MARCEL DEKKER, INC. • 270 MADISON AVENUE • NEW YORK, NY 10016

COMMUNICATIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
Vol. 27, Nos. 9 & 10, pp. 1751–1791, 2002

FORMULE DE TRACE SEMI-CLASSIQUE SUR UNE VARIETE DE DIMENSION 3 AVEC UN POTENTIEL DE DIRAC

Luc Hillairet

Université de Grenoble I, Institut Fourier,
UMR 5582 CNRS-UJF, B.P 74,
38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France
E-mail: luc.hillairet@ujf-grenoble.fr

RÉSUMÉ

Il est possible sur une variété de dimension 3 de modifier le laplacien Δ en un point p, créant ainsi ce qu'on appelle un potentiel Dirac. On étudie alors l'équation des ondes associée à cette situation. On montre dans un premier temps que le propagateur fait apparaître des opérateurs prenant en compte des diffractions successives au point p. Dans un deuxième temps, on établit la formule de trace associée à l'équation des ondes et on montre que les courbes obtenues en suivant successivement n lacets géodésiques joignant p à p contribuent aux singularités de la formule de trace. La singularité principale apportée par une telle courbe est aussi calculée.

ABSTRACT

On a riemannian manifold of dimension 3, it is possible to change the laplacian Δ at a single point p. This procedure gives the so-called Dirac potential, and we study the associated wave equation. We first show that the propagator can be

DOI: 10.1081/PDE-120016127
0360-5302 (Print); 1532-4133 (Online)

www.dekker.com

written as a sum in which each operator takes into account n diffractions at p. We then show that the curve obtained by following, one after another, n geodesic segments emanating from, and returning to p, gives a singularity in the trace formula. The principal part of this singularity is also computed.

Key Words: Formule de trace; Équation des ondes; Potentiel dirac; Diffraction

INTRODUCTION

Considérons une variété riemannienne compacte, et Δ le laplacien associé à la métrique. On note alors $E(t, x, y)$ le noyau de la solution fondamentale de l'équation des ondes relative à Δ. Il est alors intéressant d'étudier la distribution $S(t) = \int E(t, x, x)\, dx$. En utilisant les valeurs propres λ_n du laplacien et le calcul fonctionnel, on établit l'égalité:

$$S(t) = \sum \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Parallèlement, on montre que E est un opérateur intégral de Fourier (OIF). Les règles générales du calcul des OIF s'appliquent alors, et on montre que les singularités de S sont localisées aux longueurs des géodésiques périodiques de la variété (cf. Ref. [1]). Plus précisément, l'inclusion suivante est satisfaite:

$$\text{supp. sing.}\,(S) \subset \mathbb{L},$$

avec

$$\mathbb{L} = \{L_\gamma \mid \gamma \text{ géod. pér.}\},$$

où L_γ représente la longueur de la géodésique γ. Une telle formule permet donc d'étudier les relations entre la géométrie de la variété et la distribution des valeurs propres du laplacien.

Le même genre de relations entre le spectre et la géométrie peut être établi en utilisant l'équation de Schrödinger, ou de la chaleur et en suivant sensiblement le même esprit. Ce type de formule se trouve dans la littérature sous différents noms: *formule de trace, de Poisson, de Gutzwiller*... On renvoie à[1–4] pour des exemples de *formule de trace* ou de leur utilisation (la liste n'est pas exhaustive). Dans le cas de l'équation de Schrödinger, le lien géométrie/spectre est fait en passant à la limite semi-classique $\hbar \to 0$, et relie les propriétés classiques et quantiques du système. C'est pourquoi on emploie ici le terme *formule de trace semi-classique*, même s'il n'y a pas vraiment de petit paramètre. De fait, l'étude du comportement de la solution fondamentale de l'équation des ondes aux grandes énergies donne essentiellement les mêmes renseignements que la limite *semi-classique* proprement dite.

Beaucoup de travail a été effectué pour montrer la validité de la formule de trace dans un cadre plus général que celui présenté ci-dessus (variété compacte munie d'un laplacien riemannien). On peut citer par exemple la généralisation aux variétés à bord (cf. Ref. [5]), ou à un opérateur de type $\Delta + V$ avec un potentiel V lisse (cf. Ref. [6]). Le but de cet article, est d'établir cette formule dans le cas où V est un potentiel Dirac ponctuel. Le cadre plus général auquel se rapporte cette étude est celui des *perturbations singulières d'un opérateur différentiel* (cf. Ref. [7]). Le potentiel Dirac ponctuel est l'exemple le plus simple d'une telle perturbation. On trouvera dans[7] d'autres situations pour lesquelles il serait intéressant d'établir ce genre de formule de trace. On peut notamment citer les opérateurs modélisant le comportement d'un système de plusieurs particules (cf. Ref. [7], Ch. 6 et suivants) ainsi que les potentiels Dirac concentrés sur une sous-variété (cf. Ref. [7], pp. 346–347 et les références qui y sont données).

La présence du potentiel Dirac crée une singularité en un point p de la variété. On s'attend alors à ce que la présence de cette singularité fournisse de nouvelles contributions à la formule de trace: celles d'orbites diffractives en p. Signalons un autre cas où la contribution de telles orbites est vraisemblable: quand la métrique est singulière en p, par exemple quand elle présente une singularité conique. Il est naturel de commencer par montrer la contribution de ces orbites diffractives dans le cas du potentiel Dirac ponctuel; ce cadre est en effet plus simple que celui avec une singularité conique, car on y dispose d'un opérateur de référence: le laplacien habituel.

Précisons maintenant le cadre et les résultats principaux de l'article. On donnera dans l'appendice A quelques éléments concernant les potentiels Dirac ponctuels et leur spectre. On montrera notamment que de tels potentiels n'existent qu'en dimension inférieure à 3. On se restreindra dans cet article à la dimension 3 qui est la situation la plus simple. Le laplacien avec un potentiel Dirac en un point p est une extension autoadjointe du laplacien riemannien habituel défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$. Cette extension est caractérisée par son domaine, et paramétrée par $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; on note Δ_β l'extension correspondante. Δ_∞ est le laplacien riemannien standard (cf. Ref. [4]), avec la convention de signe telle que ses valeurs propres soient positives, c'est-à-dire qu'on a:

$$\Delta_\infty = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i{}^2},$$

dans le cas euclidien. Le domaine de Δ_β est caractérisé par:

$$\mathrm{dom}(\Delta_\beta) = \{f \in H^2(M\backslash\{p\}),\ f \text{ vérifie } C^\beta \text{en } p\}.$$

La condition C^β signifie qu'au voisinage de p, on a:

$$C^\beta\ \exists A \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = A\left(\frac{1}{\overline{xp}} + \beta\right) + o(1),$$

où $\overline{xp}$ désigne la distance riemannienne entre x et p (cf. Ref. [8,9] et app. A).

L'équation des ondes relative à Δ_β s'écrit

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_\beta,$$

et on veut écrire le noyau de $(\sin(\sqrt{\Delta_\beta} t))/\sqrt{\Delta_\beta}$ (noté E_β) pour en déduire une formule de trace. La comparaison à l'équation des ondes habituelles, ainsi que la propagation à vitesse 1 va nous permettre de développer E_β en diffractions multiples, c'est-à-dire écrire

$$E_\beta = E_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} K_n,$$

où E_∞ désigne la solution fondamentale de l'équation des ondes habituelle et K_n est un opérateur qui prend en compte n diffractions.

La deuxième partie du travail consiste à montrer qu'on peut prendre la trace (au sens des distributions) de ces opérateurs et à localiser leurs singularités. On obtient alors le résultat attendu (cf. Théorème 2.1):

Théorème 0.1.

$$\text{supp sing}(\mathrm{Tr}(E_\beta)) \subset \text{supp sing}(\mathrm{Tr}(E_\infty)) \cup \Lambda,$$

avec

$$\Lambda = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{L}_n,$$
$$\mathbb{L}_n = \left\{L \,|\, \exists n \geq 1, \quad \exists \gamma_1 \dots \gamma_n,\ \textit{lacet géod. joignant } p \textit{ à } p,\ L = \sum L_{\gamma_i}\right\}.$$

Dans ce théorème, une géodésique brisée en p s'obtient en suivant un lacet géodésique issu de p, qui y revient (éventuellement en faisant un angle), puis en suivant un second et ainsi de suite. Les éléments de $\mathbb{L}_n$ correspondent donc aux longueurs des géodésiques brisées formées de n lacets géodésiques.

Pour calculer de plus le premier terme du développement de $\mathrm{Tr}(E_\beta)$ au voisinage de chaque singularité, deux hypothèses supplémentaires seront nécessaires: une concernant la géométrie de M (p n'est pas conjugué à lui même, voir partie 2.2), et l'autre concernant le nombre de manières d'écrire $L = \sum L_{\gamma_j}$, voir partie 2.3. Dans le cas du tore, on peut mener des calculs explicites du début à la fin et on obtient le développement total de la trace.

Remarque. Il y a deux étapes bien distinctes dans l'établissement du résultat annoncé. Dans un premier temps on peut mener des calculs formels qui aboutissent, dans un deuxième temps ces calculs doivent être justifiés. Une telle justification est parfois fastidieuse et apporte peu à la compréhension générale. On a donc préféré rejeter les calculs les plus lourds en appendice, pour qu'ils ne nuisent pas trop à la lisibilité de la démarche.

1. DÉVELOPPEMENT EN DIFFRACTIONS MULTIPLES

Dans tout ce papier, M désignera une variété riemannienne compacte, de dimension 3, et β un nombre réel fixé. Δ désignera le laplacien riemannien pris au sens des distributions, avec la convention de signe donnée dans l'introduction, Δ_∞ sera l'extension autoadjointe à l'espace de Sobolev H^2 et Δ_β celle correspondant à la condition C^β, cf. Refs. [8,9] et App. A.

Principe

Le principe du développement en diffractions multiples est le suivant: on part de $v_\infty(t,x)$, solution de l'équation des ondes relative à Δ_∞ pour la donnée initiale u, (voir ci-dessous système (1)). Si u est à support loin de p, la solution libre est nulle en p jusqu'à un temps t_0, elle coïncide donc avec la solution perturbée. Quand elle n'est plus nulle en p, la condition C^β n'est alors plus vérifiée. Il faut donc rajouter une fonction $v_1(t,x)$ pour forcer la condition C^β en p. La fonction v_1 doit aussi vérifier l'équation des ondes en dehors de p et être nulle tant que la solution libre convient. Il est donc naturel de chercher cette fonction comme solution de l'équation des ondes inhomogène dont le second membre est de la forme $a_1(t)\delta_{x=p}$ (voir système (2)).

Le fait de vérifier la condition C^β va déterminer $a_1(t)$ en fonction des valeurs de la solution libre en p. Plus précisément, a_1 sera solution d'une équation de Volterra dont le second membre est $v_\infty(t,p)$. Pour établir cette équation de Volterra, on utilise la paramétrix d'Hadamard (cf. Proposition 1.1) qui n'est valable que pour des temps petits. Cette restriction nous amènera à écrire v_1 comme la somme de deux fonctions w_1 et r_1 telles que ce soit $v_\infty + w_1$ qui vérifie C^β en p, et ceci pour tout temps. Il suffira alors de montrer qu'on peut faire jouer à r_1 le rôle de la solution libre pour itérer le processus et faire ainsi apparaître ce qu'on appelle le développement en diffractions multiples.

Notations. *On notera* $E_\beta(t,x,y) = ((\sin(\sqrt{\Delta_\beta}t))/\sqrt{\Delta_\beta})\delta_y$, *de sorte que* $E_\beta(t,x,y)$ *est le noyau distribution de l'opérateur* E_β *caractérisé par*:

$$\forall u,\ E_\beta u \ \textit{vérifie} \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) E_\beta u = 0, & \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times M\backslash\{p\}) \\ \lim\limits_{t\to 0} E_\beta u(t,\cdot) = 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\partial E_\beta u}{\partial t} = u, \\ \forall t,\ E_\beta u(t,\cdot)\ \textit{vérifie}\ C^\beta \textit{ en } p. \end{cases} \tag{1}$$

On notera de la même manière E_∞ solution fondamentale de l'équation des ondes relative à Δ_∞, c'est-à-dire que dans le système précédent la dernière condition est remplacée par:

$$\forall t, \quad E_\infty u(t,\cdot) \text{ est } H^2,$$

où H^2 est l'espace de Sobolev. Cette dernière condition peut être remplacée par:

$$E_\infty u(t,\cdot) \text{ est continue en } p.$$

On notera ϕ_n une base orthonormée de fonctions propres de Δ_∞, et λ_n les valeurs propres associées.

