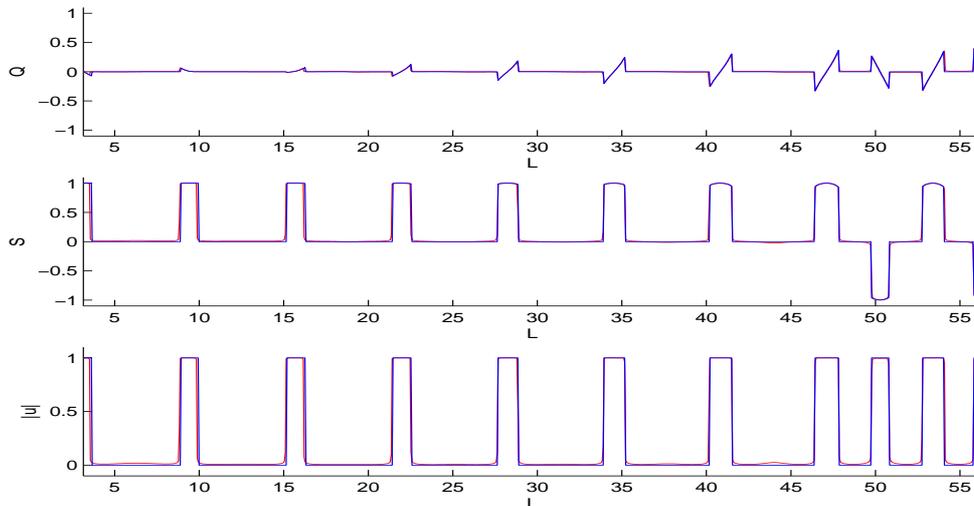


FIG. 7.8 – Stratégie de poussée de l’approche directe et du tir simple pour  $T_{max} = 10N.$ ,  $c_{Lf} = 2$  et  $NS = 1000$  et minimisation de la consommation.

d’essayer d’augmenter la précision sur le critère d’optimalité de la maximisation de la masse finale.

Il nous reste cependant encore beaucoup de travail pour pouvoir faire de l’approche directe une concurrente à la hauteur de l’approche indirecte. Néanmoins, comme on l’a indiqué au début de ce chapitre, l’approche directe a été employée en vue d’une application au problème de transfert avec prise en compte de diverses contraintes qui sont très compliquées à intégrer dans une approche indirecte.

La suite du travail à fournir devra donc de préférence se consacrer à l’introduction de nouvelles contraintes comme la contrainte de cône ou d’éclipse.

## Conclusion

L’approche directe employée dans ce chapitre s’est révélée relativement inefficace pour la résolution de notre problème de minimisation de la consommation. Notons cependant que des approches directes par collocation [9] semblent être plus adaptées.

Nous avons malgré tout pu retrouver certains résultats de notre méthode indirecte mais pour des poussées assez importantes. Il ne semble donc pas illusoire de trouver une approche directe plus adaptée, attendu que notre expérience en terme de méthode directe n’est pas à la hauteur de celle que nous possédons sur les méthodes indirectes.

De plus, on peut trouver dans [42] une approche basée sur la paramétrisation du contrôle et appliquée à notre problème qui a pu donner de bons

résultats.

Une idée à exploiter pour l'approche directe serait d'exprimer le contrôle de façon angulaire ce qui éliminerait les contraintes d'inégalités (qui deviennent des contraintes de boîtes) mais aussi la non différentiabilité du critère. On n'aurait par contre plus unicité de la solution (du fait de la  $2\pi$ -périodicité de sin et cos).

# Conclusion

## Contribution

L'objectif premier de ce travail a été de résoudre de manière efficace le problème de transfert orbital à poussée faible avec maximisation de la masse utile introduit dans le premier chapitre. Pour ce faire, l'emploi d'une méthode de tir simple paramétrée par un paramètre homotopique  $\lambda$ , le tout accompagné d'une continuation différentielle, s'est révélée tout à fait adaptée. L'introduction d'une seconde homotopie portant sur les conditions initiales du transfert a permis d'affranchir totalement la résolution de toute connaissance *a priori* de la structure des contrôles solutions.

La mise au point numérique de cette méthode a fait l'objet d'un travail conséquent portant principalement sur l'évaluation du jacobien, la mise à l'échelle et l'intégration numérique. Cette mise au point a cependant été grandement facilitée par l'utilisation du paquetage **HOMPACK90** [61].

Nous avons alors pu présenter un grand nombre de résultats numériques qui dans un premier temps nous ont servi à mettre en place plusieurs formulations du problème et à choisir ensuite la plus appropriée à la résolution. La bonne formulation du problème étant la formulation longitudinale.

Les points les plus importants de ce travail sont la mise en évidence de nombreuses régularités du problème de transfert. Parmi ces régularités on retiendra surtout l'indépendance numérique par rapport à la poussée maximale de l'évolution de la masse finale en fonction du pourcentage supplémentaire de temps alloué. Nous n'oublierons cependant pas l'indépendance de la longitude cumulée finale optimale ( $c_{L_f}^{opt}$  pour être exact) en fonction de  $c_{t_f}$ . Nous avons également pu observer des transferts optimaux et nous convaincre que les endroits de poussées privilégiés sont les apogées et les périgées. Ceci n'a rien de nouveau mais il est toujours rassurant de retrouver des résultats connus par l'expérimentation numérique.

En plus de notre transfert nominal, nous avons pu étudier un grand nombre de transferts différents qui nous ont tout d'abord permis de valider la robustesse de notre méthode de résolution. Ces nombreux cas de transferts nous ont fait voir un grand nombre de stratégies de poussées optimales et nous ont de plus autorisé à tisser un lien entre le cas des transferts continus et des transferts impulsionsnels. Ce lien vient d'une intuition nous disant

que la limite de consommation du cas continu (en temps de transfert libre) est la consommation du cas impulsif. Il a même été rencontré un cas de transfert continu montrant une stratégie de poussée en trois étapes et qui donc nous pousserait à penser que le transfert impulsif optimal (en terme de consommation) devrait lui aussi comporter trois étapes donc trois impulsions.

Nous nous sommes par ailleurs penchés sur le cas du transfert où la direction de la poussée est restreinte. L'idée de notre méthode de résolution s'est vue appliquée avec succès à cette contrainte de cône double dans le cas des transferts coplanaires avec minimisation du temps de transfert ou de la consommation. Notre méthode ne semble pas adaptée au cas non coplaire du fait de la différence évidente entre le cas non contraint et le cas limite où seule 1 direction de poussée sont permises.

Afin de proposer une alternative à notre méthode de résolution, et donc pour pouvoir résoudre le problème non coplaire avec contrainte de cône, nous avons présenté les quelques résultats obtenus par une approche directe basée sur la paramétrisation totale des états et du contrôle. Malheureusement, les résultats obtenus étant assez décevant du fait de la non différentiabilité de notre critère et de la variation de la masse, nous ne pouvons apporter que quelques perspectives pour la résolution du problème par cette approche.

