Examen
lundi 29 avril 2013 - 2h

- *Aucune documentation autorisée, ni aucun appareil électronique*
- *La qualité de la rédaction et de l'argumentation sera prise en compte*

Exercice 1. Soit F une fonction définie de $(0,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$. On suppose dans tout l'exercice que F est au moins de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Déterminer le plus grand ouvert possible $U \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}F(x^2-y^2)$ définit une fonction $\mathcal{C}^2$. On représentera graphiquement l'ensemble U dans le plan des (x,y).

   Dans la suite, on notera f la fonction définie sur U par l'expression précédente $(f(x,y) = \frac{1}{2}F(x^2-y^2))$.
2. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ puis la hessienne de f en fonction des dérivées de F.
3. On suppose que

$$\forall \rho > 0, \quad F'(\rho) \leq 0 \text{ et } F'(\rho) + 2\rho F''(\rho) > 0.$$

   Montrer que, pour tout $(x,y) \in U$, la hessienne de f en (x,y) est définie positive.

Exercice 2. Sur $V :=]0,\infty[\times\mathbb{R}$ on définit la fonction G par

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - xy + \frac{1}{x^2}.$$

1. Montrer que pour tout (x,y) dans V, on a

$$G(x,y) \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{x^2}.$$

2. Pour tout $M > 1$, on considère le rectangle $R_M := [\frac{1}{M}, M] \times [-M, M] \subset V$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in V,\ (x,y) \notin R_M \Rightarrow G(x,y) \geq \frac{M^2}{2}.$$

- SUITE AU VERSO -

En déduire que G admet au moins un minimum sur V.

3. Déterminer les points critiques de G. En déduire que F admet un unique minimum (x_0, y_0) sur V.
4. Calculer $G(x_0, y_0)$ et la hessienne de G en (x_0, y_0). Vérifier que cette dernière est bien définie positive.
5. Soit T un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b, et c, et S son aire. Montrer que l'on a $S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$ avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.
   Indication : on pourra d'abord considérer les triangles dont les sommets sont $(0,0)$, $(x,0)$ et $(y, \frac{1}{x})$ et conclure par homogénéïté.

Exercice 3. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $H(t,x) = tx^3 - x^2 + 1$.

1. Justifier que H est $\mathcal{C}^\infty$ et que, lorsque $t = 0$, la fonction $x \mapsto H(0,x)$ s'annule deux fois sur $\mathbb{R}$. Dans la suite on notera $a < b$ ces deux racines.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux fonctions $\mathcal{C}^1$, x_1 et x_2 définies sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et telles que :

$$x_1(0) = a, \text{ et } \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ H(t, x_1(t)) = 0,$$
$$x_2(0) = b, \text{ et } \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ H(t, x_2(t)) = 0.$$

   On pourra utiliser dans la suite que ces fonctions sont en fait $\mathcal{C}^\infty$.
3. Sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, quelle formule donne les dérivées $x_1'(t)$ et $x_2'(t)$? En déduire un développement limité à l'ordre 1 de x_1 et x_2 en 0.
4. Soit $P(X) := \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$ un polynôme à coefficients complexes ($\alpha \neq 0$) et z_1, z_2, z_3 ses trois racines. Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{\beta}{\alpha}$. En déduire que si P est à coefficients réels et que deux de ses racines sont réelles alors la troisième l'est aussi.
5. Montrer que lorsque t tend vers 0 le polynôme $P_t(X) := tX^3 - X^2 + 1$ a une racine réelle $x_3(t)$ qui tend vers $+\infty$ et qui admet le développement asymptotique suivant :

$$x_3(t) = \frac{1}{t} - t + O(t^2).$$

- FIN DE L'ÉNONCÉ -