La distance riemannienne entre x et y sera désignée par $\overline{xy}$, et R_i sera le rayon d'injectivité de M.

On choisit $r < R_i/2$, et on prend deux fonctions χ et ρ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$ telles que $\chi + \rho = 1$, et $\chi(s)$ vaut 1 si $s < r$ et 0 si $s > 2r$.

Dans la construction expliquée ci-dessus, u est la condition initiale dans $\mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$. On note $v_\beta(t,x) = (E_\beta u)(t,x)$, et $v_\infty(t,x) = (E_\infty u)(t,x)$.

On va rajouter v_1 à v_∞ pour forcer la condition C^β tout en continuant à vérifier l'équation des ondes en dehors de p. Pour cela, on cherche v_1

solution du système suivant:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right) v_1 = a_1(t)\delta_{x=p} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M) \\ \lim\limits_{t \to 0} v_1(t, \cdot) = 0, \\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

où a_1 est à déterminer.

La solution du problème inhomogène précédent est reliée à la solution fondamentale par le principe de Duhamel (cf. Ref. [10], p. 120 par exemple). On peut donc écrire:

$$v_1(t, x) = \int_0^\infty E_\infty(s, x, p) a_1(t - s)\, ds.$$

On va tout de suite séparer ce qui se passe pour les s petits, et ce qui se passe pour les s grands. On note donc:

$$w_1(t, x) = \int_0^\infty \chi(s) E_\infty(s, x, p) a_1(t - s)\, ds, \tag{3}$$

$$r_1(t, x) = \int_0^\infty \rho(s) E_\infty(s, x, p) a_1(t - s)\, ds. \tag{4}$$

Remarque. On va chercher à exprimer le noyau de E_β en fonction d'expressions plus ou moins compliquées de E_∞, on va donc oublier l'indice ∞. À partir de maintenant, E désigne la solution fondamentale de l'équation des ondes non perturbée.

1.1. Un Opérateur Auxiliaire

Le but de cette partie est de déterminer a_1 en fonction de $v_\infty(t, x)$. D'après le principe de construction, a_1 est choisie de telle manière que $w_1 + v_\infty$ vérifie C^β pour tout temps. En fait seules les valeurs de v_∞ en p sont importantes; on va donc noter $r_0(t) = v_\infty(t, p)H(t)$, où H est la fonction de Heaviside. Du fait de la propagation à vitesse 1, $v_\infty(t, p)$ est nulle pour $t < t_0$ (où $t_0 =$ désigne la distance du support de u à p), et comme de plus, v_∞ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times M)$, on peut affirmer que r_0 est $\mathcal{C}^\infty$ et nulle si $t < t_0$.

Pour relier a_1 à r_0, il faut avoir le développement de $w_1(t, x)$ au voisinage de p. Dans la définition de w_1 (cf. Eq. (3)), le noyau de l'équation des ondes n'intervient que pour des temps petits. On peut donc utiliser la paramétrix d'Hadamard. Celle-ci nous est donnée par la proposition suivante déduite de Ref. [11], pp. 254–257. Avant de l'énoncer, on va rappeler quelques notations. La fonction $\Theta(x, y)$ est par définition telle que:

$$\int_M \phi(y)\, dv_g(y) = \int_{T_xM} \phi \circ \exp_x(m)\Theta(x, \exp_x(m))\, dm,$$

pour toutes les fonctions ϕ à support dans la boule de centre x et de rayon R_i. On a noté $\exp_x$ l'application exponentielle en x (qui est un difféomorphisme sur le support de ϕ), dv_g la mesure riemannienne, et dm la mesure de Lebesgue euclidienne dans l'espace tangent en x à M (noté T_xM) cf. Ref. [4].

Proposition 1.1. *Pour $\overline{xy} \leq t < r < R_i$, R_i rayon d'injectivité de M*

$$E(t, x, y) = u_0(x, y)\delta(\overline{xy}^2 - t^2) + \sum_{k=1}^{N} u_k(x, y)(\overline{xy}^2 - t^2)_-^{k-1} + \mathcal{R}_N(t, x, y),$$

$\mathcal{R}_N$ est $\mathcal{C}^N([0; r[\times\{\overline{xy} < r\})$, et les u_i sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{xy} < R_i$. De plus on a:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\Theta(x, y)^{-(1/2)},$$

Remarque. Si N est une variété riemannienne et $F: \ N \to \mathbb{R}$ une submersion $\delta(F(x))$ désigne la distribution $F^*\delta$ (cf. Ref. [12] p. 40). Si S_0 est l'hypersurface $F^{-1}(0)$ et $d\mu_0$ la mesure riemannienne induite par N sur S_0, on a:

$$\forall \chi \in \mathcal{C}_c(N) \ \int_N \delta(F(x))\chi(x) = \int_{S_0} \chi \frac{d\mu_0}{|\mathrm{grad}\ F|}.$$

En considérant le feuilletage par les hypersurfaces $F(x) = a$, on a aussi la décomposition suivante de la mesure riemannienne $|dx|$:

$$\int f(x)|dx| = \int \left[\int_{S_a} f(x)\delta(F(x) - a) \right] da.$$

Ce qui donne, dans le cas qui nous intéresse, pour f, fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans la boule de centre x et de rayon r_i:

$$\int_M \delta(\overline{xy}^2 - t^2) f(y)\, dv_g(y) = \frac{1}{2} t\tilde{f}(t, x), \tag{5}$$

avec:

$$\tilde{f}(t, x) = \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} f \circ \exp_x(t\omega)\Theta(x, \exp_x(t\omega))\, d\omega.$$

Remarque. L'expression de la paramétrix d'Hadamard est l'ingrédient principal du développement en diffractions multiples. On peut donc traiter le cas de la dimension 2 en prenant la paramétrix correspondante et en suivant la même démarche.

On appellera $\tilde{E}(t,x,y) = E(t,x,y) - u_0(x,y)\delta(\overline{xy}^2 - t^2)$. D'après la Proposition 1.1, $\tilde{E}(t,p,p)$ est bien définie et continue sur $[0,r[$. On peut maintenant décrire le comportement de w_1 au voisinage de p.

Lemme 1.1. *Au voisinage de $x = p$, on a le développement suivant*:

$$w_1(t,x) = u_0(x,p)\frac{a_1(t-\overline{xp})}{2\overline{xp}} + \int_0^\infty \chi(s)\tilde{E}(s,p,p)a_1(t-s)\,ds.$$

Preuve. C'est une conséquence directe de l'expression du noyau de l'équation des ondes aux temps petits. □

Il ne reste plus qu'à écrire la condition C^β pour $w_1 + r_0$ pour obtenir la proposition suivante:

Théorème 1.1. *Étant donnée $r_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times M)$, nulle au voisinage de $t = -\infty$, il existe z_β distribution sur $\mathbb{R}$ telle que si on pose*:

$$a_1 = z_\beta * r_0(\cdot, p),$$

alors w_1 définie par

$$w_1(t,x) = \int_0^\infty \chi(s)E(s,x,p)a_1(t-s)\,ds,$$

est telle que $w_1(t,x) + r_0(t,x)$ vérifie C^β en p. De plus, z_β est unique si on impose la condition suivante:

$$(r_0 = 0 \quad \forall t < t_0) \Rightarrow (a_1 = 0 \quad \forall t < t_0).$$

La distribution z_β est alors nulle pour les temps négatifs, et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de 0. Au voisinage de 0, on a le développement suivant:

$$z_\beta(t) = 4\pi H(t) + R_\beta(t),$$

avec R_β continue, et H la fonction de Heaviside.

Preuve. On écrit ce que veut dire la condition C^β. D'après le lemme précédent, on peut écrire, au voisinage de p:

$$\begin{aligned} w_1(t,x) + r_0(t,x) = {} & \frac{1}{4\pi\overline{xp}}a_1(t) - \frac{1}{4\pi}a_1'(t) \\ & + \int_0^\infty \chi(s)\tilde{E}(s,p,p)a_1(t-s)\,ds + r_0(t,p) + o(1), \end{aligned}$$

car $\Theta(x, p) = 1 + o(\overline{xp}^2)$ (cf. Ref. [4], pp. 99–100). Pour vérifier la condition C^β, on doit donc avoir:

$$\beta \frac{1}{4\pi} a_1(t) - \frac{1}{4\pi} a_1'(t) + \int_0^\infty \chi(s)\tilde{E}(s, p, p) a_1(t-s)\, ds + r_0(t, p) = 0.$$

Cette équation se réécrit sous la forme:

$$a_1'(t) - \beta a_1(t) - 4\pi \int_0^\infty \chi(s)\tilde{E}(s, p, p) a_1(t-s)\, ds = 4\pi r_0(t, p). \tag{6}$$

Il suffit de résoudre avec δ comme second membre, et le résultat pour un second membre quelconque sera donné par convolution. On résout par approximations successives (le fait que le processus converge est un résultat classique de la théorie des équations de type Volterra cf. Ref. [13]). La condition supplémentaire sert à fixer la constante d'intégration. On trouve donc

$$z_\beta(t) = 4\pi \exp(\beta t) H(t) + \tilde{R}_\beta(t),$$

avec $\tilde{R}_\beta$ continu, ce qui donne le même début de développement que celui donné dans la proposition. □

Dans l'optique du développement en diffractions multiples, on va vouloir faire jouer à r_1 le rôle de r_0. Pour cela, on a besoin du lemme suivant:

Lemme 1.2. *Si a_1 est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ nulle pour $t < t_0$ alors $r_1(t, x)$ définie par*:

$$r_1(t, x) = \int_0^\infty \rho(s) E(s, x, p) a_1(t-s)\, ds,$$

est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times M)$ et est nulle pour $t < t_0 + r$.

Preuve. La nullité est obtenue en regardant les supports respectifs de ρ et a_1. Pour la régularité, on peut par exemple décomposer r_1 suivant les ϕ_n:

$$r_1(t, x) = \sum \left(\int_0^\infty \rho(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} s)}{\sqrt{\lambda_n}} a_1(t-s)\, ds \right) \phi_n(x)\phi_n(p).$$

Les dérivations par rapport à t porteront uniquement sur a_1, et en intégrant par parties, il est clair que:

$$\forall K \text{ compact en } t,\ \forall k,\ \forall d,\ \exists A \in \mathbb{R}$$

telle que

$$\left| \int_0^\infty \rho(s) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} s)}{\sqrt{\lambda_n}}\ \partial_t^k a_1(t-s)\, ds \right| \le A |\lambda_n|^{-d}.$$

Par ailleurs, on a $|\phi_n(p)| \le \tilde{A}(1 + \lambda_n)$ car H^2 s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0$. On voit donc qu'uniformément localement en t les coefficients décroissent plus vite que toutes les puissances négatives de λ_n ce qui donne le résultat annoncé. □

Remarque. La partie principale de l'équation pseudodifférentielle Eq. (6) ne dépend pas de β. Il est donc normal que le symbole principal de z_β n'en dépende pas non plus. Comme, dans la partie 2, on ne calculera que le premier ordre des singularités, ces dernières ne dépendront pas non plus de β.

