Contrôle continu
mercredi 12 mars 2014 - 2h

- *Aucune documentation autorisée, ni aucun appareil électronique*
- *La qualité de la rédaction et de l'argumentation sera prise en compte*

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \frac{x(y^3+z^3)}{x^2+y^2+z^4}, \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ F(0,0,0) &= 0 \end{aligned}$$

1. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à t associe $\phi(t) = (t^2, 0, t)$. Calculer $g(t) = F \circ \phi(t)$. La fonction g est-elle différentiable en 0 ?
2. Montrer que F admet des dérivées partielles $\partial_x F$, $\partial_y F$, et $\partial_z F$ en $(0,0,0)$ et les calculer.
3. Montrer que F n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.
4. Montrer que l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = F(x,y,0)$ est différentiable en 0.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$ et à valeurs réelles que l'on norme avec la norme de la convergence uniforme. C'est à dire

$$\forall u \in E, \quad \|u\| = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$$

1. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|e^h - 1 - h\right| \leq |h|^2 e^{|h|}.$$

2. On définit F de E dans E par

$$\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & F(u) = ue^u. \end{array}$$

   Soit $u_0 \in E$, montrer que F est différentiable en u_0 en écrivant un développement limité à l'ordre 1.

SUITE AU VERSO

3. Montrer que l'application G définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$G(u) = \int_0^1 u(x)e^{u(x)}\,dx$$

est différentiable en tout point u_0 et calculer sa différentielle.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On définit l'application f de E dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \langle x, x \rangle$.

1. Donner un exemple où E est de dimension 3. Qu'appelle-t-on des vecteurs orthogonaux ? Donner la définition de la norme associée au produit scalaire. On la notera $\| \cdot \|$.
2. Soit $x_0 \in E$. Montrer que f est différentiable en x_0 et calculer sa différentielle.
3. Soit γ une application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $t \mapsto \gamma(t)$. On suppose que γ est dérivable et qu'il existe M tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(\gamma(t)) = M.$$

   Montrer que pour tout t, $\gamma(t)$ et $\dot\gamma(t)$ sont orthogonaux.
4. Soit ψ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans E. Montrer que si, pour tout t, $\psi(t)$ et $\dot\psi(t)$ sont orthogonaux alors $\|\psi(t)\|$ ne dépend pas de t.

- FIN DE L'ÉNONCÉ -