Rajoutons que notre méthode de résolution a donné lieu à la conception des logiciels **MfMax-v0** [39] et **MfMax-v1** [40] autorisant une reproductibilité aisée des résultats présentés ainsi qu'un outil d'application rapide de notre méthode à d'autres problèmes de contrôle optimal.

## Perspectives

Il manque à notre travail une étude de l'optimalité de nos solutions puisque rien, outre la cohérence des résultats, ne justifie l'optimalité des trajectoires obtenues. Pour ce faire, on pourrait s'inspirer de la théorie des points conjugués qui a déjà fait l'objet d'applications pour des problèmes discontinus [1, 2].

Le problème de transfert orbital étant très riche, on peut lui adjoindre un grand nombre de contraintes opérationnelles supplémentaires. Citons bien entendu la contrainte de cône qui n'est pas résolue pour des transferts non coplanaires. Il en existe bien d'autres, comme par exemple la contrainte d'éclipse stipulant que le moteur ionique ne peut fonctionner lorsqu'il se trouve dans le cône d'ombre de la Terre. Mais n'oublions pas les contraintes hybrides portant sur les durées d'allumage et de réallumage des moteurs. Tout ceci laisse encore un grand champ d'exploration et nécessiterait des recherches et des méthodes numériques de résolution adaptées.

# Annexes



## Annexe A

# Détails des minimisations

### A.1 Critère convexe, commande $\mathcal{H}$ -minimale

Nous n'avons présenté, dans le second chapitre, que la minimisation du Hamiltonien pour les coordonnées cartésiennes. Nous donnons ici le calcul de la commande  $\mathcal{H}$ -minimale pour le critère convexe ( $\int(1-\lambda)|u|^2 + \lambda|u|$ ) et la formulation générale de la dynamique utilisant les champs de vecteurs  $f_i$  donnés au premier chapitre.

Le Hamiltonien s'écrit (avec  $p_0 = 1$ ) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(y, \lambda, u) &= (1-\lambda)|u|^2 + (\lambda - \beta T_{max} p_m)|u| \\ &+ (f_0(x)|p_x) + \frac{T_{max}}{m}(B(x)u|p_x).\end{aligned}$$

avec  $B(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x)]$  (ou  $[f_1(x) \ f_2(x)]$  dans le cas coplanaire). La minimisation du Hamiltonien pour  $\lambda \in [0, 1[$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\alpha(y, \lambda) &= \frac{-\lambda + \beta T_{max} p_m - (T_{max}/m)|{}^t B(x)p_x|}{2(1-\lambda)} \\ \text{Si } |{}^t B(x)p_x| \neq 0 \text{ Alors} \\ \begin{cases} u(y, \lambda) = 0 & , \text{ si } \alpha(y, \lambda) \leq 0 \\ u(y, \lambda) = -\alpha(y, \lambda) \frac{{}^t B(x)p_x}{|{}^t B(x)p_x|} & , \text{ si } \alpha(y, \lambda) \in [0, 1] \\ u(y, \lambda) = -\frac{{}^t B(x)p_x}{|{}^t B(x)p_x|} & , \text{ sinon.} \end{cases} \\ \text{Sinon} \\ \begin{cases} u(y, \lambda) = 0 & , \text{ si } \alpha(y, \lambda) \leq 0 \\ u(y, \lambda) \in \mathbf{S}(0, \alpha) & , \text{ si } \alpha(y, \lambda) \in [0, 1] \\ u(y, \lambda) \in \mathbf{S}(0, 1) & , \text{ sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Pour  $\lambda = 1$ , on définit la fonction de commutation :

$$\psi(y) = 1 - \beta T_{max} p_m - \frac{T_{max}}{m}|{}^t B(x)p_x|$$

La minimisation du Hamiltonien est donnée par :

$$\begin{aligned}
& \text{Si } |{}^t B(x)p_x| \neq 0 \text{ Alors} \\
& \begin{cases} u(y) = 0 & , \text{ si } \psi(y) > 0 \\ u(y) = -\frac{{}^t B(x)p_x}{|{}^t B(x)p_x|} & , \text{ si } \psi(y) < 0 \\ u(y) = -\alpha \frac{{}^t B(x)p_x}{|{}^t B(x)p_x|} & , \alpha \in [0, 1] \text{ sinon.} \end{cases} \\
& \text{Sinon} \\
& \begin{cases} u(y) = 0 & , \text{ si } \psi(y) > 0 \\ u(y) \in \mathbf{S}(0, 1) & , \text{ si } \psi(y) < 0 \\ u(y) \in \mathbf{B}(0, 1) & , \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nous passons maintenant au critère puissance.

## A.2 Critère puissance, commande $\mathcal{H}$ -minimale

Dans le second chapitre ont été introduit deux critères homotopiques que nous avons appelés critère convexe et critère puissance. Seul le calcul de la commande  $\mathcal{H}$ -minimale du premier critère ayant été explicité, on s'attache ici à donner ce calcul pour le critère puissance ( $\int |u|^{2-\lambda}$ ) et la formulation générale de la dynamique.

Le Hamiltonien du problème de transfert avec critère puissance et coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\mathcal{H}(y, \lambda, u) = |u|^{2-\lambda} - \beta T_{max} p_m |u| + (f_0(x)|p_x) + \frac{T_{max}}{m} (B(x)u|p_x).$$

La minimisation du Hamiltonien pour  $\lambda \in [0, 1[$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
& \alpha(y, \lambda) = \frac{\beta T_{max} p_m + (T_{max}/m) |{}^t B(x)p_x|}{2-\lambda} \\
& \text{Si } |{}^t B(x)p_x| \neq 0 \text{ Alors} \\
& \begin{cases} u(y, \lambda) = 0 & , \text{ si } \alpha(y, \lambda) \leq 0 \\ u(y, \lambda) = -\alpha(y, \lambda)^{\frac{1}{1-\lambda}} \frac{{}^t B(x)p_x}{|{}^t B(x)p_x|} & , \text{ si } \alpha(y, \lambda)^{\frac{1}{1-\lambda}} \in [0, 1] \\ u(y, \lambda) = -\frac{{}^t B(x)p_x}{|{}^t B(x)p_x|} & , \text{ sinon.} \end{cases} \\
& \text{Sinon} \\
& \begin{cases} u(y, \lambda) = 0 & , \text{ si } \alpha(y, \lambda) \leq 0 \\ u(y, \lambda) \in \mathbf{S}(0, \alpha^{\frac{1}{1-\lambda}}) & , \text{ si } \alpha(y, \lambda)^{\frac{1}{1-\lambda}} \in [0, 1] \\ u(y, \lambda) \in \mathbf{S}(0, 1) & , \text{ sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans le cas de la minimisation de la consommation ( $\lambda = 1$ ), on définit la fonction de commutation :

$$\psi(y) = 1 - \beta T_{max} p_m - \frac{T_{max}}{m} |{}^t B(x) p_x|.$$

La minimisation du Hamiltonien est donnée par :

$$\begin{aligned} & \text{Si } |{}^t B(x) p_x| \neq 0 \text{ Alors} \\ & \begin{cases} u(y) = 0 & , \text{ si } \psi(y) > 0 \\ u(y) = -\frac{{}^t B(x) p_x}{|{}^t B(x) p_x|} & , \text{ si } \psi(y) < 0 \\ u(y) = -\alpha \frac{{}^t B(x) p_x}{|{}^t B(x) p_x|} & , \alpha \in [0, 1] \text{ sinon.} \end{cases} \\ & \text{Sinon} \\ & \begin{cases} u(y) = 0 & , \text{ si } \psi(y) > 0 \\ u(y) \in \mathbf{S}(0, 1) & , \text{ si } \psi(y) < 0 \\ u(y) \in \mathbf{B}(0, 1) & , \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque A.1.** La minimisation pour  $\lambda = 1$  est bien entendu la même pour le critère convexe et puissance. Notons que les deux minimisations sont également les mêmes pour  $\lambda = 0$ .

