

Correspondance RSK, fonctions de Schur
et percolation de dernier passage

- 1) fct de Schur et RSK
- 2) Percolation de dernier passage et motivations.
- 3) Matrices aleatoires
- 4) Extensions.



Les

fonctions de Schur $S_\lambda(x) := \frac{\det(x_i^{\lambda_j + n - j})}{\det(x_i^{n - j})}$

$\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

sont des polynomes
symetriques.

Satisfont l'identite de Cauchy :

$x_i, y_j \in (0, 1)$

$$\sum_{\lambda} S_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) S_{\lambda}(y_1, \dots, y_m) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

Preuve 1 : identité de Cauchy-Binet

Preuve 2 : RSK

$$S_\lambda(x) = \sum_{T; \text{sh}(T)=\lambda} x^T \prod_i x_i^{\text{nb de } i \text{ dans } T}$$

Tableau de Young
semi-standard

1	2	2
2	3	

$$\lambda = (3, 2)$$

$$x^T = x_1 x_2^3 x_3$$

d'un côté

$$\sum_{P, Q; \text{sh}(P)=\text{sh}(Q)} x^P y^Q$$

RSK

de l'autre

$$\prod_{i,j} \sum_{M \geq 0} (x_i y_j)^M = \sum_{M \in \mathbb{N}^{n \times m}} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{M_{i,j}}$$

matrices
d'entiers

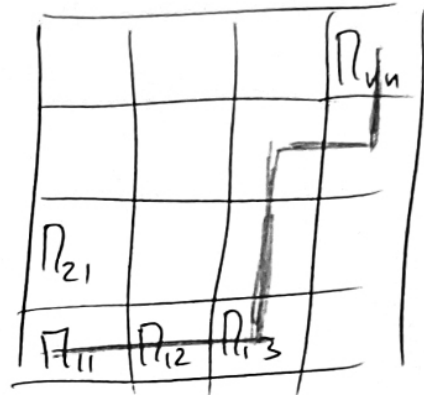
La correspondance RSK est ~~une~~ bijection

$$M \in \mathbb{N}^{n \times m} \longleftrightarrow (P, Q) \text{ Tableaux de Young de même forme}$$

(2)

Th de Greene

$$\lambda_1 = \max_{\pi: (1,1) \rightarrow (n,m)} \sum_{(i,j) \in \pi} M_{ij}$$



temps de percolation de dernier passage au point (n,m)
noté $L(n,m)$.

Supposons que les M_{ij} sont des variables aléatoires géométriques, i.e.

$$P(M_{ij} = k) = (x_i y_j)^k (1 - x_i y_j)$$

Alors

$$P(L(n,m) \leq \ell) = \sum_M P(M)$$

t.q. $\lambda_1(\text{RSK}(\pi)) \leq \ell$

$$= \sum_{M \text{ t.q. } \lambda_1 \leq \ell} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{P_{ij}}$$

$$= \sum_{\substack{P, Q \\ \text{sh}(P) = \text{sh}(Q) = 1 \\ \lambda_1 \leq \ell}} x^P y^Q$$

$$\mathbb{P}(L(n,m) \leq \ell) = \sum_{\lambda, \ell \leq \lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$$

→ étudier directement ↗

→ Considérer la mesure de probabilité sur les partitions λ

$$\mathbb{P}_{x,y}(\lambda) := \frac{1}{\Pi(x,y)} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y)$$

où $\Pi(x,y) = \prod \frac{1}{1-x_i y_i}$ (Okounkov 2001)

2) Motivations.

$$\text{si } M \sim \text{Geom}(e^{-\varepsilon \alpha})$$

$$\varepsilon M \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E \sim \text{Exp}(\alpha)$$

			E_{nm}
E_{11}	E_{12}	...	

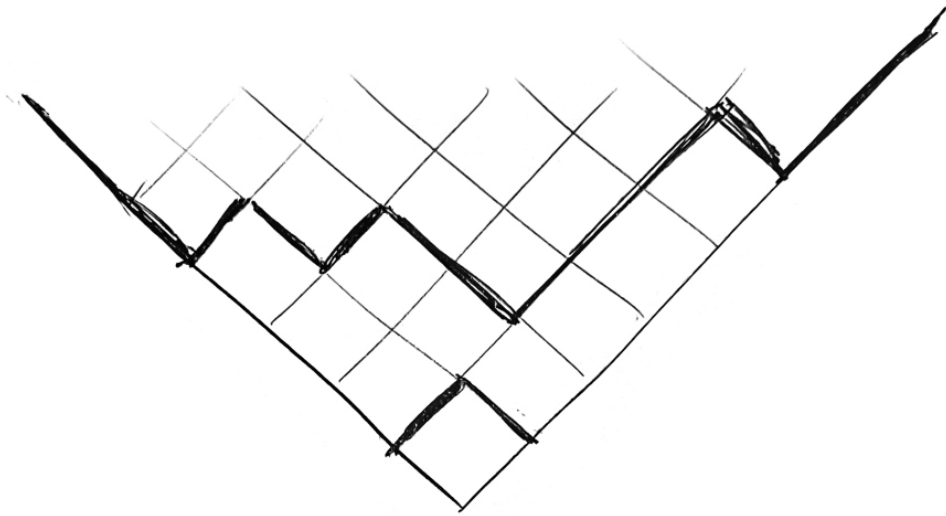
$$E_{ij} \sim \text{Exp}(\alpha_i + \beta_j)$$