1.2. Développement en Diffractions Multiples

Tout ce qui a été montré dans la partie précédente nous permet de construire les objets suivants:

Proposition 1.2. *Étant donnée $u \in \mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$, on peut construire, pour tout n, les objets suivants par récurrence*:

$$a_n(t) = \big(z_\beta * r_n(.,p)\big)(t),$$
$$w_{n+1}(t,x) = \int \chi(s)E(s,x,p)a_n(t-s)\,ds,$$
$$r_{n+1}(t,x) = \int \rho(s)E(s,x,p)a_n(t-s)\,ds,$$
$$v_n = w_n + r_n,$$

avec comme condition initiale: $r_0 = v_\infty$, *et z_β est donné par le Théorème* 1.1.

Preuve. La seule chose à vérifier est que $r_n(s,p)$ peut prendre la place de r_0 dans le Théorème 1.1. Or, d'après le Lemme 1.2, r_n est $\mathcal{C}^\infty$, et est nulle au voisinage de $-\infty$. □

De plus la propagation à vitesse 1 nous permet d'affirmer le corollaire suivant:

Corollaire 1.1. *Pour tout n, v_n est nulle au moins jusqu'à $t_0 + (n-1)r$, et r_n jusqu'à $t_0 + nr$.*

On peut maintenant énoncer le théorème principal:

Théorème 1.2 (Développement en diffractions multiples). *Avec les notations de la proposition précédente, on a*:

$$v_\beta(t,x) = v_\infty(t,x) + \sum_{n\geq 1} v_n(t,x).$$

Preuve. Il faut montrer que la somme de droite vérifie les propriétés qui caractérisent v_β. Il y a donc trois choses à examiner:

- *L'équation des ondes en dehors de p*: C'est clair car tous les termes de la somme la vérifient.
- *La condition* C^β: On réécrit la somme comme:

$$v_\beta(t,x) = v_\infty(t,x) + w_1(t,x) + \sum_{n\geq 2}(w_n(t,x) + r_{n-1}(t,x)).$$

  Par construction, w_1 et les w_n sont tels que $v_\infty + w_1$ ainsi que $w_n + r_{n-1}$ vérifient C^β en p.
- *La condition initiale*: La propagation à vitesse 1 ainsi que la condition de support mise sur u nous ont permis de montrer que, pour $t < t_0$, tous les termes sauf v_∞ sont nuls. De plus, v_∞ vérifie la bonne condition initiale par construction. □

Remarque. D'après le Corollaire 1.1, localement en temps, la somme est toujours finie.

Dans la suite, on appellera K_n l'opérateur qui permet de passer de u à v_n. Intuitivement, il correspond à n diffractions au sens où v_n a besoin des valeurs de tous les r_i, $i < n$ pour se construire.

Remarque. D'après la construction, K_n va dépendre du choix de la fonction de troncature ρ. Ce choix n'influence bien sûr pas v_β, mais seulement la manière de l'écrire comme une somme. Les résultats des parties suivantes dépendront de ρ chaque fois qu'on traitera K_n individuellement, cette dépendance disparaîtra en sommant sur n.

1.3. Écriture Des Noyaux

Il suffit en fait d'examiner la manière dont sont définis les a_n, r_n, v_n. On peut noter $U(t) = E(t,p,p)$, où on a noté $E(t,p,p) = i^*E$ avec i l'application qui à t associe (t,p,p). Comme β est fixé, on va oublier l'indice β. On note donc simplement z la fonction z_β. D'après la partie précédente, on a l'expression:

$$a_n = z * \rho U * z * \rho U \cdots * z * r_0.$$

On note z_n la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par récurrence:

$$\begin{cases} z_1 = z, \\ z_{n+1} = z * \rho U * z_n. \end{cases} \tag{7}$$

Cette distribution auxiliaire nous est utile puisqu'on a la proposition suivante:

Proposition 1.3.

$$K_n(t,x,y) = \int_{s_1\geq 0,' s_2 \geq 0} E(s_1,x,p) z_n(t-s_1-s_2) E(s_2,p,y)\, ds_1\, ds_2.$$

Preuve. On écrit $K_n u$ pour u dans $\mathcal{C}_0^\infty(M\backslash\{p\})$ et on identifie ainsi le noyau. $\square$

Jusqu'ici, on n'a construit des solutions que pour des conditions initiales $\mathcal{C}_c^\infty(M\backslash\{p\})$, si on peut prolonger à L^2 la construction, on aura bien construit l'opérateur $\sin(t\sqrt{\Delta_\beta})/\sqrt{\Delta_\beta}$ (on sait qu'il est continu par le calcul fonctionnel). Cette vérification est faite dans l'appendice B.

2. SINGULARITÉS DE LA TRACE

2.1. Expression de la Trace

Dans tout ce qui suit, la trace est entendue au sens des distributions. Les égalités sont donc aussi au sens des distributions.

Avant de commencer à parler de la trace des opérateurs K_n, il faut montrer que cette dernière existe. On reporte cette démonstration un peu lourde à l'appendice C. Le but est maintenant de localiser les singularités de la trace de K_n. Pour cela on va d'abord exprimer cette trace sous une forme plus simple à étudier. De façon formelle, on peut écrire:

$$\begin{aligned} Tr(K_n)(t) &= \int_M K_n(t,x,x)\, dx \\ &= \int_{s_1,s_2\geq 0} z_n(t-s_1-s_2)\left[\int_M E(s_2,p,x)E(s_1,x,p)\, dx\right] ds_1\, ds_2. \end{aligned}$$

On voit alors apparaître le noyau de $((\sin(\sqrt{\Delta_\infty} s_1))/\sqrt{\Delta_\infty}) \circ ((\sin(\sqrt{\Delta_\infty} s_2))/\ \sqrt{\Delta_\infty})$ pris entre p et p. Grâce au calcul fonctionnel on peut réécrire cette distribution:

$$\frac{1}{2}[V(s_1-s_2) - V(s_1+s_2)],$$

où on a noté $V(s) = ((\cos(\sqrt{\Delta_\infty} s) - 1)/\Delta_\infty)\ (p,p)$.

Remarque. On a $V'(t) = -U(t)$, où U est définie au début de la partie 1.3.

On va un peu continuer ce calcul formel que l'on justifiera, par régularisation à la fin de cette section.

$$S_n(t) = \mathrm{Tr}(K_n)(t) = \frac{1}{2}\int_{s_1, s_2 \geq 0} z_n(t-s_1-s_2)[V(s_1-s_2)-V(s_1+s_2)]\, ds_1\, ds_2.$$

On fait le changement de variable $r = s_1 + s_2,\ s = s_1 - s_2$:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{4}\int_{r\geq 0,\, r\geq s\geq -r} z_n(t-r)[V(s) - V(r)]\, dr\, ds \\ &= \frac{1}{2}\int_{r\geq 0} z_n(t-r)\left[\int_0^r V(s)\, ds - rV(r)\right] dr, \end{aligned}$$

car V est paire. On fait une intégration par parties, en posant $Z_n(t) = \int_{-\infty}^t z_n(r)\, dr$, de sorte que $Z_n(0)$ est toujours nul. On obtient finalement:

$$S_n(t) = \frac{1}{2}\int_{r\geq 0} Z_n(t-r) rU(r)\, dr.$$

On veut maintenant justifier cet enchaînement de calculs. Pour cela on va régulariser.

Notons P_m, le projecteur sur les m premiers ϕ_j. Le noyau de $P_m K_n P_m$ est alors:

$$\sum_{i,j\leq m} \int z_n(t-s_1-s_2) \frac{\sin(s_1\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{\sin(s_2\sqrt{\lambda_j})}{\sqrt{\lambda_j}}\, ds_1\, ds_2 \phi_i(x)\phi_i(p)\phi_j(p)\phi_j(y),$$

que l'on peut réécrire

$$\int_{s_1, s_2} z_n(t-s_1-s_2) E_m(s_1, x, p) E_m(s_2, p, y)\, ds_1\, ds_2,$$

avec $E_m = P_m E P_m$. Comme $P_m K_n P_m$ est de rang fini, c'est un opérateur à trace. Comme son noyau est $\mathcal{C}^\infty$ on obtient sa trace en faisant $x = y$ et en intégrant sur M (ici, tous les calculs sont faits au sens des distributions en t, il faut donc penser qu'on a utilisé une fonction test avant de les faire). On a donc:

$$\mathrm{Tr}(P_m K_n P_m) = \int_{s_1, s_2} z_n(t-s_1-s_2)\left(\int_M E_m(t,x,p)E_m(t,p,y)dv_g(x)\right) ds_1\, ds_2.$$

Mais maintenant tous les calculs présentés dans le début de cette section sont légitimes, et on trouve donc:

$$\mathrm{Tr}(P_m K_n P_m) = \frac{1}{2}\int_{s\geq 0} Z_n(t-s) sU_m(s)\, ds, \tag{8}$$

où

$$U_m(s) = E_m(s,p,p) = \sum_{i\leq m} \frac{\sin(s\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i(j)^2.$$

On veut maintenant faire tendre m vers l'infini. Il faut tout d'abord s'assurer que $P_m K_n P_m$ tend vers K_n dans les opérateurs à trace. C'est ce qu'implique la proposition suivante:

Proposition 2.1. *Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on considère $(A_m)_m$ une approximation de l'identité, et T un opérateur à trace alors*:

$$A_m T A_m^* \to T \text{ dans les opérateurs à trace}.$$

Preuve. On appelle ici approximation de l'identité une suite A_m telle que:

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad A_m x \to x \text{ (fortement)}.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cela implique l'existence d'une constante M telle que:

$$\forall m, x \ \|A_m x\| \leq M\|x\|.$$

T est à trace, donc s'écrit

$$T = \sum a_n \langle x_n, \cdot\rangle y_n,$$

avec $\sum |a_n| < \infty$ et $\|x_n\| = \|y_n\|_2 = 1$. $T_m = A_m T A_m^*$ s'écrit alors:

$$T_m = \sum a_n \langle A_m x_n, \cdot\rangle A_m y_n.$$

On peut donc écrire:

$$T_m = R_m + S_m, \text{ avec}$$
$$R_m = \sum a_n \langle A_m x_n - x_n, \cdot\rangle A_m\, y_n, \text{ et}$$
$$S_m = \sum a_n \langle x_n, \cdot\rangle (A_m\, y_n - y_n).$$

On va montrer que cette somme converge vers 0 dans $\mathcal{I}_1$:

$$\|R_m\|_{\mathcal{I}_1} \leq \sum |a_n| \|A_m x_n - x_n\| \|y_n\|,$$

qui tend vers 0 par convergence dominée. Le terme S_m se traite de la même manière, ce qui conclut la proposition. □

On applique cette proposition pour $A_m = P_m$ (P_m est autoadjoint).

On veut maintenant passer à la limite dans l'égalité Eq. (8) pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 2.2. *La trace de* K_n *est donnée par la formule*:

$$\mathrm{Tr}(K_n)(t) = \frac{1}{2}\int_{s\geq 0} sU(s)Z_n(t-s)\,ds, \tag{9}$$

avec $U(s) = E(s,p,p)$, *et* $Z_n(s) = \int_{-\infty}^{s} z_n(r)\,dr$.

Preuve. Le passage à la limite dans Eq. (8) est un peu plus délicat qu'il n'y paraît, et cela à cause de la borne de l'intégrale. Pour le faire proprement, on découpe encore une fois avec les fonctions χ et ρ. On réécrit donc l'égalité Eq. (8) en deux morceaux. Pour le terme loin de 0: on choisit une fonction test f et on note

$$\tilde{f}(s) = \int Z_n(t-s)f(s)\,ds. \tag{10}$$

On s'intéresse donc à la convergence de:

$$c_m = \int_{s\geq 0} s\rho(s)E_m(s,p,p)\tilde{f}(s)\,ds.$$

On peut dans cette intégrale faire autant d'intégrations par parties que l'on veut de sorte qu'on obtient:

$$c_m = \int [E_m]^{(-k)}(s,p,p)[s\rho(s)\tilde{f}\,]^{(k)}(s)\,ds,$$

où

$$E_m^{(-k)}(s,\ \cdot\,,\cdot)s = -\int_0^s [E_m]^{(-k+1)}(s_1,\ \cdot\,,\cdot)\,ds_1.$$

En examinant cette opération sur le développement en fonctions propres, on voit que pour tout n, on peut trouver un k de sorte que

$$E_m^{(-k)}(s,\ \cdot\,,\cdot) \to E^{(-k)}(s,\ \cdot\,,\cdot) \quad \text{dans} \quad H^n(M\times M).$$

On choisit le n suffisant pour que le passage à la limite se passe bien, et on fait ensuite les intégrations par parties dans l'autre sens.