### A.3 Système non autonome, minimisation du Hamiltonien

Au chapitre 4 a été introduit la troisième formulation consistant à appliquer le PMP à notre problème de transfert avec  $L^f$  fixé et  $t^f$  libre puis à effectuer un changement de variable (pour passer en  $L$ ) sur le problème aux deux bouts ainsi obtenu. Nous avons alors justifié le changement de variable après application du PMP (et non avant) par le fait que la minimisation du Hamiltonien sur le problème avec système non autonome était trop compliqué à implémenter. Voyons alors en quoi cette minimisation pose problème.

Dans les coordonnées de Gauss, la dynamique du système non autonome est de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= \frac{1}{d(x)+e(x)3} \left( \tilde{f}_0(\tilde{x}) + \frac{T_{max}}{m} \sum_{i=1}^3 u_i \tilde{f}_i(\tilde{x}) \right) \\ m' &= -\frac{1}{d(x)+e(x)u_3} \beta T_{max} |u|. \end{aligned}$$

avec  $\tilde{x} = (P, e_x, e_y, h_x, h_y)$ ,  $\tilde{f}_i$  est le champs de vecteur  $f_i$  amputé de la composante correspondant à  $L$  et :

$$\dot{L} = d(x) + e(x)u_3.$$

et on a  $d(x) > |e(x)u(3)|$  car la longitude est toujours strictement croissante (on le retrouve bien entendu par un raisonnement quantitatif sur les valeurs de  $d(x)$  et  $e(x)u_3$ ).

Le Hamiltonien du système pour le critère convexe s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tilde{y}, \lambda, u) &= \frac{1}{d(\tilde{x})+e(\tilde{x})u_3} [(1-\lambda)|u|^2 + (\lambda - \beta T_{max} p_m)|u| \\ &+ (\tilde{f}_0(\tilde{x})|p_{\tilde{x}}) + \frac{T_{max}}{m}(\tilde{B}(\tilde{x})u|p_{\tilde{x}})]. \end{aligned}$$

avec  $\tilde{y} = (\tilde{x}, m, p_{\tilde{x}}, p_m)$  et  $\tilde{B} = [\tilde{f}_1 \ \tilde{f}_2 \ \tilde{f}_3]$ .

On a alors à chercher la commande  $\bar{u}$  minimisant une fonctionnelle de la forme :

$$\bar{u} = \underset{|\omega| \leq 1}{\operatorname{argmin}} \frac{a|\omega|^2 + b|\omega| + (c|\omega)}{d + e\omega_3}. \quad (\text{A.1})$$

qui du fait de  $|\omega|^2$  et du dénominateur oblige à considérer un polynôme de degré 3 dont les solutions ne sont pas triviales.

Notons toutefois que dans le cas où  $a = 0$ , c'est-à-dire pour  $\lambda = 1$  (minimisation de la consommation), on peut s'éviter le polynôme et facilement calculer la commande  $\mathcal{H}$ -minimale en passant par exemple par un changement de variable :

$$\tilde{u} = \frac{u}{d + eu_3}.$$

Il est également possible de résoudre (A.1) de façon approchée puisqu'en fait on a :

$$d \gg |eu_3|.$$

et donc résoudre (A.1) revient approximativement à résoudre :

$$\bar{u} = \underset{|\omega| \leq 1}{\operatorname{argmin}} \frac{a|\omega|^2 + b|\omega| + (c|\omega)}{d}. \quad (\text{A.2})$$

Ceci est résolu dans les sections précédentes.

Quelques tests numériques ont été menés en utilisant le calcul de  $\bar{u}$  donné par (A.2) pour  $\lambda < 1$  et il apparaît que les solutions trouvées permettent tout à fait de trouver la solution pour  $\lambda = 1$  (qui alors est solution de (A.1)).

## Annexe B

# Des contraintes de cônes et des commandes $\mathcal{H}$ -minimales

### B.1 Minimisation du temps de transfert

Le but est ici de calculer la commande  $\mathcal{H}$ -minimale pour le transfert coplanaire ou non avec minimisation du temps de transfert et prise en compte d'une contrainte de cône double. On adopte la notation du sixième chapitre pour l'ensemble des commandes admissibles  $\mathcal{U}_\alpha$ .

La minimisation est relativement simple si on choisit la bonne formulation de la fonction à minimiser.

On note  $p$  l'état adjoint associé à  $(P, e_x, e_y, L)$  pour le transfert coplanaire et à  $(P, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$  pour le transfert non coplanaire. On pose  $p_m$  l'état adjoint associé à la masse.

On cherche alors à minimiser une fonctionnelle de la forme :

$$\begin{cases} F(\vec{u}) &= a|\vec{u}| + (\vec{b}|\vec{u}) \\ a &= -\beta T_{max} p_m \\ b_i &= (p|f_i) \end{cases}$$

avec  $f_i$  les champs de vecteurs définissant la dynamique (cf. chapitre 1).  $\vec{b}$  est alors de dimension 2 ou 3 suivant le transfert considéré. On suppose de plus  $\vec{b} \neq 0$ .

On peut réécrire la fonction à minimiser comme étant :

$$F(\vec{u}) = (a + |\vec{b}| \cos(\vec{b}, \vec{u})) |\vec{u}|.$$

or si  $\vec{b}/|\vec{b}|$  appartient à un des cônes alors la direction de  $\vec{u}$  minimisant le  $\cos(\vec{b}, \vec{u})$  est  $-\vec{b}$ . Et si  $\vec{b}/|\vec{b}|$  n'appartient pas à un des cônes alors

la direction de  $\vec{u}$  minimisant le  $\cos(\vec{b}, \vec{u})$  est celle de la projection de  $-\vec{b}$  sur le cône le plus proche. Soit alors  $\vec{d}$  la direction ( $|\vec{d}| = 1$ ) de  $\vec{u}$  minimisant le cosinus. Les deux figures B.1 illustrent le résultat de la direction minimisante :

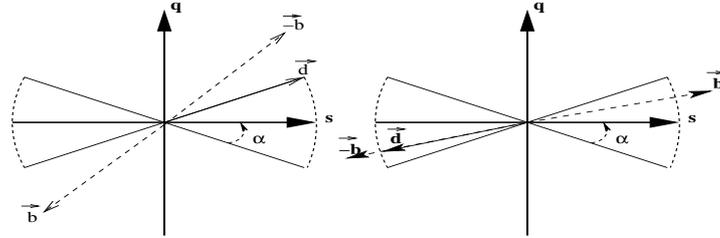


FIG. B.1 – Calcul de  $d$  dans le cas coplanaire avec cône double.

