Contrôle continu
mercredi 6 mars 2013 - 2h

- *Aucune documentation autorisée, ni aucun appareil électronique*
- *La qualité de la rédaction et de l'argumentation sera prise en compte*

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ F(0,0) &= 0 \end{aligned}$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$, différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que F admet des dérivées partielles $\partial_x F$ et $\partial_y F$ en (0,0) et les calculer.
3. F est-elle différentiable en (0,0) ?

Exercice 2. Soit F une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien et de sa norme associée. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \langle dF_x(h), h\rangle \geq \|h\|^2.$$

1. Montrer que, pour tout x, dF_x est une application linéaire inversible.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On définit la fonction f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

   $$f(t) := \langle F(x+th) - F(x), h\rangle.$$

   Justifier que f est dérivable sur $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

   $$\langle F(y) - F(x), y - x\rangle \geq \|y-x\|^2.$$

4. Montrer que F est injective.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$ on définit la distance ρ par

$$\rho(x,y,z) := \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ on définit la fonction Δf sur Ω par

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

On notera O l'origine de $\mathbb{R}^3$ (de sorte que $O = (0,0,0)$ et on munira $\mathbb{R}^3$ de la norme euclidienne usuelle (de sorte que $\rho(\cdot) = \|\cdot\|$).

1. Justifier que ρ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.
2. Montrer que ρ n'est pas différentiable en O
   Indication : on pourra supposer que ρ est différentiable en O et étudier la fonction $t \mapsto \rho(t,0,0)$.
3. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et telle que $F(0) = 0 = F'(0)$. Montrer que $\lim_{r\to 0} \frac{F(r)}{r} = 0$. En déduire que $f := F \circ \rho$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et que sa différentielle en O est l'application linéaire nulle.
4. On pose $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ et on suppose maintenant que F est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On définit f comme précédemment. Dans Ω, exprimer Δf en fonction de F' et F''.
5. En déduire que si $\Delta f = 0$ dans Ω alors F est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.
6. En déduire les valeurs de α pour lesquelles la fonction g_α définie en dehors de 0 par $g_\alpha(x,y,z) := [\rho(x,y,z)]^\alpha$ est solution de $\Delta g_\alpha = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$.