Pour le terme avec χ on est obligé de faire plus attention. Ce sera l'objet d'un calcul ultérieur. Pour l'instant on note abusivement:

$$\int_{s\geq 0} s\chi(s)E(s,p,p)Z_n(t-s)\,ds,$$

sa limite. □

Finalement, on se rend compte que pour analyser les singularités de $\mathrm{Tr}(K_n)$ on a besoin de connaître les singularités d'une part de $U(t)$, et d'autre part de Z_n.

2.2. Singularités des Opérateurs Auxiliaires

Commençons par ρU, qui sert à construire tous les autres opérateurs.

Singularités de ρU

Il faut pour cela examiner $E(t,x,y)$. On sait déjà (cf. Ref. [10]) que $E(t,x,y)$ est un opérateur intégral de Fourier (OIF) associé à:

$$\Lambda^+ \cup \Lambda^-,$$

où

$$\Lambda^\varepsilon = \left\{ (t,\tau,x,\xi,y,\,-\eta) \quad \begin{matrix} \Phi_t(y,\eta/|\eta|) = (x,\xi/|\xi|) \\ \\ |\xi| = |\eta| = \varepsilon\tau \end{matrix} \right\},$$

Φ est le flot géodésique. Dans ce qui suit, on va se placer au voisinage d'une géodésique γ. La contribution de γ à E peut s'écrire: $I^+ + I^-$, I^ε étant un OIF associé à Λ^ε et localisé au voisinage de γ. Lorsque x et y ne sont pas conjugués le long de γ, on peut écrire:

$$I^\varepsilon = \int_0^\infty \exp[-i\varepsilon\theta(d_\gamma(xy) - t)] a_\varepsilon(t,x,y,\theta)\, d\theta,$$

où d_γ représente la distance comptée le long de γ.

On ne va plus maintenant s'intéresser qu'à la partie principale de I^ε. Grâce à la paramétrix d'Hadamard, on peut écrire (pour des temps petits):

$$I^\varepsilon(t,x,y) = \int_0^\infty \exp[-i\varepsilon\theta(d_\gamma(xy) - t)] \frac{1}{4\pi} \frac{u_0(x,y)}{d_\gamma(xy)}\, d\theta,$$

car ainsi, en faisant la somme $I^+ + I^-$, on retrouvera bien:

$$u_0(x,y)\delta(\overline{xy}^2 - t^2).$$

Remarque. Dans l'égalité précédente, on n'a écrit que la partie principale de I^ε, ce qui rend l'emploi du signe = abusif. Comme on ne s'intéressera qu'à la partie principale des singularités, cet abus sera très souvent répété.

Rappelons que $u_0(x,y) = (1/2\pi)|\Theta(x,y)|^{-(1/2)}$, et que la fonction Θ peut être définie par: $\Theta(x,y) = |\det D\exp_y(m)|$ où m est le point de T_yM tel que $\exp_y(m) = x$ (cf. Ref. [4]). Si x et y ne sont pas conjugués le long de la géodésique γ, on peut définir de la même manière

$$u_\gamma(x,y) = \frac{1}{2\pi}|\det D\exp_y(m_\gamma)|^{-(1/2)},$$

où m_γ est tel que $\exp_y(sm_\gamma)$ décrive la portion de γ allant de y à x.

Les propriétés de transport du symbole principal nous permettent alors de dire, qu'à une phase près, la contribution principale de I^ε est:

$$\int_0^\infty \exp[-i\varepsilon\theta(d_\gamma(xy) - t)]\frac{1}{4\pi}\frac{u_\gamma(x,y)}{d_\gamma(xy)}\,d\theta.$$

Il reste à calculer la phase, ce que l'on fait à l'aide du résultat de:[14] *pour un OIF associé à Λ^+, le symbole principal est multiplié par i^{-n} au passage d'un point conjugué d'indice n.*

Remarque. Les OIF I^ε sont complexes conjugués l'un de l'autre.

Après un point conjugué d'indice n, on a donc l'expression:

$$E(t,x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{u_\gamma(x,y)}{d_\gamma(xy)}\left[i^{-n}\int_0^\infty \exp(-i\theta(d_\gamma(xy) - t)\,d\theta \right.$$
$$\left. + i^n\int_0^\infty \exp(i\theta(d_\gamma(xy) - t)\,d\theta\right].$$

Si n est pair on trouve donc:

$$E(t,x,y) = (-1)^{n/2}\frac{u_\gamma(x,y)}{2d_\gamma(xy)}\delta(d_\gamma(xy) - t).$$

Si n est impair, on trouve alors:

$$E(t,x,y) = (-1)^{(n-1)/2}\frac{u_\gamma(x,y)}{d_\gamma(xy)}\frac{1}{4\pi}T(d_\gamma(xy) - t),$$

avec

$$T = -2\mathrm{Im}\left(\int_0^\infty \exp(i\theta s)\,d\theta\right).$$

La distribution T est classique (cf. Ref. [15]):

$$T(s) = -2v.p.\left(\frac{1}{s}\right),$$

où $v.p.(1/s)$ désigne la valeur principale de $1/s$ (cf. Ref. [15]).

Pour passer à U, il faut faire $x = p = y$, cela va faire apparaître les lacets géodésiques qui joignent p à p. Pour pouvoir utiliser les expressions données ci-dessus, il faut faire l'hypothèse suivante:

($\mathcal{H}_1$) *Le long de tout lacet géodésique joignant p à p, p n'est pas conjugué de lui-même.*

On va noter Γ l'ensemble des lacets qui joignent p à p. On aura aussi besoin des notations suivantes:

- L_γ est la longueur de γ,
- μ_γ est la somme des indices des points conjugués le long de γ,
- $\theta_\gamma = |\det D\exp_p(L_\gamma\dot{\gamma}(0))|^{-1/2}$.

Remarque. μ_γ est l'indice de Morse du lacet γ pour le problème du plus court chemin à extrémités fixées. (cf. Ref. [14])

Proposition 2.3.

$$WF(\rho U) \subset \{(L_\gamma, \lambda) \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

De plus, sous l'hypothèse ($\mathcal{H}_1$), *on a, au premier ordre*:

$$\rho U(t) = \sum_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma(t),$$

avec:

$$F_\gamma(t) = (-1)^{\mu_\gamma/2}\frac{1}{4\pi}\,\frac{\theta_\gamma}{L_\gamma}\delta(t - L_\gamma) \qquad \textit{si } \mu_\gamma \textit{ est pair},$$

$$F_\gamma(t) = (-1)^{(\mu_\gamma-1)/2}\frac{1}{4\pi^2}\frac{\theta_\gamma}{L_\gamma}\,v.p.\left(\frac{1}{t - L_\gamma}\right) \qquad \textit{si } \mu_\gamma \textit{ est impair}.$$

Preuve. La première partie résulte d'un calcul classique de *Wave-Front* (car $U = i^*E$, cf. 1.3), quant à la deuxième, elle découle du calcul précédent. □

Singularités de z_n

Comme z_1 et z_β sont égales, on peut supposer dans cette partie qu'on étudie z_n pour n plus grand que 2. Un calcul de *Wave-Front* permet de localiser les singularités de z_{n+1}:

$$WF(z_{n+1}) \subset \left\{(L, \lambda) \mid L = \sum_1^n L_{\gamma_i}\right\}.$$

Notations.

- $[\gamma]_n = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *en tenant compte de l'ordre*,
- $L_{[\gamma]_n} = \sum_{i=1}^{n} L_{\gamma_i}$,
- $\mu_{[\gamma]_n} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\gamma_i}$,
- $a_{[\gamma]_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta_{\gamma_i}}{L_{\gamma_i}}$

Pour calculer maintenant la singularité principale, il suffit dans l'expression de z_n de remplacer tous les ρU par la singularité principale en L_{γ_i}. Il nous faut donc examiner les distributions qui s'écrivent:

$$z * F_{\gamma_1} * z * F_{\gamma_2} \cdots F_{\gamma_n} * z,$$

où les F_γ sont donnés dans la Proposition 2.3. Pour les γ_i qui donnent une masse de Dirac (μ_{γ_i} pair), la convolution ne pose pas de problème. Il faut travailler un peu plus pour les autres. On multiplie d'abord par une fonction g qui tronque la distribution. Plus précisément on remplace $F_{\gamma_i}(s)$ par $F_{\gamma_i}(s)g(s - L_{\gamma_i})$ où g est $\mathcal{C}_0^\infty$ et identiquement 1 au voisinage de 0. Ceci ne change pas la singularité.

On pose $T_0(s) = g(s)\,\text{v.p.}(1/s)$ et $T_L(s) = T_0(s - L)$. Pour avoir la singularité principale de z_n on est amené à faire des convolutions de T_{L_1} avec T_{L_2}. Le résultat nous est donné par le lemme suivant:

Lemme 2.1. *Pour toutes les valeurs de L_1 et L_2, on a*:

$$T_{L_1} * T_{L_2}(t) = -\pi^2 \delta(t - (L_1 + L_2)).$$

Preuve. On va noter $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier (normalisée comme dans[15]), et f la fonction telle que: $\mathcal{F}(f) = g$, c'est à dire:

$$\int \exp(ix\sigma) f(x)\, dx = g(\sigma).$$

Avec cette définition, on a:

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}},$$
$$\mathcal{F}a * b = \mathcal{F}a \times \mathcal{F}b,$$
$$\mathcal{F}ab = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}a * \mathcal{F}b,$$
$$\mathcal{F}H(\sigma) = iv.p.\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \pi\delta(\sigma),$$

on renvoie à[15] pour ces résultats.

On note $F = f * H$ de sorte que F est la primitive de f s'annulant en $-\infty$. Notamment, on a l'égalité $2H * fF = F^2$.

On va écrire de deux manières $\mathcal{F}[2\pi \exp(-iL_1 x)F \exp(-iL_2 x)\mathcal{F}]$. D'une part on a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}[2\pi \exp(-iL_1 x)F \exp(-iL_2 x)F]\\
&\quad = \mathcal{F}[\exp(-iL_1 x)F] * \mathcal{F}[\exp(-iL_2 x)F]\\
&\quad = \pi^2\delta(\cdot - L_1 - L_2) - T_{L_1} * T_{L_2} + 2i\pi T_{L_1+L_2}
\end{aligned}$$

et d'autre part, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[2\pi \exp(-iL_1 x)F \exp(-iL_2 x)F] &= \mathcal{F}\left[2\pi \exp[-i(L_1 + L_2)x]F^2\right]\\
&= \mathcal{F}[H * 4\pi fF](\cdot - (L_1 + L_2))
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[H * 4\pi fF](\sigma) = 4i\pi\mathcal{F}[fF](\sigma)v.p.\left(\frac{1}{\sigma}\right) + 4\pi^2\mathcal{F}[fF](0)\delta(\sigma).$$

On vérifie à l'aide d'une intégration par partie que $\mathcal{F}[f\,F](0) = (1/2)g(0)^2 = 1/2$. Il suffit alors d'identifier parties réelles et imaginaires pour avoir le résultat. □

On peut maintenant énoncer la proposition relative aux singularités de z_n.

Proposition 2.4. *Pour tout* $n \geq 1$

$$WF(z_{n+1}) \subset \left\{(L, \lambda) \;\middle|\; L = \sum_1^n L_{\gamma_i}\right\},$$

de plus, au voisinage d'un point $L = \sum_1^n L_{\gamma_i}$, *la contribution apportée par* $[\gamma]_n$ *est*:

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{n!}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n})/2} a_{[\gamma]_n}(t - L)_+^n \qquad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,}\\
&\frac{4}{n!}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2} a_{[\gamma]_n}(t - L)^n \mathrm{Ln}|t - L| \qquad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair}
\end{aligned}$$

Preuve. On calcule d'abord la convolution $F_{[\gamma_n]} = F_{\gamma_1} * F_{\gamma_2} * \ldots F_{\gamma_n}$, on va noter k le nombre de γ_i dont l'indice est impair, il y a alors deux formules suivant la parité de k.