Il est important de noter que quelque soit le cas, on aura  $\cos(\vec{b}, \vec{d}) \leq 0$ .

On suppose que les cas où  $\vec{b}$  est dirigé suivant  $q$  (ou  $-q$ ) ne se produisent que ponctuellement. En effet, ces deux cas correspondent à une indécision sur la direction de  $\vec{d}$  qui peut prendre deux valeurs différentes.

La commande  $\mathcal{H}$ -minimale  $u^*$  vaut alors :

$$u^* = \begin{cases} \vec{d} & , \text{ si } a + |\vec{b}| \cos(\vec{b}, \vec{d}) < 0 \\ 0 & , \text{ si } a + |\vec{b}| \cos(\vec{b}, \vec{d}) > 0 \\ \gamma \vec{d} \quad , \gamma \in [0, 1] & , \text{ si } a + |\vec{b}| \cos(\vec{b}, \vec{d}) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

A l'usage, il apparaît qu'on se trouve toujours dans le premier cas et donc que quelque soit l'endroit de l'orbite considéré il existe une direction de poussée profitable au transfert.

La minimisation dans le cas de la contrainte de cône simple n'implique plus la négativité du cosinus et on n'aura donc plus une poussée toujours maximum.

## B.2 Maximisation de la masse finale

Pour ce critère, l'écriture de la fonctionnelle à minimiser est de la même forme que pour la minimisation du temps de transfert (la seule différence venant de la valeur de  $a$  qui intègre le critère).

La fonctionnelle est alors :

$$\begin{cases} F(\vec{u}) &= a|\vec{u}| + (\vec{b}|\vec{u}) \\ a &= 1 - \beta T_{max} p_m \\ b_i &= (p|f_i) \end{cases}$$

La suite de la minimisation est la même que pour la minimisation du temps de transfert, seule la conclusion change puisqu'on aura assurément des cas où la commande  $\mathcal{H}$ -minimale sera nulle.



## Annexe C

# Cas du transfert impulsif

Les transferts impulsifs (où on suppose la poussée infinie) sont étudiés depuis le début de l'aventure spatiale humaine. Ils consistent, contrairement au cas continu étudié dans ce manuscrit, en un transfert orbital dans lequel le transfert est effectué par saut successif d'une orbite à l'autre. Cette façon d'effectuer les transferts est une approximation du cas réel qui n'est valable que pour des satellites disposant d'une forte poussée, raison pour laquelle nous considérons des transferts par déformation continue de l'orbite dans le cas des poussées faibles.

Cependant, il semble intuitivement que le cas limite d'un transfert à poussée faible avec maximisation de la masse finale et temps de transfert illimité soit le cas impulsif avec un nombre infini de *petites* impulsions. Afin de vérifier la cohérence d'une telle intuition, nous devons au moins vérifier la correspondance entre la masse finale du transfert impulsif avec minimisation de la consommation et l'approximation de la masse finale limite du cas continu. Pour ce faire, nous exposons le calcul du transfert impulsif en l'écrivant comme un problème d'optimisation.

### C.1 Le problème d'optimisation

Nous allons ici montrer comment écrire le problème de transfert impulsif avec minimisation de la consommation comme un problème d'optimisation.

Dans un transfert impulsif, chaque impulsion génère un incrément de vitesse. Si on note  $\delta v_i$  l'incrément de vitesse généré par la  $i^{\text{ième}}$  impulsion, et  $\Delta V = \sum_i |\delta v_i|$  l'incrément de vitesse total, la masse finale vaut [45] :

$$m^f = m^0 \exp^{-\beta \Delta V} \quad (\text{C.1})$$

Alors la maximisation de la masse finale est équivalente à la minimisation de  $\Delta V$ .

On va maintenant donner l'écriture de ce problème comme un problème d'optimisation dans le cas du transfert en deux impulsions. L'extension au cas de trois impulsions est triviale mais peut poser des problèmes car dans ce cas, le transfert solution passe par des orbites intermédiaires paraboliques à temps à horizon de temps infini [45].

**Remarque C.1.** *Il est inutile de considérer un transfert avec plus de trois impulsions car il ne serait pas optimal ([55]) à moins d'être réductible à un transfert de moins de trois impulsions.*

Le transfert bi-impulsionnel consiste en deux *sauts*. Le premier de l'orbite initiale  $O^0$  (définie par  $(P^0, e_x^0, e_y^0, h_x^0, h_y^0)$ ) vers une orbite intermédiaire  $O^1$  (définie par  $(P^1, e_x^1, e_y^1, h_x^1, h_y^1)$ ), et ce à l'aide d'une impulsion  $I_1$  générant l'incrément de vitesse  $\delta v_1$ . Le second saut part de l'orbite  $O^1$  pour arriver à l'orbite finale  $O^f$  (définie par  $(P^f, e_x^f, e_y^f, h_x^f, h_y^f)$ ) à l'aide de l'impulsion  $I_2$  qui fournit l'incrément de vitesse  $\delta v_2$ .

Introduisons les notations suivantes :

- $l_0$  : longitude du point d'application de  $I_1$  mesurée sur  $O^0$  ;
- $l_1$  : longitude du point d'application de  $I_1$  mesurée sur  $O^1$  ;
- $l_2$  : longitude du point d'application de  $I_2$  mesurée sur  $O^1$  ;
- $l_f$  : longitude du point d'application de  $I_2$  mesurée sur  $O^f$  ;
- $(r, v)(P, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$  : position et vitesse (dans le repère inertiel terrestre) correspondant aux coordonnées  $(P, e_x, e_y, h_x, h_y, L)$  (obtenus par (1.2,1.2)) ;
- $(r_0, v_0) = (r, v)(P^0, e_x^0, e_y^0, h_x^0, h_y^0, l_0)$  ;
- $(r_1, v_1) = (r, v)(P^1, e_x^1, e_y^1, h_x^1, h_y^1, l_1)$  ;
- $(r_2, v_2) = (r, v)(P^1, e_x^1, e_y^1, h_x^1, h_y^1, l_2)$  ;
- $(r_f, v_f) = (r, v)(P^f, e_x^f, e_y^f, h_x^f, h_y^f, l_f)$  ;
- $y = (P^1, e_x^1, e_y^1, h_x^1, h_y^1, l_0, l_1, l_2, l_f)$  : les inconnues du problème d'optimisation ;
- $\mathcal{Y} = \mathbb{R} \times \mathbf{B}_2^2(0, 1) \times \mathbb{R}^4$  : le domaine de définition de  $y$ .

