Université d'Orléans
Département de Mathématiques

Calcul Différentiel L3
2018-2019

Feuille 1

1. Continuité

Exercice 1. Démontrer la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2$.

On se limitera dans cet exercice à la définition suivante de la continuité : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Exercice 2. Même question pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y, y^2 - x).$$

On n'utilisera ici que la définition suivante de la continuité : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si, pour une norme $\| \cdot \|$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x - x_0, y - y_0)\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \leq \epsilon.$$

(Bien préciser le choix de la norme employée).

Exercice 3. Déterminer la continuité en 0 de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante : $x \mapsto (s(x), c(x))$, avec

$$s(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } c(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \ . \end{cases}$$

Exercice 4. Déterminer la continuité au point $(0, 0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes.

(1)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \ . \end{cases}$$

(2)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \ . \end{cases}$$

(3)
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \ . \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x - y & y - x \\ x^2 + 1 & y^2 \end{pmatrix}$$

(1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Même question pour l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y)^{-1} & \text{si } f(x, y) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Différentiabilité et dérivées partielles

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes, justifier rapidement qu'elles sont de classe C^1, puis calculer les dérivées partielles et la matrice jacobienne :

(1) $f_1(x,y,z) = (x^2 + y - e^z, \cos(x+y))$
(2) $f_2(x,y) = (\arctan(xy), y^2 - x, 3y+1)$
(3) $f_3(x) = (x^2, -2x)$
(4) $f_4(x,y) = x^4 + y^3$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-3y)$. Pour $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, calculer un DL1 de $f(x_0+h, y_0+k)$. En déduire la matrice jacobienne de f en (x_0,y_0), puis le fait que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (indication : on pourra commencer par montrer que quand $x \neq y$, $F(x,y) = \int_0^1 f'(x+t(y-x))dt$.)

Exercice 9. (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable dans toute direction en $(0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 10. Soit $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction qui à une matrice carrée réelle $n \times n$ associe son déterminant.

(1) Montrer que det est de classe C^1.
(2) Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on identifie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^4$. Calculer les dérivées partielles de det, et donner sa matrice jacobienne.

Exercice 11. On s'intéresse dans cet exercice au caractère C^1 ou non de différentes normes sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque, et $u \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Étudier la dérivabilité en $t = 0$ de la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|tu\|$. En déduire que $(x,y) \mapsto \|(x,y)\|$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$.
(2) Montrer que la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, et calculer ses dérivées partielles.
(3) Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Même question pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 12. Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(A) = \mathrm{tr}(A^2)$.

(1) Justifier sans calcul que ϕ est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Pour $1 \leq i,j \leq n$, on note $E_{i,j}$ la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf celui de la i-ème ligne et j-ième colonne qui vaut 1. Exprimer le DL1 de $\phi(A + tE_{i,j})$ (lorsque $t \to 0$) en fonction A et $E_{i,j}$.
(3) En déduire $\dfrac{\partial \phi}{\partial E_{i,j}}_{|A}$ en fonction des coefficients $(a_{k,l})$ de A.