Si k est pair $F_{[\gamma_n]}(t) = C_p\delta(t - L)$ et si k est impair, $F_{[\gamma_n]}(t) = C_i v.p.(1/(t - L))$, où C_p et C_i sont des constantes à déterminer. Un calcul direct donne:

$$
\begin{aligned}
C_p &= (-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-k)/2}\frac{1}{(4\pi)^n\pi^k}a_{[\gamma]_n}(-1)^{k/2}\pi^k\\
&= (-1)^{\mu_{[\gamma]_n}/2}\frac{1}{(4\pi)^n}a_{[\gamma]_n},\\
C_i &= (-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-k)/2}\frac{1}{(4\pi)^n\pi^k}a_{[\gamma]_n}(-1)^{(k-1)/2}\pi^{k-1}\\
&= (-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2}\frac{1}{(4\pi)^n\pi}a_{[\gamma]_n}.
\end{aligned}
$$

On fait ensuite $n+1$ convolutions avec z, ce qui revient, du point de vue de la singularité principale, à intégrer $n+1$ fois et à multiplier par $(4\pi)^{n+1}$. Ce qui donne le résultat annoncé pour la singularité principale. □

2.3. Retour à la Trace

Pour revenir à la trace, il faut d'abord examiner chaque S_n et ensuite sommer tous les résultats obtenus.

Singularités de S_n

Dans S_n interviennent deux types de contribution:

- celle apportée par $\int s\rho(s)U(s)Z_n(t-s)\,ds$,
- celle apportée par $\int s\chi(s)U(s)Z_n(t-s)\,ds$.

La première expression crée des singularités aux points $L=\sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$. En un tel point L, la contribution apportée par $[\gamma]_n$ (on rappelle que l'ordre est important) est:

$$(sF_{\gamma_n}(s)) * H * z * F_{\gamma_{n-1}} * z * \cdots * F_{\gamma_1} * z.$$

Le fait de remplacer $sF_{\gamma_n}(s)$ par $L_{\gamma_n}F_{\gamma_n}(s)$ ne change pas la singularité principale. On doit donc calculer:

$$L_{\gamma_n}F_{\gamma_n} * H * z * F_{\gamma_{n-1}} * z * \cdots * F_{\gamma_1} * z.$$

Ce calcul est le même que celui fait dans la partie précédente, exceptée la dernière convolution qui est par H et non par z. Ce qui change le résultat d'un facteur 4π. La singularité principale est donc finalement:

$$\frac{L_{\gamma_n}}{n!}(-1)^{\mu_{[\gamma]_n}/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^n \qquad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,}$$
$$\frac{L_{\gamma_n}}{\pi n!}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^n \mathrm{Ln}|t-L_{[\gamma]_n}| \quad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair}$$

Remarque. L'ordre de la singularité est le nombre de lacets géodésiques suivis.

Il reste la singularité apportée par la borne de l'intégrale. On rappelle que l'expression $\int s\chi(s)U(s)Z_n(t-s)\,ds$ a été définie comme:

$$\lim_{m\infty}\int s\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)\,ds.$$

On calcule directement cette limite grâce au lemme suivant:

Lemme 2.2.

$$\lim_{m\infty}\int s_+\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)\,ds = \frac{1}{4\pi}Z_n(t).$$

Preuve. On calcule d'abord la singularité principale de $U_m(t)$ au voisinage de 0. On part de la définition de E_m:

$$E_m(t,x,y) = \int E(t,x,z)P_m(z,y)|dz|.$$

On se place au voisinage de $x=p$, et de $t>0$ petit. On remplace alors dans l'égalité précédente $E(t,x,y)$ par le premier terme de la paramétrix d'Hadamard (les autres donneront des contributions plus régulières). En utilisant la formule (5), on trouve donc (en écrivant abusivement que E_m est égal à son premier terme):

$$E_m(t,p,y) = \frac{t}{2}\int_{\omega\in\mathbb{S}^2} u_0(p,t\omega)P_m(t\omega,y)\Theta(t\omega,y)\,d\omega.$$

On évalue en $y=p$, comme $E_m(t,p,p)=U_m(t)$ doit être impaire on trouve:

$$U_m(t) = \frac{t}{2}\int_{\omega\in\mathbb{S}^2} u_0(p,|t|\omega)P_m(|t|\omega,p)\Theta(|t|\omega,p)\,d\omega.$$

Maintenant, pour toute fonction $f\in\mathcal{C}_0^\infty$ à support près de 0, on veut la limite de:

$$\int s_+\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)f(t)\,ds\,dt.$$

(on a utilisé la notation intégrale pour l'évaluation d'une distribution).

$$\int s_+\chi(s)U_m(s)Z_n(t-s)f(t)\,ds\,dt = \int s_+\chi(s)U_m(s)\tilde{f}(s)\,ds,$$

où la définition de $\tilde{f}$ est la même qu'au (10), on a donc:

$$\begin{aligned}\int s_+\chi(s)U_m(s)\tilde{f}(s) &= \frac{1}{2}\int_{s>0,\,\omega\in\mathbb{S}^2}\tilde{f}(s)u_0(p,s\omega)P_m(s\omega,p)\Theta(s\omega,p)s^2\,d\omega\,ds\\ &= \int_M P_m(p,y)g(y)\,dv_g(y),\end{aligned}$$

avec

$$g(y) = \frac{u_0(p,y)}{2}\chi(\overline{yp})\,\tilde{f}(\overline{yp}).$$

Il faut maintenant faire tendre m vers l'infini, mais comme $P_m(p,y)$ tend vers $\delta(y=p)$ on trouve:

$$\int s_+\chi(s)U(s)\tilde{f}(t) = g(p) = \frac{1}{4\pi}\tilde{f}(0).$$

Comme $\tilde{f}(0) = \int Z_n(t)f(t)\,dt$, ceci achève la preuve du lemme. □

On a donc montré que $\int s_+\chi(s)U(s)Z_1(t-s)\,ds$ a ses singularités au même endroit que z_1, c'est-à-dire uniquement en $t=0$. Pour $n\geq 1$, on obtient les singularités de $\int s_+\chi(s)U(s)Z_{n+1}(t-s)\,ds$ en intégrant une fois celles de z_{n+1} (et en divisant par 4π). D'après la Proposition 2.4, pour $n\geq 1$, la distribution $\int s_+\chi(s)U(s)Z_{n+1}(t-s)\,ds$ a ses singularités aux points L qui s'écrivent $\sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$ et la contribution principale est:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)!}(-1)^{\mu_{[\gamma]_n}/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^{n+1} \qquad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,}\\ &\frac{1}{\pi(n+1)!}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^{n+1}\mathrm{Ln}|t-L_{[\gamma]_n}| \quad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair.}\end{aligned}$$

Remarque. L'ordre de la singularité est le nombre de lacets géodésiques suivis plus 1. De plus, on rappelle que la contribution que l'on vient de calculer est associée à z_{n+1}, et se retrouve donc dans S_{n+1}.

Finalement, pour revenir à S_n, on a montré que ses singularités étaient localisées aux points L qui s'écrivent soit $\sum_{i=1}^n L_{\gamma_i}$, soit $\sum_{i=1}^{n-1} L_{\gamma_i}$. Et on peut résumer cette partie dans la proposition suivante:

Proposition 2.5. *Un élément $[\gamma]_n$ apporte une contribution à la singularité en $L_{[\gamma]_n}$ dans S_n mais aussi dans S_{n+1} Cette contribution est*:

$$\text{dans } S_{n+1}\begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)!}(-1)^{\mu_{[\gamma]_n}/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^{n+1} & \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{2\pi(n+1)!}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^{n+1}\mathrm{Ln}|t-L_{[\gamma]_n}| & \\ \quad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair} & \end{cases}$$

$$\text{dans } S_n\begin{cases} \dfrac{L_{\gamma_n}}{2n!}(-1)^{\mu_{[\gamma]_n}/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})_+^{n} & \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est pair,} \\ \dfrac{L_{\gamma_n}}{2\pi n!}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2}a_{[\gamma]_n}(t-L_{[\gamma]_n})^{n}\mathrm{Ln}|t-L_{[\gamma]_n}| & \\ \quad \text{si } \mu_{[\gamma]_n} \text{ est impair} & \end{cases}$$

Singularité de la Trace Totale

Tout ce qui a été fait dans les parties précédentes va nous permettre d'établir le théorème principal concernant les singularités de $S(t)$. Concernant la localisation de ces singularités, on a montré qu'elles se trouvaient aux points L qui peuvent s'écrire $\sum_{j=1}^{n} L_{\gamma_j}$.

Remarque. Ce fait découle uniquement de considérations de *Wave-Front* et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ ne sert donc pas pour l'établir ce fait. En revanche, on ne calcule la contribution dominante que lorsque cette hypothèse est vérifiée.

On va noter:

$$\Lambda = \bigcup_{n\geq 1}\mathbb{L}_n,$$

et pour $L \in \Lambda$ on posera:

$$n(L) = \inf\{n \mid L \in \mathbb{L}_n\},$$

de sorte que L intervient la première fois comme singularité de $S_{n(L)}$. De plus, d'après la Proposition 2.5 les contributions venant des S_n, pour $n > n(L)$ sont forcément plus régulières. On va rajouter une hypothèse qui permettra de calculer la singularité de L dans $S_n(L)$:

$(\mathcal{H}_2)$: *pour $L \in \Lambda$, il y a une seule manière d'écrire $L = \sum^{n(L)} L_{\gamma_i}$ (modulo l'ordre des facteurs)*.

On pourrait utiliser l'hypothèse $(\mathcal{H}_2')$:

$(\mathcal{H}_2')$: *les* L_γ *sont indépendants sur* $\mathbb{Z}$.

Cette dernière est toutefois un peu plus forte que $(\mathcal{H}_2)$.

On a alors le théorème suivant:

Théorème 2.1.

$$\operatorname{supp.sing}(S_\beta(t)) \subset \operatorname{supp.sing}(S_\infty(t)) \cup \Lambda.$$

De plus sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ (cf. 2.2) *et* $(\mathcal{H}_2)$, *au voisinage d'un point* L *de* Λ, *la singularité principale de* $S_\beta - S_\infty$ *est*:

$$\frac{L}{2n}(-1)^{\mu_{[\gamma]_n}/2} a_{[\gamma]_n}(t-L)_+^n \qquad si\ \mu_{[\gamma]_n}\ est\ pair,$$
$$\frac{L}{2\pi n}(-1)^{(\mu_{[\gamma]_n}-1)/2} a_{[\gamma]_n}(t-L)^n \operatorname{Ln}|t-L| \qquad si\ \mu_{[\gamma]_n}\ est\ impair,$$

où on a noté $n = n(L)$ *et* $[\gamma]_n$ *le* n*-uplet tel que* $L = L_{[\gamma]_n}$.

Preuve. Il reste à sommer les contributions données dans la Proposition 2.5. Dans cette proposition, l'ordre est important. D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ il n'y a qu'une seule manière d'écrire $L = L_{[\gamma]_n}$ si on ne tient pas compte de l'ordre. Il y a donc $n!$ contributions à considérer. On remarque que, dans la Proposition 2.5, le terme qui nous intéresse dépend de γ_n. On a n choix pour le dernier lacet, et il y a $(n-1)!$ contributions une fois le dernier lacet fixé. Il suffit ensuite de faire la somme. □

Remarques.