Le problème d'optimisation correspondant au transfert bi-impulsionnel avec minimisation du  $\Delta V$  s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}^2)_{\text{imp}} \begin{cases} \min_{y \in \mathcal{Y}} \Delta V = |\delta v_1| + |\delta v_2| \\ \text{s.t.} \\ r_1 = r_0 \\ r_f = r_2 \\ \delta v_1 = v_1 - v_0 \\ \delta v_2 = v_f - v_2 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$(\mathcal{P}^2)_{\text{imp}}$  est un problème d'optimisation non linéaire qu'on résout facilement (et rapidement) numériquement avec, par exemple, *Matlab*.

Dans notre cas, on a  $l_0 = l_1$  et  $l_2 = l_f$  car toutes nos orbites initiales et finales sont coaxiales. Cependant, on peut ne pas utiliser cette relation afin de garder la généralité de notre résolution.

De plus, le fait d'utiliser les coordonnées de Gauss modifiées plutôt que les coordonnées cartésiennes (rien ne nous en empêche) rend l'initialisation de la méthode très aisée.

Nous allons maintenant donner les résultats obtenus sur les différentes conditions terminales du chapitre 5.

## C.2 Application à nos transferts

On donne ici les résultats trouvés pour les différents transferts considérés dans le manuscrit. Ces résultats sont utilisés dans les chapitres 4 et 5 pour comparer le cas impulsionnel au cas continu.

Notons que pour chaque transfert considéré, nous avons considéré un nombre relativement important de points initiaux pour la recherche d'une solution satisfaisant de  $(\mathcal{P}^2)_{\text{imp}}$  et nous pouvons raisonnablement considérer que les solutions données sont bien optimales.

On commence par donner une solution pour le transfert nominale dont les résultats et les interprétations constituent le chapitre 4.

### Transfert nominal

Dans le cas nominal, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^0 = 11.625 \text{ Mm} \\ e^0 = 0.75 \\ i^0 = 7^\circ \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} P^f = 42.165 \text{ Mm} \\ e^f = 0. \\ i^f = 0 \end{array} \right.$$

Notons que dans tous les transferts considérés, l'orbite initiale est orientée de façon à avoir  $e_y^0 = 0$  et  $h_y^0 = 0$  (donc avec  $\Omega^0 = 0$  et  $\omega^0 = 0$ ).

La meilleure solution trouvée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} P^1 \approx 44.227 \text{ Mm} \\ l_1 \approx \pi \\ l_2 \approx 2\pi \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^1 \approx 0.0489 \\ i^1 \approx 0.156^\circ \\ \Delta V \approx 5.3547 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f \approx 1390.173 \text{ kg} \end{array} \right.$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\Delta V_1 \approx 5.0856 \text{ Mm.h}^{-1} \text{ avec } \begin{cases} q_1 \approx 0 \\ s_1 \approx 0.9923 \\ w_1 \approx 0.1235 \end{cases}$$

et :

$$\Delta V_2 \approx 0.2691 \text{ Mm.h}^{-1} \text{ avec } \begin{cases} q_2 \approx 0 \\ s_2 \approx -0.9934 \\ w_2 \approx -0.1146 \end{cases}$$

On note que  $\Delta V_1$  contribue pour environ 94.97% à l'impulsion totale et donc  $\Delta V_2$  y contribue à hauteur de 5.03%.

De plus, la première impulsion se produit à l'apogée de l'orbite initiale alors que la seconde est appliquée sur un périégée. L'orbite intermédiaire est presque circulaire ( $e^1 \approx 0.0489$ ) et de paramètre proche de celui de l'orbite géostationnaire. Le transfert est donc principalement l'œuvre de la première impulsion.

Donnons maintenant les résultats pour le transfert nominal coplanaire.

### Transfert nominal coplanaire

On a alors les mêmes orbites initiale et finale avec comme seule différence que l'inclinaison  $i$  est nulle.

La meilleure solution trouvée est :

$$\begin{cases} P \approx 44.227 \text{ Mm} \\ l_1 \approx \pi \\ l_2 \approx 2\pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e \approx 0.0489 \\ \Delta V \approx 5.2765 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f \approx 1391.717 \text{ kg} \end{cases}$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\Delta V_1 \approx 5.0092 \text{ Mm.h}^{-1} \text{ soit } 94.93\% \text{ de } \Delta V \text{ avec } \begin{cases} q_1 \approx 0 \\ s_1 \approx 1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta V_2 \approx 0.2674 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit 5.07\% de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_2 \approx 0 \\ s_2 \approx -1 \end{cases}$$

On ne précise pas la composante hors-plan des deux impulsions puisqu'elle est nulle étant donné que notre transfert ne nécessite aucune correction d'inclinaison.

Comme pour le cas précédent, la première impulsion se situe sur un apogée alors que la seconde a lieu au périégée de l'orbite intermédiaire qui a tout à fait la même forme que pour le transfert nominale non coplanaire.

Notons de plus que la composante ortho-radiale des impulsions est de loin prédominante.

Passons maintenant aux deux transferts correspondant aux faibles variations de la forme de l'orbite initiale.

### Faibles variations de $(P^0, e_x^0)$

On considère ici deux transferts coplanaires dont  $(P^0, e_x^0)$  varient de 5% en plus ou en moins par rapport au transfert nominale (cf. chapitre 5 section 1).

On donne tout d'abord les résultats pour le transfert avec  $(P^0, e_x^0)$  5% inférieur au couple nominal. On a donc :

$$\begin{cases} P^0 = 11.04375 \text{ Mm} \\ e^0 = 0.7125 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P^f = 42.165 \text{ Mm} \\ e^f = 0. \end{cases}$$

La meilleure solution trouvée est :

$$\begin{cases} P^1 \approx 11.187 \text{ Mm} \\ l_1 \approx 0 \\ l_2 \approx \pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e^1 \approx 0.7346 \\ \Delta V \approx 5.6066 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f \approx 1385.209 \text{ kg} \end{cases}$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 \approx 0.2392 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit 4.27\% de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1 \approx 0 \\ s_1 \approx 1 \end{cases}$$

et :

$$\Delta V_2 \approx 5.3674 \text{ Mm.h}^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_2 \approx 0 \\ s_2 \approx 1 \end{cases}$$

soit 95.73% de  $\Delta V$

En second lieu on considère le transfert avec un couple  $(P^0, e_x^0)$  5% supérieur au couple nominal ce qui nous donne :

$$\begin{cases} P^0 = 12.20625 \text{ Mm} \\ e^0 = 0.7875 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P^f = 42.165 \text{ Mm} \\ e^f = 0. \end{cases}$$

La meilleure solution trouvée est :

$$\begin{cases} P^1 \approx 48.6317 \text{ Mm} \\ l_1 \approx \pi \\ l_2 \approx 2\pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e^1 \approx 0.1534 \\ \Delta V \approx 5.1728 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f \approx 1393.769 \text{ kg} \end{cases}$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\Delta V_1 \approx 4.3542 \text{ Mm.h}^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1 \approx 0 \\ s_1 \approx 1 \end{cases}$$

soit 84.18% de  $\Delta V$

et :

$$\Delta V_2 \approx 0.8185 \text{ Mm.h}^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_2 \approx 0 \\ s_2 \approx -1 \end{cases}$$

soit 15.82% de  $\Delta V$

Notons que contrairement au cas nominal, la seconde impulsion participe à hauteur de 15.82% au transfert (ou tout du moins à l'impulsion totale). De plus, l'orbite intermédiaire est moins circulaire ( $e \approx 0.1534$ ) que dans les cas précédents son paramètre est {égaleme nt plus faible (mais la plus grande excentricité rend l'altitude de l'apogée tout aussi proche de celle de l'orbite géostationnaire).

