Université d'Orléans
Département de Mathématiques

Année 2013-2014
L3

Calcul Différentiel et Optimisation
Examen, 14 mai 2014 - 2h

- *Aucune documentation autorisée, ni aucun appareil électronique*
- *La qualité de la rédaction et de l'argumentation sera prise en compte*

Exercice 1.

1. Déterminer le plus grand ouvert possible $U \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression
$$(x,y) \mapsto \frac{x}{1-xy}$$
définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$, et représenter graphiquement U.
Dans la suite on notera φ cette fonction.
2. Calculer la différentielle de φ en $(0,0)$.

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = xe^x$, et G la fonction de U dans $\mathbb{R}$ définie par $G(x,y) = y - g \circ \varphi(x,y)$.

3. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$. En déduire les dérivées partielles de G en $(0,0)$.
4. Montrer qu'il existe deux ouverts $V \subset \mathbb{R}$ et $W \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et une application ψ de V dans W qui est $\mathcal{C}^\infty$ et telle que
$$\forall (x,y) \in V \times W,\ [G(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x)]\,.$$
5. Calculer $\psi(0)$ et $\psi'(0)$.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et γ une application $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$ (on notera $\gamma(t) = (x(t), y(t))$). Soit H une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On notera h la fonction $H \circ \gamma$.

1. Montrer que si
$$\forall t \in I,\ \dot{x}(t)\frac{\partial H}{\partial x}(\gamma(t)) + \dot{y}(t)\frac{\partial H}{\partial y}(\gamma(t)) \leq 0,$$
alors la fonction h est décroissante sur I.
2. On suppose que γ est définie sur $I :=]-\varepsilon, \varepsilon[$, est telle que $\gamma(0) = (1,0)$, et que, pour tout $t \in I$, on a
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= x(t)y(t)^2 - x(t)^3 \\ \dot{y}(t) &= -x(t)^2y(t) \end{cases}$$
Montrer que, pour tout $t \in [0, \varepsilon[$, $\gamma(t)$ est dans le disque (fermé) centré en $(0,0)$ et de rayon 1.

- suite au verso -

Exercice 3. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ l'ouvert défini par $U := \{(x, y, z) \mid x + y + z > 0\}$ et F la fonction définie sur U par

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6\ln(x + y + z).$$

1. Justifier que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur U et calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, et $\frac{\partial F}{\partial z}$.
2. Montrer que F a un unique point critique que l'on calculera.
3. Soit J la matrice définie par

$$\mathrm{J} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calculer les valeurs propres de J.
4. On note I la matrice identité. En un point (x, y, z) de U, montrer que la hessienne $H(x, y, z)$ de F peut s'écrire

$$H(x, y, z) = a(x, y, z)\mathrm{I} + b(x, y, z)\mathrm{J},$$

   où a et b sont deux fonctions définies de U dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera. En déduire que la hessienne en (x, y, z) est définie positive.
5. En déduire la nature du point critique.
6. Montrer que pour tout (x, y, z) de U on a $F(x, y, z) \geq 3 - 6\ln 3$.

- FIN DE L'ÉNONCÉ -