- Comme annoncé dans la remarque p. 17, la contribution principale ne dépend pas de β. Pour voir cette dépendance, il faudrait aller aux ordres supérieurs.
- Les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2')$ sont vraies "génériquement." Lever l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ revient à décrire la singularité de $E(t,p,p)$ lorsque p est son propre conjugué. On peut le faire au prix d'une complication certaine des calculs. En revanche, lever l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ semble assez difficile: sur le tore cela correspondrait à être capable de dénombrer les polygones dont les sommets sont sur un réseau, et dont le nombre de côtés et le périmètre sont fixés.
- Concernant un potentiel Dirac le long d'une sous-variété Σ, la démarche proposée se généralisera *a priori* bien si on a une description de l'opérateur autoadjoint considéré en terme de comportement au voisinage de Σ. Dans ce cas, il faut toutefois s'attendre à ce que la fonction z_β soit remplacée par un opérateur agissant dans la

sous-variété; la propagation des singularités dépendant alors de la propagation des singularités à l'intérieur de Σ (caractérisée par cet opérateur). Il n'est pas à exclure qu'apparaissent alors dans ce problème des choses aussi compliquées que l'étude des rayons rasants pour l'équation des ondes habituelle sur une variété à bord.

3. CAS DU TORE DE DIMENSION 3

Dans ce cas, tout se calcule plus ou moins facilement, car la paramétrix d'Hadamard est exacte pour tout temps, et $\Theta = 1$. On peut calculer les noyaux des K_n explicitement et prendre la trace. Le cadre est celui d'un tore T quotient de $\mathbb{R}^3$ euclidien par un réseau Γ. On note $|ab|$ la distance. Le point diffractant sera placé en 0. L'ensemble des longueurs des géodésiques qui joignent p à p s'identifie à $\Gamma\backslash\{0\}$. La première chose à faire est de transporter le problème dans $\mathbb{R}^3$. Quelques notations simplifiant les expressions:

- $(\gamma)_n$ désignera un n-uplet $(\gamma_1 \ldots \gamma_n) \in \Gamma^n$ tel que $\forall i < n-1\ \gamma_{i+1} \neq \gamma_i$ (l'ordre est important),
- $D_{(\gamma)_n}(x,y) = |x-\gamma_n| + |y| + \sum_1^{n-1} |\gamma_{i+1}-\gamma_i|$,
- $P_{(\gamma)_n}(x,y) = |x-\gamma_n||y| \prod_1^{n-1} |\gamma_{i+1}-\gamma_i|$.

On va donc relever p en 0, et considérer que tous les points $\gamma \in \Gamma$ diffractent avec la même constante. On cherche alors dans un premier temps des opérateurs $K_{(\gamma)_n}$ qui consistent à faire n diffractions successives aux points γ_j qui doivent donc être différents.

On a alors la proposition suivante:

Proposition 3.1.

$$K_{(\gamma)_n}(t,x,y) = \frac{1}{4\pi(n-1)!} \mathbb{1}_{D_{(\gamma)_n}(x,y)<t} \exp(\beta(D_{(\gamma)_n}(x,y)-t)) \times \frac{(t-D_{(\gamma)_n}(x,y))_+^{n-1}}{P_{(\gamma)_n}(x,y)}.$$

On établit cette proposition en suivant exactement la même démarche que le cas général. L'équation de Volterra est ici une équation différentielle ordinaire puisque la paramétrix d'Hadamard est exacte.

Pour revenir au tore il faut d'une part périodiser les $K_{(\gamma)_n}$, et d'autre part faire la somme sur tous les n-uplets possibles. Il reste alors à intégrer pour trouver la trace. En utilisant la périodicité pour regrouper des termes, on se ramène à calculer les intégrales suivantes (sur $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned}
&I_{n,u}(t)\\
&\quad = c_n(u) \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{|x-u_n|+|x|+\sum^{n-1}|u_i|<t} \exp\left(\beta\left(|x-u_n| + |x| + \sum^{n-1} |u_i| - t\right)\right)\\
&\quad \times \frac{(t - |x-u_n| - |x| - \sum |u_i|)_+^{n-1}}{|x-u_n||x|} |dx|,
\end{aligned}$$

où $u \in \Gamma^n$ et les $n-1$ premiers u_j ne sont pas nuls. De plus on a $c_n(u) = [4\pi(n-1)!|u_1||u_2|\cdots|u_{n-1}|]^{-1}$. Les u_i sont formés à partir des points diffractants, et apparaissent du fait de la périodisation. Quand u_n est nul, l'intégrale se calcule directement par un passage en polaire, s'il ne l'est pas un changement de variable utilisant les ellipsoïdes de foyer 0 et u_n permet de calculer l'intégrale. Ces deux calculs différents donnent des singularités différentes (cf. 2.5).

On arrive finalement à écrire la trace sous la forme suivante:

Proposition 3.2.

$$\text{supp sing}\, S = \{0\} \cup \Lambda,$$

et plus précisément:

$$S(t) = \sum_{L\in\Lambda} \sum_{n\geq 1} \sum_{\sigma\in\sigma_n(L)} [A_n(\sigma)F_{n-1}(t-L) + B_n(\sigma)F_n(t-L)],$$

avec

$$\begin{aligned}
&\Lambda_n = \left\{L \mid L = \sum^n |\gamma_i|\right\},\\
&\Lambda = \bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n,\\
&\sigma_n(L) = \left\{\textit{nombre de manières d'écrire } L = \sum^n |\gamma_i|\right\},\\
&\sigma(L) = \bigcup_n \sigma_n(L),\\
&A_n(\sigma) = \frac{L}{2}\left(\prod_1^n |\gamma_i|\right)^{-1}, \quad \sigma \textit{ correspond à l'écriture } L = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|,
\end{aligned}$$

$$B_n(\sigma) = \frac{1}{2}\left(\prod_1^n |\gamma_i|\right)^{-1}, \qquad \sigma \textit{ correspond à l'écriture } L = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|,$$

$$F_n(x) = H(x)\int_0^x e^{-\beta z} z^n \, dz.$$

Remarques.

- Dans $\sigma_n(L)$, on a levé la dégénérescence liée à l'ordre des facteurs, mais pour décrire $\sigma(L)$, il faudrait être capable de dénombrer les polygones à sommets sur un réseau et de les regrouper en fonction de leur périmètre.
- La formule générale est compatible avec ce cas particulier car on a: $F_{n-1}(x) \sim (1/n)x_+^n$ quand $x \to 0$.

CONCLUSION

Pour arriver à cette formule de trace, on aurait sans doute pu opérer de manière différente. Comme les opérateurs considérés ont une différence à trace (de rang 1 !), on pourrait se placer dans un contexte de scattering, et chercher une formule de type *Krein–Milmann*. On aurait pu aussi partir de l'expression des noyaux de la chaleur ou de Schrödinger donnée dans.[16] Toutefois, on a trouvé que l'approche ‘‘développement en diffractions multiples’’ était assez naturelle, et permettait de bien voir l'influence du point singulier. Cette idée, consistant à chercher le propagateur d'une équation des ondes perturbée comme une série dont le premier terme est une ‘‘solution libre,’’ est relativement classique. Elle a par exemple été utilisée dans le contexte des formules de trace dans la série d'articles.[17]

Concernant les généralisations possibles, la même démarche s'étend au cas de plusieurs potentiels Dirac ponctuels sur une même variété. Le développement en diffractions multiples fera alors apparaître des opérateurs prenant en compte toutes les suites possibles de diffractions aux différents points singuliers. Les lacets géodésiques joignant les différentes singularités contribueront donc à la formule de trace. Le cas de la dimension 2 peut aussi se traiter de la même manière. Les calculs sont toutefois plus compliqués car la paramétrix d'Hadamard fait intervenir des puissances demi-entières de $(t^2 - \overline{xy}^2)_+$. Quant au potentiel Dirac le long d'une sous-variété, pour pouvoir généraliser la démarche proposée, il faudrait d'abord décrire de tels potentiels en fonction du comportement au voisinage de la sous-variété singulière. Il est possible qu'une approche moins constructive donne des résultats plus directement que le passage par une paramétrix, tel qu'on le fait ici. Cela donnerait la première partie du théorème 2.1 concernant la localisation des singularités de la trace. Il est cependant probable que le calcul de la singularité principale soit nettement plus compliqué; notamment à cause de l'existence de rayons rasants, et au fait qu'une singularité arrivant sur Σ pourrait a priori y séjourner un certain temps avant d'être réémise.

APPENDICE A: POTENTIELS DIRACS

Le but de cet appendice est double:

– rappeler brièvement la définition d'un potentiel Dirac,
– établir la formule de Weyl pour ces opérateurs.

Définition

Il y a plusieurs manières équivalentes de définir un potentiel Dirac ponctuel sur une variété. Les livres d'Albeverio et al. (cf. Refs. [7,18]) fournissent une présentation très complète de ces problèmes incluant notamment une motivation physique, et justifiant leur écriture sous la forme $\Delta + \alpha\delta$, à l'origine du nom "potentiel Dirac." On propose ici de suivre l'approche de Colin de Verdière (cf. Ref. [8]), qui étudie notamment très en détail les propriétés spectrales de ces opérateurs. Cette approche n'est pas la plus courante et on renvoie au livres mentionnés ci dessus[7,18] pour d'autres méthodes aboutissant aux mêmes opérateurs.

Considérons donc une variété riemannienne M, muni de son laplacien (que l'on note Δ_∞), Δ désignera le laplacien riemannien pris au sens des distributions, et H^s l'espace de Sobolev associé. On cherche des extensions autoadjointes de l'opérateur défini par Δ sur le domaine $\mathcal{C}^\infty(M\backslash\{p\})$. On veut utiliser la théorie de Von Neumann, et on commence donc par décrire le domaine de Δ^*, $\text{dom}(\Delta^*)$. Il est important de remarquer que, pour f dans le domaine de Δ^*, $\Delta^* f - \Delta f$ est une distribution H^{-2}, supportée en $\{p\}$.

Les théorèmes d'injection de Sobolev habituels montrent alors les propriétés suivantes.

1. En dimension supérieure ou égale à 4, $\Delta^* f$ et Δf sont égales, donc f appartient à H^2. Le laplacien défini sur $\mathcal{C}^\infty(M\backslash\{p\})$ est alors essentiellement autoadjoint.
2. En dimension 2 ou 3, il existe C tel que

$$\Delta^* f = \Delta f + C\delta_p.$$

3. En dimension 1, il existe a, b:

$$\Delta^* f = \Delta f + a\delta_p + b\delta'_p.$$

Une fois décrit le domaine de Δ^*, la recherche des extensions autoajointes se fait alors en recherchant les sous-espaces de dom(Δ^*) maximaux annulant la "formule de Green": $\langle \Delta^* u, v\rangle - \langle u, \Delta^* v\rangle$. Cette formule s'exprime uniquement en fonction du comportement au voisinage de p et on obtient le théorème suivant (on ne donne que l'énoncé concernant la dimension 3).

Théorème 3.1. *L'opérateur Δ défini sur le domaine $\mathcal{C}^\infty(M\backslash\{p\})$ admet plusieurs extensions autoadjointes. Celles-ci son paramétrées par $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et caractérisées par leur domaine. Si on note Δ_β l'extension correspondant à β, on a*:

$$\mathrm{dom}(\Delta_\beta) = \{f \in H^2(M\backslash\{p\}), \quad f \text{ vérifie } C^\beta \text{ en } p\},$$

où la condition C^β signifie qu'au voisinage de p, on a:

$$C^\beta \; \exists A \in \mathbb{R} \mid f(x) = A\left(\frac{1}{\overline{xp}} + \beta\right) + o(1),$$

$\overline{xp}$ désignant la distance riemannienne entre x et p.

Remarque. ce théorème est compatible avec le fait que Δ_∞ désigne le laplacien riemannien habituel.