On retrouve cependant les positions des points d'applications des deux impulsions, à savoir la première sur un apogée et la seconde sur un périégée.

Nous passons maintenant à ce que nous avons appelé dans le chapitre 5, le premier jeu de conditions initiales.

**Premier jeu :**  $(P^0, e_x^0) = (11.625 \text{ Mm}, 0.5)$

Ce transfert est coplanaire et l'orbite initiale est donnée dans le titre du paragraphe.

La meilleure solution trouvée est :

$$\begin{cases} P^1 & \approx 13.0934 \text{ Mm} \\ l_1 & \approx 0 \\ l_2 & \approx \pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e^1 & \approx 0.6895 \\ \Delta V & \approx 6.8383 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f & \approx 1361.192 \text{ kg} \end{cases}$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &\approx 1.9377 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit } 28.34\% \text{ de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1 & \approx 0 \\ s_1 & \approx 1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &\approx 4.9007 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit } 71.66\% \text{ de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_2 & \approx 0 \\ s_2 & \approx 1 \end{cases}$$

Notons que cette fois-ci la première impulsion est la plus faible et à lieu sur un péri-gée alors que c'est la seconde qui est la plus importante et à lieu sur un apo-gée. De ce fait, l'orbite intermédiaire est très elliptique ( $e \approx 0.6895$ ) et que son paramètre est très proche de celui de l'orbite initiale.

La composante ortho-radiale des deux impulsions reste toujours largement prédominante devant la composante radiale.

Présentons les résultats du second jeu.

**Second jeu :**  $(P^0, e_x^0) = (20 \text{ Mm}, 0.75)$

Pour ce second jeu, la meilleure solution trouvée est :

$$\begin{cases} P^1 & \approx 55.2237 \text{ Mm} \\ l_1 & \approx \pi \\ l_2 & \approx 2\pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e^1 & \approx 0.3097 \\ \Delta V & \approx 4.2571 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f & \approx 1412.010 \text{ kg} \end{cases}$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &\approx 2.6586 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit } 62.45\% \text{ de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1 & \approx 0 \\ s_1 & \approx 1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &\approx 1.5959 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit } 37.55\% \text{ de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_2 & \approx 0 \\ s_2 & \approx -1 \end{cases}$$

La première impulsion à lieu sur un apogée et la seconde sur un périégée. La différence avec le cas nominal est que l'orbite intermédiaire est d'excentricité plus importante ( $e \approx 0.3097$ ) de même que son paramètre. Ceci donne une orbite dont l'altitude de l'apogée est bien supérieure à l'altitude de l'orbite géostationnaire. On comprend alors bien que la seconde impulsion compte pour 37.55% de l'impulsion totale alors que cette participation est beaucoup plus faible pour les cas précédemment considérés.

**Troisième jeu :**  $(P^0, e_x^0) = (20 \text{ Mm}, 0.5)$

Pour ce troisième jeu, la meilleure solution trouvée est :

$$\begin{cases} P^1 & \approx 20.2601 \text{ Mm} \\ l_1 & \approx 0 \\ l_2 & \approx \pi \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e^1 & \approx 0.5195 \\ \Delta V & \approx 3.5524 \text{ Mm.h}^{-1} \\ m^f & \approx 1426.212 \text{ kg} \end{cases}$$

les deux impulsions sont de magnitude et de direction :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &\approx 0.1562 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit } 4.40\% \text{ de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_1 & \approx 0 \\ s_1 & \approx 1 \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &\approx 3.3961 \text{ Mm.h}^{-1} \\ \text{soit } 95.60\% \text{ de } \Delta V \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_2 & \approx 0 \\ s_2 & \approx 1 \end{cases}$$

Comme pour le premier jeu, la première impulsion se situe sur un périégée et la seconde sur un apogée. L'orbite intermédiaire est encore relativement excentrique (la première correction sur l'excentricité est très faible) et de paramètre quasiment inchangé par rapport à l'orbite initiale. Ceci vient du fait que la première impulsion est très faible.

### Variations de l'inclinaison

Les solutions pour le cas nominal avec différentes inclinaisons initiales sont toutes du même ordre puisqu'elles consistent en une première impulsion sur un apogée et une seconde sur un périégée. L'orbite intermédiaire est toujours d'excentricité faible ( $e \approx 0.05$ ) et de paramètre  $P \approx 44.2 Mm$ .

La différence principale réside dans la magnitude des deux impulsions qui sont de plus en plus fortes. On garde cependant la même répartition. Les figures C.1 donnent la magnitude des deux impulsions ainsi que leur répartition en fonction de l'inclinaison initiale.

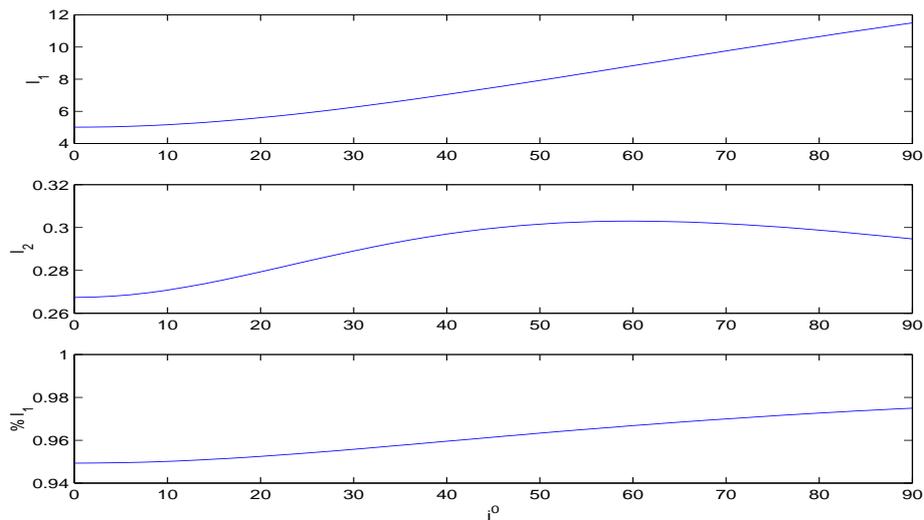


FIG. C.1 – Impulsion de l'apogée (en haut), du périégée (au centre) et pourcentage de celle de l'apogée sur le total (en bas) en fonction de l'inclinaison initiale ( $i^0$  en degré).

On peut voir qu'en effet, la répartition entre les deux impulsions reste relativement stable même si elle tend à privilégier la première impulsion sur l'apogée.

