Examen.

6 mai 2019 - 2h

Exercice 1. Soit $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ et F la fonction définie sur Ω par

$$F(x,y,z) = xyz + x\ln x + y\ln y - z.$$

1. Justifier que F est C^∞ sur Ω et calculer ses dérivées partielles.
2. Soit m le point de coordonnées $(1,1,-1)$. Montrer que m est un point critique de F et calculer la matrice hessienne de F en m.
3. Soit q la forme quadratique associée à la hessienne de F en m. Calculer $q(1,0,0)$ et $q(0,1,-1)$.
4. Montrer que q est non-dégénérée.
5. Déterminer la nature du point critique m.
6. Soit ψ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

   $$\psi(x) = \ln x - \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

   Montrer que ψ s'annule seulement en $x=1$. En déduire que m est le seul point critique de F sur Ω.

Exercice 2. Soit $U = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix}, u^2+v^2 < 1, t > 0 \right\}$ et $a > 0$. On définit φ de U dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \dfrac{t+a}{1+at}\sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que φ est C^∞ et calculer sa matrice jacobienne en tout point de U.
2. Montrer que les hypothèses du théorème d'inversion locale sont satisfaites en tout point de U sauf pour une valeur de a que l'on précisera.

   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que a est différent de cette valeur.
3. Etudier, sur $]0,+\infty[$ la fonction f définie par $f(t) = \frac{t+a}{1+at}$. En déduire que, pour $a \neq 1$, φ est injective sur U.

- Suite au verso -

4. On note $\Omega = \varphi(U)$. Déterminer deux fonctions g_+ et g_- définies sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<1\}$ telles que

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ x^2+y^2<1,\ g_-(x,y) \ < \ z \ < g_+(x,y) \right\}.$$

5. Calculer (en fonction de a) le volume de Ω (c'est à dire $\displaystyle\int_\Omega 1\, dxdydz$).

Exercice 3. *Pour des raisons de place, les vecteurs seront exprimés soit en ligne soit en colonne.* Soit G l'application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$G\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-y^2-e^z\cos t \\ 2xy - e^z \sin t \end{pmatrix},\ \text{en notant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}.$$

On pourra utiliser sans justification que G est C^∞.

1. Calculer en tout point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de G.
2. Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, la jacobienne partielle de G par rapport à Y est inversible.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ tels que $A \in U$ et $B \in V$ et une application C^∞, H de U sur V vérifiant

$$\forall X \in U,\ G\begin{pmatrix} X \\ H(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. On note $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$. Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial x}(0,1)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(0,1)$.
5. Montrer que pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \\ -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Indication : on pourra montrer que les deux côtés de l'égalité précédente sont solutions du même système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.

6. Montrer que pour tout $(x,y) \in U$, on a (dans $\mathbb{C}$)

$$e^{P(x,y)+iQ(x,y)} = (x+iy)^2.$$

- FIN DE L'ÉNONCÉ -