Avant de passer à l'étude des propriétés spectrales de ces opérateurs, on peut noter qu'il y a d'autres approches pour définir ces potentiels Dirac:

- Dans[7], les auteurs généralisent la notion d'opérateurs s'écrivant $\Delta + \alpha\langle\phi, .\rangle\phi$. Cette écriture ne pose pas de problème si ϕ est L^2, et la difficulté est de donner un sens à cette écriture quand ϕ est un élément de H^{-1} ou de H^{-2}. Dans le cas où ϕ appartient à H^{-1}, $\Delta + \alpha\langle\phi, .\rangle\phi$ s'interprète bien en terme de formes quadratiques et peut se définir via le théorème KLMN. Dans le cas où $\phi \in H^{-2}\backslash H^{-1}$ (e.g., en dimension 2 et 3) il faut travailler un peu plus (cf. Ref. [7] pp. 32–35, et pp. 49 et suivantes).
- On peut aussi passer par une décomposition en coordonnées polaires qui ramène la recherche à une infinité de problèmes sur la demi-droite. Ceux-ci sont alors tous du type étudié dans (Ref. [19], pp. 159–161) et se ramènent à la théorie des équations différentielles à point ou cercle limite. C'est le point de vue utilisé dans[18] (et par[20] pour la singularité conique).

- Les potentiels Dirac peuvent aussi s'obtenir comme limite (dans une topologie convenable) d'opérateurs $\Delta + V_\varepsilon$, où V_ε est un potentiel (bien choisi) lisse à support dans la boule de centre p et de rayon ε (cf. Refs. [7,18]).
- La définition proposée offre l'avantage de montrer clairement une démarche possible pour définir un potentiel Dirac le long d'une sous-variété.

Propriétés Spectrales

On rappelle que dans[8] se trouve la description précise du spectre de Δ_β sur une variété compacte. Notre but est ici de montrer que les valeurs propres de Δ_β vérifient la même formule de Weyl que celles de Δ_∞.

Rappelons que Δ_β et Δ_∞ sont deux extensions autoadjointes du même opérateur. Notamment, si on note H_0^2 le complété de $\mathcal{C}^\infty(M\backslash\{p\})$ pour la norme du graphe de Δ_∞ (i.e., la norme H^2), la théorie générale des extensions autodjointes (cf. Ref. [19], pp. 138–143 par exemple) nous permet d'affirmer le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Pour tout* $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, H_0^2$ *est un sous-espace de codimension* 1 *dans dom*(Δ_β). *De plus*,

$$\forall f \in H_0^2, \quad \Delta_\beta f = \Delta_\infty f.$$

Preuve. Les indices de défaut de Δ valent ici 1. Dans ce cas, on sait alors que le domaine de la fermeture de Δ est un sous-espace de codimension 1 dans le domaine de toute extension autoadjointe. Ce qui donne le premier point. L'injection de H^2 dans $\mathcal{C}^0(M)$ montre.

$$H_0^2 = \{u \in H^2 \mid u(p) = 0\}.$$

De plus, pour un β quelconque, d'après,[8] on a la description:

$$f \in \mathrm{dom}(\Delta_\beta) \Leftrightarrow \exists u \in H_0^2, A \in \mathbb{R} \mid f = A(G_d(x) + \beta) + u,$$

où G_d est telle que $\Delta G_d - \delta_p = r \in L^2$ (d étant la dimension).

Avec l'écriture ci-dessus, on a aussi:

$$\Delta_\beta f = \Delta_\infty u + Ar.$$

Ainsi, sur H_0^2, Δ_β coïncide avec Δ_∞. Ce qui termine la preuve. □

On note maintenant $\lambda_n(\beta)$ la n-ième valeur propre de Δ_β (en les rangeant dans l'ordre croissant). Le principe du min-max (cf. Ref. [21], Sec. 4.5) permet alors de montrer le théorème.

Théorème 3.2. *Pour tous* β, β' *de* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *et* $n \geq 1$ *l'inégalité suivante est vérifiée*:

$$\lambda_n(\beta) \geq \lambda_{n-1}(\beta').$$

Preuve. Pour tout β, Δ_β est un opérateur à résolvante compacte, borné inférieurement. Son spectre est donc donné par le principe du min-max:

$$\lambda_n(\beta) = \min_F \left(\max_{f \in F} (\langle \Delta_\beta f, f \rangle) \right),$$

où le minimum est pris sur les sous-espaces F, de dimension $n+1$, inclus dans $\mathrm{dom}(\Delta_\beta)$.

Soit donc F un tel sous-espace,

$$\max_{f \in F} (\langle \Delta_\beta f, f \rangle) \geq \max_{f \in F \cap H_0^2} (\langle \Delta_\beta f, f \rangle),$$

mais, sur $F \cap H_0^2$, Δ_β et $\Delta_{\beta'}$ coïncident d'où:

$$\max_{f \in F} (\langle \Delta_\beta f, f \rangle) \geq \max_{f \in F \cap H_0^2} (\langle \Delta_{\beta'} f, f \rangle).$$

Maintenant, $F \cap H_0^2$ est un sous-espace du domaine de $\Delta_{\beta'}$, de dimension $n+1$ ou n. Le membre de droite de l'inégalité précédente est donc minoré par $\lambda_{n-1}(\beta')$ (en appliquant le min-max à $\Delta_{\beta'}$):

$$\max_{f \in F} (\langle \Delta_\beta f, f \rangle) \geq \lambda_{n-1}(\beta').$$

Le minimum sur F donne alors le résultat. □

Le corollaire de ce théorème nous dit alors que les asymptotiques de Weyl de tous les opérateurs Δ_β sont identiques.

Corollaire 3.1. *Soit* $N_\beta(T) = \#\{n \mid \lambda_n(\beta) \leq T\}$, *alors*

$$\forall \beta, \quad N_\beta(T) \underset{T \to \infty}{\sim} N_\infty(T).$$

Preuve. On fixe T, et on note $N = N_\infty(T)$ alors:

$$\lambda_N(\infty) \leq T < \lambda_{N+1}(\infty) \leq \lambda_{N+2}(\beta),$$

donc

$$N_\beta(T) \leq N_\infty(T) + 1.$$

En échangeant les rôles de β et ∞, on montre:

$$N_\infty(T) - 1 \leq N_\beta(T) \leq N_\infty(T) + 1.$$

Comme $N_\infty(T)$ tend vers l'infini, l'équivalence est prouvée. □

Remarques.

- Ce résultat est compatible avec le cas générique signalé dans,[8] pour lequel les valeurs propres sont entrelacées.
- Le Théorème 3.2 s'applique dès qu'on a un couple d'opérateurs autoadjoints A, A_0 qui coïncident sur un sous-espace de codimension finie dans (A) et $\mathrm{dom}(A_0)$ (pour la partie du spectre donnée par le min-max).

APPENDICE B: PROLONGEMENT À L^2

On fait dans cette partie des estimations de norme. Comme souvent, différentes manipulations ne sont autorisées que pour des fonctions $\mathcal{C}_0^\infty$, mais l'estimation finale permet de prolonger à l'espace choisi.

La première estimation concerne la valeur d'une solution de l'équation des ondes en un point de la variété. On va travailler avec l'exponentielle plutôt que le sinus pour pouvoir utiliser la propriété de groupe.

Lemme 3.2.

$$\forall v_0 \in L^2(M), \quad \left[\exp\left(it\sqrt{\Delta}\right)v_0\right](p) \text{ } est \text{ } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$$

Preuve. grâce à la propriété de groupe de l'exponentielle, il suffit de le montrer sur un intervalle I fixé. On sait de plus (cf. Ref. [1], pp. 247–248, ou Ref. [11], pp. 251–252) que $\exp(it\sqrt{\Delta})$ est un O.I.F. associé à la variété Λ^+ (cf. 2.2). On va choisir I un intervalle en temps sur lequel on peut prendre la fonction phase:

$$[t - \overline{xy}]\theta,$$

on peut donc écrire la partie principale:

$$\exp(it\sqrt{\Delta})[x, y] = f(t - \overline{xy}) \int \exp(i[t - \overline{xy}]\theta) a(x, y) g(\theta)\theta \, d\theta,$$

où f est un fonction de troncature qui vaut 1 au voisinage de 0 et g une fonction qui vaut 0 au jusqu'à $\theta = 1$ et 1 au voisinage de $+\infty$.

Pour v_0 on veut donc étudier (sur I):

$$A(t) = \int f(t - \overline{py}) \exp(i[t - \overline{py}]\theta) a(p, y) g(\theta)\theta v_0(y)\, d\theta\, dy.$$

On passe en coordonnées polaires autour de p et on pose

$$w_0(r) = \int_{\mathbb{S}^2} a(p, r) v_0(r\omega) r^2 d\omega,$$

de sorte que:

$$A(t) = \int \exp(i[t - r]\theta) f(t - r) g(\theta)\theta w_0(r)\, d\theta\, dr.$$

Pour avoir $A(t)$ sur I il suffit d'avoir $w_0(r)$ sur $\tilde{I}$, et on peut choisir I et f de sorte que $\tilde{I}$ ne s'approche ni de 0 ni du rayon d'injectivité en p. La formule donnant $A(t)$ en fonction de w_0 est un opérateur pseudo différentiel d'ordre'-1 qui envoie donc $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_r)$ dans $H^{-1}(\mathbb{R}_t)$. Notamment il envoie $L^2(\tilde{I})$ dans $H^{-1}(I)$. Comme $\tilde{I}$ ne s'approche pas de 0 on a:

$$\forall v_0, \quad \|w_{0|\tilde{I}}\|_2 \leq M\|v_0\|_2.$$

Cette estimation achève la démonstration du lemme.

Ce qui nous intéresse vraiment est:

$$a(t) = H(t)\left[\frac{\sin(\sqrt{\Delta}t)}{\sqrt{\Delta}} v_0\right](p).$$

Par rapport à l'estimation du lemme précédent, il faut donc prendre la partie réelle et intégrer par rapport à t. On a donc:

$$\forall v_0, \quad a \in L^2_{\mathrm{loc},+}(\mathbb{R}_t). \qquad \square$$

Remarque. L'indice $+$ indique que pour toute fonction dans l'ensemble considéré, il existe un t_0 tel que la fonction est nulle sur $]-\infty, t_0[$.

On doit maintenant examiner ce qui se passe quand on convole avec z_n. Comme on fait agir un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-n$, on a immédiatement le lemme:

Lemme 3.3.

$$\forall n \geq 1\, \forall a \in L^2_{\mathrm{loc},+} \quad z_n * a \in H^1_{\mathrm{loc},+}.$$

Il reste à examiner la régularité de $v(t, x) = \int E(s, x, p) a(t - s)\, ds$ *lorsque* a *est dans* $H^1_{\mathrm{loc},+}$.

Proposition 3.3.

$$\forall a \in H^1_{\mathrm{loc},+}, \quad t \to \int E(s,x,p)a(t-s)\,ds,$$

est continue à valeurs dans $L^2(M)$, *et*

$$\sup_{t\in K}\left\| \int E(s,x,p)a(t-s)\,ds\right\|_2 \le M_K \|a\|_{H^1}.$$

Preuve. Le principe est de faire une intégration par parties. On va la faire sur le développement en fonctions propres.

$$v(t) = \sum \int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda_n} s)a(t-s)\,ds \frac{\phi_n(p)}{\sqrt{\lambda_n}}\phi_n(x).$$

L'intégration par parties donne:

$$\int_0^\infty \sin(\sqrt{\lambda_n} s)a(t-s)\,ds = \frac{a(t)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda_n} s)a'(t-s)\,ds.$$

On peut donc écrire (modulo la partie suivant ϕ_0, i.e., la constante)

$$v(t) = \sum_{n\ge 1}[a(t) - v_n(t)]\frac{\phi_n(p)}{\lambda_n}\phi_n(x),$$

avec

$$v_n(t) = \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda_n} s)a'(t-s)\,ds.$$

Comme $((\phi n(p))/\lambda_n)_n$ est ℓ^2 (car $\delta(x-p)$ est H^{-2}) il faut montrer que $v_n(t)$ est continue en t borné par rapport à n.