On note que la magnitude de la première impulsion est croissante en  $i^0$  alors que la seconde est croissante puis décroissante.

Pour l'évolution de la masse finale en fonction de  $i^0$ , elle est donnée à la

figure 5.29 du chapitre 5 (dernier paragraphe avant la conclusion).

# Bibliographie

- [1] A.A. Agrachev and M. Sigalotti. On the local structure of optimal trajectories in  $\mathbf{R}^3$ . *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(2) :513–231, 2003.
- [2] A.A. Agrachev, G. Stefani, and P. Zezza. Strong optimality for bang-bang trajectory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(4) :991–1014, 2002.
- [3] E. Allgower and K. Georg. *Numerical continuation methods. An introduction*. Springer-verlag edition, 1990.
- [4] E. Allgower and K. Georg. *Piecewise Linear Methods for Nonlinear Equations and Optimization*. Colorado state university edition, 1999.
- [5] Ed Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and et D. Sorensen. Lapack. netlib, (<http://netlib.enseeiht.fr/lapack/index.html>).
- [6] J.P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusion*. Springer-verlag edition, 1984.
- [7] M.C. Bartolomew-Biggs, L.C.W. Dixon, S.E. Hersom, and Z.A. Maany. The solution of some difficult problems in low-thrust interplanetary trajectory optimization. *Optimal Control Applications & Methods*, 9 :229–251, 1988.
- [8] M.C. Bartolomew-Biggs, L.C.W. Dixon, S.E. Hersom, Z.A. Maany, W. Flury, and M.Hechler. From high thrust to low thrust : Application of advanced ptimisation methods to mission analysis. *ESA Journal*, 11 :61–73, 1987.
- [9] J.T. Betts. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 120 :27–40, 2000.
- [10] C. Bischof, A. Carle, P. Hovland, P. Khademi, and A. Mauer. ADIFOR 2.0 User’s Guide. Technical Report CRPC-95516-S, Rice university, Juin 1998.
- [11] B. Bonnard and M. Chyba. *Singular trajectories and their role in control theory*. Springer-verlag edition, 2003.

- [12] R.H Byrd, J.C. Gilbert, and J. Nocedal. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. 1998.
- [13] R.H. Byrd, M.E. Hribar, and J. Nocedal. An interior point algorithm for large scale nonlinear programming. 1997.
- [14] J.B. Caillau. *Contribution à l'étude du contrôle en temps minimal des transferts orbitaux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2000.
- [15] J.B. Caillau. Orbital transfer with maximisation of the mass. direct approach, 2003. <http://www.enseeiht.fr/caillau/research/direct.pdf>.
- [16] J.B. Caillau, M. Denguir, J. Gergaud, T. Haberkorn, P. Martinon, J. Noailles, and L. Pialot. Trajectoires optimales à poussée continue. Technical Report Contrat 86/776/98/CNES/7462, ENSEEIHT-IRIT UMR CNRS 5505, Octobre 2001.
- [17] J.B. Caillau, R. Dujol, J. Gergaud, T. Haberkorn, P. Martinon, J. Noailles, and D. Preda. Mise au point d'une méthode de résolution efficace pour les problèmes de contrôle optimal à solution bang-bang, application au calcul de trajectoires à poussé faible. Technical Report Contrat 02/CNES/0257/00 - DPI 500, ENSEEIHT-IRIT UMR CNRS 5505, Juin 2004.
- [18] J.B. Caillau, J. Gergaud, T. Haberkorn, P. Martinon, J. Noailles, and D. Preda. Mise au point d'une méthode de résolution efficace pour les problèmes de contrôle optimal à solution bang-bang, application au calcul de trajectoires à poussé faible. Technical Report Contrat 02/CNES/0257/00 - DPI 500, ENSEEIHT-IRIT UMR CNRS 5505, Janvier 2003.
- [19] J.B. Caillau, J. Gergaud, T. Haberkorn, P. Martinon, J. Noailles, D. Preda, and D. Ruiz. Mise au point d'une méthode de résolution efficace pour les problèmes de contrôle optimal à solution bang-bang, application au calcul de trajectoires à poussé faible. Technical Report contrat 772/01/CNES/3001/00, ENSEEIHT-IRIT UMR CNRS 5505, Juin 2002.
- [20] J.B. Caillau, J. Gergaud, and J. Noailles. Tfmin : Short reference manual. *Optimization Online Digest*, 2002/07/511, 2002.
- [21] J.B. Caillau and J. Noailles. Coplanar control of a satellite around the earth. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 6 :239–258, Février 2001.
- [22] J.B. Caillau, R.Dujol, J. Gergaud, T. Haberkorn, P. Martinon, J. Noailles, and D. Preda. Mise au point d'une méthode de résolution efficace pour les problèmes de contrôle optimal à solution bang-bang, application au calcul de trajectoires à poussé faible. Technical Report Contrat 02/CNES/0257/00 - DPI 500, ENSEEIHT-IRIT UMR CNRS 5505, Octobre 2003.

- [23] M.B. Carver. Efficient integration over discontinuities in ordinary differential equation simulations. *Mathematics and Computers in Simulation*, XX :190–196, 1978.
- [24] L. Cesari. *Optimization theory and application. Problems with ordinary differential equations*. Springer-verlag new york edition, 1983.
- [25] S.N. Chow, J. Mallet-Paret, and J.A. Yorke. Finding zeros of maps : Homotopy methods that are constructive with probability one. *Mathematics of Computation*, 32 :887–899, 1978.
- [26] CNES. *Mécanique Spatiale T.1.*, pages 934–937. Cépaduès-editions toulouse edition, 1995.
- [27] L.C.W Dixon and Z.A Maany. To bus and back. In *Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Flight Dynamics*, pages 97–102, Darmstadt, Allemagne, 20-23 Octobre 1986. ESA SP-225.
- [28] D. Ellison. Efficient automatic integration of ordinary differential equations with discontinuities. *Mathematics and Computers in Simulation*, XXIII :12–20, 1981.
- [29] W.H. Enright, K.R. Jackson, S.P. Norsett, and P.G. Thomsen. Effective solution of discontinuous ivps using a runge-kutta formula pair with interpolants. *Aplied mathematics and computation*, 27 :313–335, 1988.
- [30] R. Epenoy. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - numerical results and statistical interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, 23(4) :171–197, August 2002.
- [31] R. Epenoy and C. Ferrier. Optimal control for engines with electro-ionic propulsion under constraint of eclipse. *Acta Astronautica*, 48(4) :181–192, 2001.
- [32] C.B. Garcia and W.I. Zangwill. An approach to homotopy and degree theory. *Mathematics of operations research*, 4(4) :390–405, 1979.
- [33] C.W. Gear and O. Osterby. Solving ordinary differential equations with discontinuities. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 10(1) :23–44, Mars 1984.
- [34] S. Geffroy. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal - Application aux problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à poussée faible*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997.
- [35] J. Gergaud. *Résolution numérique de problèmes de commande optimale à solution Bang-Bang par des méthodes homotopiques simpliciales*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1989.
- [36] J. Gergaud and T. Haberkorn. Predictor-corrector homotopy methods for solving a low thrust orbital transfer with maximization of the final mass. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, soumis en Juin 2004.

