Université d'Orléans — Année 2014-2015
Département de Mathématiques — L3

Calcul Différentiel et Optimisation
Examen, 11 mai 2015 - 2h

- *Aucune documentation autorisée, ni aucun appareil électronique*
- *La qualité de la rédaction et de l'argumentation sera prise en compte*

Exercice 1. On considère l'équation (E) : $\partial_t u - 2tx\partial_x u = 0$. On dit qu'une fonction u définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une solution de (E) si elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et si, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \,-\, 2tx \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \,=\, 0.$$

Montrer que si u est une solution de (E) alors la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = u(t, e^{-t^2})$ est constante.

Exercice 2. Dans tout l'exercice E désigne l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

1. Montrer soigneusement que, pour tout $u_0 \in E$, l'application F de E dans E définie par $F(u) = u^2$ est différentiable en u_0 et exprimer sa différentielle.
2. Donner une forme linéaire non-nulle continue sur E.
3. Soit Λ une forme linéaire continue sur E on définit g de E dans $\mathbb{R}$ par $g(u) = \Lambda(u^2)$. Justifier que pour tout $u_0 \in E$ la fonction g est différentiable en u_0 et exprimer $dg_{|u_0}(h)$ pour $h \in E$.

Exercice 3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) \,=\, (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}.$$

1. Calculer $f(0,0)$. En déduire que $(0,0)$ est un minimum global de f.
2. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, pour tout (x,y) les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. Montrer que f a exactement 5 points critiques et les déterminer.
4. Parmi ces 5 points critiques, on note A le seul dont l'abscisse est strictement positive. Calculer la hessienne de f en A. Qu'en déduit-on sur le nature de l'extremum en A ?
5. On note B l'unique point critique d'ordonnée strictement positive. Montrer que B est un maximum local.
6. Montrer que B est en fait un maximum global.

- SUITE AU VERSO -

Exercice 4. Etant donnés deux points $A = (a, b)$ et $M = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, on rappelle que la distance euclidienne entre A et M est définie par

$$d(A, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

On écrira indifféremment $d(A, M) = d((a, b), M) = d(A, (x, y)) = d((a, b), (x, y))$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}^2$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ par $f(x, y) = d(A, (x, y))$ est $\mathcal{C}^\infty$. Calculer ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Soit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe $\mathcal{C}^\infty$ tracée dans $\mathbb{R}^2$ telle $M(0) = (0, 0)$, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|x(t)| < 1$. On notera $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ le vecteur dérivé .
   On définit la fonction L de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par
   $$L(a, b, t) \;=\; d((-1, a), M(t)) + d(M(t), (1, b)).$$
   Justifier que L est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ et exprimer $\frac{\partial L}{\partial t}(a, b, t)$ en fonction des données du problème.
3. On s'intéresse à l'équation
   $$\frac{\partial L}{\partial t}(a, b, t) \;=\; 0.$$
   Montrer que $(0, 0, 0)$ est une solution de cette équation.
4. A quelle condition sur $(\dot{x}(0), \dot{y}(0))$ peut-on appliquer en $(0, 0, 0)$ le théorème des fonctions implicites à l'équation précédente ?

   Application : dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $x(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ et $y(t) = t$.
5. Ecrire explicitement dans ce cas $L(a, b, t)$ et la matrice jacobienne de L en $(0, 0, 0)$.
6. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et une application ϕ $\mathcal{C}^\infty$ définie de $]-\epsilon, \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
   $$\forall (a, b) \in]-\epsilon, \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[,\; \frac{\partial L}{\partial t}(a, b, \phi(a, b)) \;=\; 0.$$
7. Calculer $\dfrac{\partial \phi}{\partial a}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial \phi}{\partial b}(0, 0)$.

- FIN DE L'ÉNONCÉ -