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda_n} s)a'(t-s)\,ds \\ &= \int_{-\infty}^t \cos(\sqrt{\lambda_n}(t-s))a'(s)\,ds \\ &= \cos(\sqrt{\lambda_n} t)\int_{-\infty}^t \cos(\sqrt{\lambda_n} s)a'(s)\,ds \\ &\quad - \sin(\sqrt{\lambda_n} t)\int_{-\infty}^t \sin(\sqrt{\lambda_n} s)a'(s)\,ds. \end{aligned}$$

La dernière expression rend claire les propriétés que l'on cherchait. Toutes ces estimations permettent de prolonger K_n à $L^2(M)$. □

Remarque. En examinant le cas du tore, on voit qu'on ne peut pas obtenir plus de régularité en x (il y a $1/|x|$ en facteur, cf. Proposition 3.1). Pour la régularité en t, il faut examiner non seulement la régularité des v_n (ces fonctions sont H^1) mais aussi la croissance par rapport à n; si on dérive v_n, on fait sortir un $\sqrt{\lambda_n}$ en facteur qui empêche de conclure sur le caractère L^2 en x.

APPENDICE C: K_n EST À TRACE

Le but de cette partie est de montrer que les noyaux K_n représentent des opérateurs à trace au sens des distributions. C'est-à-dire que pour toute fonction test ψ de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'opérateur défini par

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(t)\psi(t)\, dt$$

est dans $\mathcal{I}_1$ (ensemble des opérateurs à trace). On part de l'expression:

$$K_n(t,x,y) = \int_{s_1,\, s_2 \geq 0} E(s_1,x,p) z_n(t - s_1 - s_2) E(s_2,p,y)\, ds_1\, ds_2.$$

Les difficultés proviennent de deux types de singularités: la première, habituelle dans le contexte des formules de trace, vient des singularités de E, et se traite classiquement par des considérations de *Wave-Front*, cf. Refs. [1,3]. La deuxième vient des bords de l'intégrale et on va la traiter en utilisant la paramétrix d'Hadamard.

Soit $\psi(t)$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on cherche à estimer:

$$\int K_n(t)\psi(t)\, dt = \int_{s_1,\, s_2 \geq 0} E(s_1,x,p)\check{z}_n * \psi(s_1+s_2) E(s_2,p,y)\, ds_1\, ds_2.$$

On appelle $\Psi = \check{z}_n * \psi$. On utilise la paramétrix d'Hadamard qui nous dit que:

$$\begin{aligned}&\chi(t)E(t,x,p)\\ &\quad = \Big[u_0(x,p)\delta\big(t^2 - \bar{x}p^2\big) + \sum u_i(x,p)\big(t^2 - \bar{x}p^2\big)_+^2 + R_n(t,x)\Big]\chi(t),\end{aligned}$$

et on a la même expression pour $\chi(t)E(t,p,y)$. L'intégrale se découpe en termes de 16 différentes sortes qu'on examine séparément:

$$\begin{aligned}CC_{00}(x,y) &= \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)\Psi(s_1+s_2)\\ &\qquad \times \delta\big(s_2^2 - \overline{xp}^2\big)u_0(p,y)\chi(s_2)\, ds_1\, ds_2,\\ CC0i(x,y) &= \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)\\ &\qquad \times \Psi(s_1+s_2)\big(s_2^2 - \overline{xp}^2\big)_+^i u_i(p,y)\chi(s_1)\, ds_1\, ds_2,\end{aligned}$$

$$CC_{i0}(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1, s_2, \quad (x,p),(p,y),$$

$$CC_{0r}(x,y) = \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)\Psi(s_1+s_2)R(s_2,p,y)\chi(s_2)\,ds_1\,ds_2,$$

$$RR_{r0}(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1, s_2, \quad (x,p),(p,y),$$

$$CC_{ir}(x,y) = \int \chi(s_1)u_i(x,p)\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)_+^i\Psi(s_1+s_2)R(s_2,p,y)\chi(s_2)\,ds_1\,ds_2,$$

$$CC_{ri}(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1, s_2, \quad (x,p),(p,y),$$

$$CC_{ij}(x,y) = \int \chi(s_1)u_i(x,p)\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)_+^i \times \Psi(s_1+s_2)(s_2^2 - \overline{xp}^2)_+^j u_j(p,y)\chi(s_2)\,ds_1\,ds_2,$$

$$RR_{rr}(x,y) = \int \rho(s_1)R(s_1,x,p)\Psi(s_1+s_2)R(s_2,p,y)\rho(s_1)\,ds_1\,ds_2,$$

$$CR_0(x,y) = \int \chi(s_1)u_0(x,p)\delta\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)\,ds_1\,ds_2,$$

$$RC_0(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1, s_2, (x,p),(p,y),$$

$$CR_i(x,y) = \int \chi(s_1)u_i(x,p)\big(s_1^2 - \overline{xp}^2\big)_+^i\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)\,ds_1\,ds_2,$$

$$RC_i(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1, s_2, \quad (x,p),(p,y),$$

$$CR_r(x,y) = \int \chi(s_1)R(s_1,x,p)\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)\,ds_1\,ds_2,$$

$$RC_r(x,y) = \text{ id en échangeant } s_1, s_2, \quad (x,p),(p,y),$$

$$RR(x,y) = \int \rho(s_1)E(s_1,x,p)\Psi(s_1+s_2)\rho(s_2)E(s_2,p,y)\,ds_1\,ds_2.$$

On peut calculer tous ces termes de manière à mettre en évidence le fait qu'ils représentent des opérateurs à trace. On rappelle que pour N suffisamment grand, un noyau $\mathcal{C}^N$ est à trace.

$$CC_{00}(x,y) = u_0(x,p)\frac{\Psi(\overline{xp}+\overline{yp})}{\overline{xp}.\overline{yp}}u_0(p,y)\chi(\overline{xp})\chi(\overline{yp}),$$

avec $\Psi(s) \in \mathcal{C}^\infty$. On va montrer qu'un tel noyau est à trace: en effet, on peut écrire:

$$\Psi(r_1+r_2) = \sum r_1^i a_i(r_2) + r_1^N e_N(r_1,r_2),$$

avec les a_i, et $e_N\mathcal{C}^\infty$, on fait le même développement pour e_N, mais par rapport à r_2 et on trouve que $\Psi(r_1+r_2)$ s'écrit:

$$\Psi(r_1+r_2) = \sum r_1^i a_i(r_2) + r_2^i b_i(r_1) + r_1^N r_2^N e_1(r_1, r_2).$$

Mais alors si on remplace r_1 par $\overline{xp}$ et r_2 par $\overline{yp}$, on est de la forme "rang fini $+\mathcal{C}^n$," donc à trace.

$$CC_{0i}(x,y) = \chi(\overline{xp})\frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}\int_{\overline{yp}} \Psi(\overline{xp}+s_2)(s_2+\overline{yp})^i u_0(p,y)\chi(s_2)\,ds_2,$$

qui après réduction se met sous la forme:

$$CC_{0i}(x,y) = \chi(\overline{xp})\frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}\sum^{2i} \overline{yp}^j G_j(\overline{xp},\overline{yp}),$$

avec (à un coefficient près)

$$G_j(r_1,r_2) = \int_{r_2} \Psi(s+r_1)s^{2(i-j)}\,ds \in \mathcal{C}^\infty.$$

On décompose chaque G_j comme ci-dessus, et on conclut de même. Les termes RR_{i0} se traitent de même par symétrie.

$$CC_{0r} = \chi(\overline{xp})\frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}\int \Psi(\overline{xp}+s_2)\chi(s_2)R(s_2,y)\,ds_2 = \frac{u_0(x,p)}{\overline{xp}}G_{0r}(\overline{xp},y).$$

$G_0r(r_1,y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la première variable, et $\mathcal{C}^n$ par rapport à la deuxième (par convergence dominée). On décompose suivant la première jusqu'à ce que le reste soit C^n de x, y quand on fait $r_1 = \overline{xp}$, ce qui montre le caractère "à trace." Le terme symétrique RR_{r0} se traite de la même façon.

Les termes CC_{ij}, CC_{rr}, CC_{ri}, et CC_{ir} ne présentent pas de difficultés nouvelles, et se traitent donc en utilisant les mêmes méthodes.

Pour les termes où la troncature en χ intervient, il nous faut de plus un argument de *Wave Front* pour affirmer que:

$$\int \Psi(s_1+s_2)\rho(s_1)E(s_1,p,y)\,ds_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times M),$$

ce qui, combiné avec les techniques précédentes, permet de traiter les cas RC_0, RC_i, et RC_r de même que les symétriques CR_0, CR_i, CR_r.

Le dernier terme RR est directement $\mathcal{C}^\infty$ car son *Wave-Front* est vide. Tout ceci nous permet d'affirmer la proposition suivante:

Proposition 3.4. *Pour tout n, l'opérateur représenté par $K_n(t,x,y)$ est à trace au sens des distributions.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Yves Colin de Verdière qui m'a incité à travailler sur ce problème. Il a toujours été disponible pour discuter de ce travail (entre autres).

RÉFÉRENCES

1. Duistermaat, J.J.; Guillermin, V.W. The Spectrum of Positive Elliptic Operators and Periodic Bicharacteristics. Invent. Math. **1975**, *29*, 39–79.
2. Colin de Verdière, Y. Spectre du Laplacien et Longueurs des Géodésiques Périodiques I et II. Comp. math. **1973**, *27*, 83–109, 159–184.
3. Chazarain, J. Formule de Poisson Pour Les Variétés Riemanniennes. Invent. Math. **1974**, *24*, 65–82.
4. Berger, M.; Gauduchon, P.; Mazet, E. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. *Number 194 in Lect. Notes in Math.*; Springer-Verlag: 1971.
5. Guillemin, V.; Melrose, R. The Poisson Summation Formula for Manifolds with Boundary. Adv. Math. **1979**, *32*, 204–232.
6. Brummelhuis, R.; Uribe, A. A Semi-Classical Trace Formula for Schrödinger Operators. Comm. Math. Phys. **1991**, *136*(3), 567–584.
7. Albeverio, S.; Kurasov, P. *Singular Perturbations of Differential Operators*. Cambridge University Press, 2000.
8. Colin de Verdière, Y. Pseudo-Laplaciens I. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **1982**, *32*, 275–286.
9. Hillairet, L. Propagation Des Ondes Sur un Cône. *Mémoire de DEA*, Grenoble, 1996.
10. Duistermaat, J.J. *Fourier Integral Operators*. Prog. in Math. Birkhäuser, 1996.
11. Bérard, P. On the Wave Equation on a Compact Riernannian Manifold Whithout Conjugate Points. Math. Zeit. **1977**, *155*, 249–276.
12. Chazarain, J.; Piriou, A. *Introduction à la Théorie des Équations aux Dérivées Partielles Linéaires*; Gauthier-Villars, 1981.
13. Ram, P. Kanwal. *Linear Integral Equations*, 2nd Ed.; Birkhäuser, 1997.
14. Colin de Verdière, Y. Paramétrix de l'Équation des Ondes et Intégrales sur l'Espace des Chemins. *Sémin. Goulaouic-Lions-Schwartz* 1974–1975; Equat. Deriv. Part. Lin. Non-Lin. Expose XX, 1975.
15. Gelfand, I.; Shilov, G. *Generalized functions I*; Academic Press: New York, 1964.

16. Albeverio, S.; Brzezniak, Z.; Dabrowski, L. Fundamental Solution of the Heat and Schrödinger Equations with Point Interaction. J. Funct. Anal. **1995**, *130*, 220–254.
17. Balian, R.; Bloch, C. Distribution of Eigenfrequencies for the Wave Equation in a Finite Domain. I.: Three-Dimensional Problem with Smooth Boundary Surface. Ann. Phys. **1970**, *60*, 401–447.
18. Albeverio, S.; Gesteszy, F.; Hoegh-Krohn, R. *Solvable Models in Quantum Mechanics*. Springer, 1990.
19. Reed, M.; Simon, B. Functional Analysis II: *Fourier Analysis and Self-adjoint Operators*. Wiley Interscience, 1990.
20. Cheeger, J.; Taylor, M. On the Diffraction of Waves by Conical Singularities. I, II. Comm. Pure Appl. Math. **1982**, *35*(3,4), 275–331, 487–529.
21. Davies, E.B. *Spectral Theory and Differential Operators*; Cambridge University Press, 1995.

Received October 2000
Revised June 2002