- [37] J. Gergaud, T. Haberkorn, and P. Martinon. Homotopy methods for a low thrust orbital transfer problem with maximization of the final mass. *Conférence Franco-Germano-Polonaise sur l'optimisation, Cottbus, Allemagne, 9-13 Septembre 2002*.
- [38] J. Gergaud, T. Haberkorn, and P. Martinon. Low thrust minimum-fuel orbital transfer : a homotopic approach. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, à paraître.
- [39] J. Gergaud, T. Haberkorn, and J. Noailles. Mfmax-v0 : short reference manual. Technical Report RT/APO/04/01, ENSEEIHT-IRIT, 2004.
- [40] J. Gergaud, T. Haberkorn, and J. Noailles. Mfmax-v1 : short reference manual. Technical Report RT/APO/04/02, ENSEEIHT-IRIT, 2004.
- [41] J. Gergaud, T. Haberkorn, and J. Noailles. Mfmax(v0 & v1) : Method explanation manual. Technical Report RT/APO/04/03, ENSEEIHT-IRIT, 2004.
- [42] T. Haberkorn and P. Martinon. Miser 3 - transfert orbital, 2001.
- [43] L. Hascoet, V. Pascual, and R.M. Greborio. The tapenade ad tool. *Tropics Project, INRIA Sophia-Antipolis, AD Workshop, Granfield, 5-6 Juin 2003*.
- [44] C.T. Le. *Contrôle optimal et transfert orbital en temps minimal*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999.
- [45] J.P. Marec. *Optimal Space trajectories*. Elsevier, 1979.
- [46] P. Martinon, J. Gergaud, and J. Noailles. Simplicial homotopy : an application to orbital transfer. Technical Report RT/APO/02/1, ENSEEIHT-IRIT UMR CNRS 5505, 2002.
- [47] L. W. Neustadt. A general theory of minimum-fuel space trajectories. *SIAM Journal on Control*, 3(2) :317–356, 1965.
- [48] X.V. Nguyen, H.K. Shau, and C. Marchal. Optimal time-free nodal transfers between elliptical orbits. *Acta Astronautica*, 17(8) :875–880, 1988.
- [49] J. Noailles and C.T. Le. Contrôle en temps minimal et transfert orbital à poussée faible. *Gauthier-Villars, Equations aux dérivées partielles et applications, articles en l'honneur de J.L Lions pour son 70<sup>ième</sup> anniversaire :705–724*, 1998.
- [50] H.J. Oberle and K. Taubert. Existence of multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfert problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 95 :243–262, 1997.
- [51] M.J.D. Powell. A hybrid method for nonlinear equations. *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations (Ed.), P. Rabinowitz, Gordon and Breach, Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations :87–114*, 1970.

- [52] L.F. Shampine, H.A. Watts, and S. Davenport. Solving non-stiff ordinary differential equations - the state of the art. Technical Report sand75-0182, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1975.
- [53] Tarunraj Singh. Fuel/time optimal control of the benchmark problem. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(6), Novembre-Décembre 1995.
- [54] H. Suhartanto and W. Enright. Detecting and locating a singular point in the numerical solution of ivps for odes. *Computing*, 48 :161–175, 1992.
- [55] T. Ting. Optimum orbital transfer by several impulses. *Astronautica Acta*, 6(5) :256–265, Mai 1960.
- [56] G. Vasudevan and F.H. Lutze. On verification of fuel-optimal space trajectories. *Optimal Control Applications & Methods*, 9 :285–302, 1988.
- [57] L.T. Watson. Fixed points of  $c^2$  maps. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 5(2) :131–139, 197.
- [58] L.T. Watson. An algorithm that is globally convergent with probability one for a class of nonlinear two-point boundary value problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 16(3) :394–401, 1979.
- [59] L.T. Watson. A globally convergent algorithm for computing fixed points of  $c^2$  maps. *Applied Mathematics and Computation*, 5 :297–311, 1979.
- [60] L.T. Watson. Numerical linear algebra aspects of globally convergent homotopy methods. *SIAM Review*, 28 :529–545, 1986.
- [61] L.T. Watson, M. Sosonkina, R.C. Melville, A.P. Morgan, and H.F. Walker. Algorithm 777 : Hompack90 : A suite of fortran90 codes for globally convergent algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23 :514–549, 1997.
- [62] O. Zarrouati. *Trajectoires spatiales*. Cnes - cepadues edition, 1987.

**Résumé.** Cette thèse porte sur un problème de mécanique spatiale, à savoir un transfert orbital à poussée faible, autour de la Terre, avec maximisation de la masse finale. La difficulté de ce problème vient des discontinuités de la commande optimale et du fait que les instants de commutations ne sont pas connus (nombre et localisation). La méthode du tir simple devenant particulièrement sensible à l'initialisation, on paramètre le critère du problème pour relier la minimisation de l'énergie à la minimisation de la consommation. La fonction de tir résultant de la paramétrisation définit alors une homotopie dont le chemin de zéros est suivi par une méthode de continuation différentielle. Une seconde homotopie, discrète celle-ci, permet d'affranchir complètement notre méthode de toute connaissance *a priori* sur la structure de la commande optimale, d'autant plus que le nombre de commutations peut être très important (plus de 1000 pour une poussée de 0.1  $N$  et un satellite de 1500  $kg$ ). Cette méthode de résolution est implantée dans un logiciel et appliquée avec succès à notre problème. Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence un grand nombre de lois empiriques comme par exemple l'indépendance de l'évolution de la masse finale par rapport à la poussée maximale.

**Mots-Clés.** transfert orbital, poussée faible, homotopie, méthode Prédicteur-Correcteur, contrôle optimal, tir simple, problème bang-bang

**Classification MSC2000.** 49M05, 65H20, 70Q05

---

**Abstract.** This study deals with a problem of space mechanics. This problem is a low thrust orbital transfer around the Earth with maximization of the final mass. The difficulty comes from the discontinuities of the optimal command and from the lack of knowledge concerning the number and the location of those discontinuities. Since the single shooting method is very sensitive with respect to the initialization that, we parameterize the criteria in order to link the minimization of the energy to the minimization of the consumption. The parameterized shooting function defines a homotopy on which we apply a differential continuation method in order to follow the zero path. A second homotopy, namely a discrete one, free our method from any *a priori* knowledge about the optimal control structure. This is very interesting as the optimal control exhibits more than 1000 switchings for a thrust of 0.1  $N$  and an initial mass of 1500  $kg$ . This method is implemented in a software and is successfully applied to our problem. The results allow us to outline some empiric laws as the independency of the final mass with respect to the thrust.

**Key Words.** orbital transfer, low-thrust, homotopy, path-following, predictor-corrector method, optimal control, single shooting, bang-bang problem

**MSC2000 Classification.** 49M05, 65H20, 70Q05

---

ENSEEIH-IRIT, UMR CNRS 5505, 2 rue Camichel, 31071 Toulouse, France