$$\mathcal{L}(n, m) = \max_{\pi: (1,1) \rightarrow (n,m)} \left\{ \sum_{(i,j) \in \pi} E_{ij} \right\}$$

$$P(\mathcal{L}(n, m) \leq x) = \frac{1}{C_{\alpha, \beta}} \int_{\substack{\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n \\ \lambda_1 \leq x}} \det(e^{-\alpha_i \lambda_j}) \det(e^{-\beta_i \lambda_j}) d\lambda$$

$$\text{ou } C_{\alpha, \beta} = \det\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right).$$

Processus de Markov

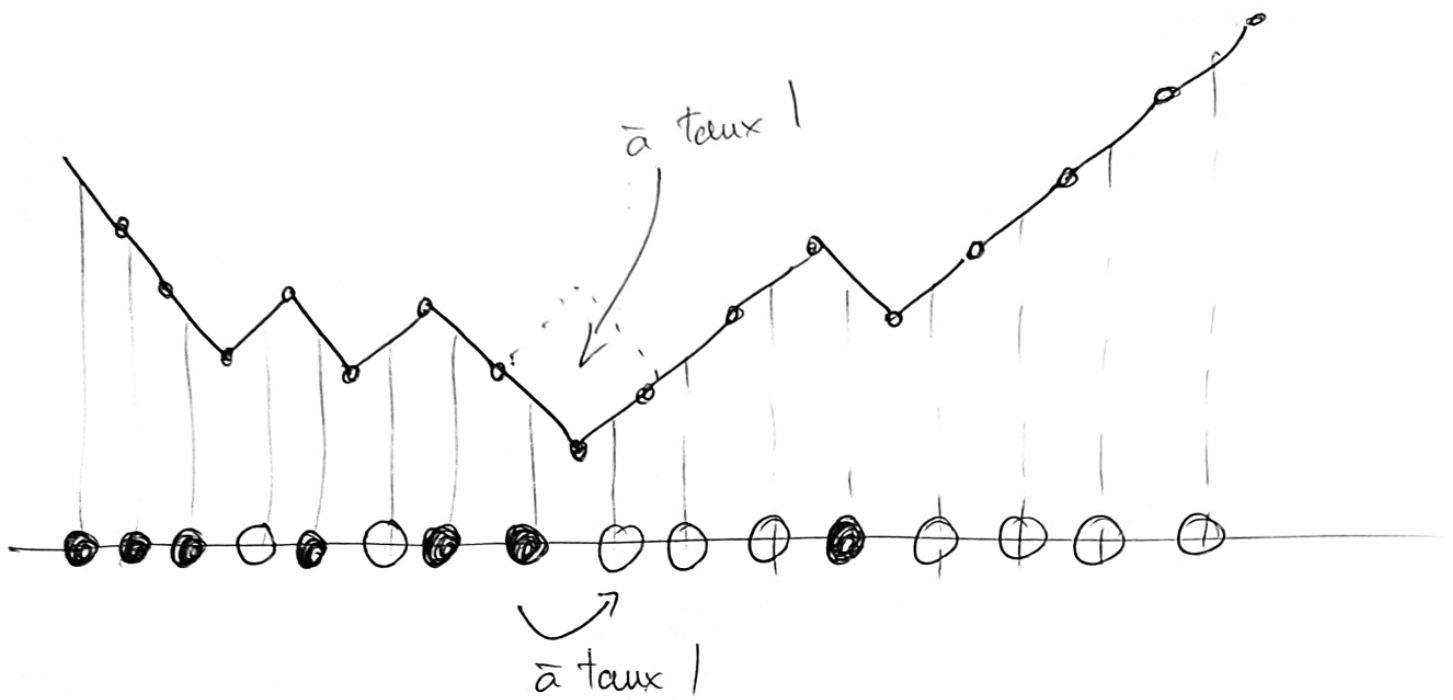


$$C(t) = \left\{ \text{ensemble des cases } ij \text{ tq } \mathcal{L}(ij) \leq t \right\}$$

- Pour chaque $t > 0$, la bordure de $C(t)$ définit une interface.
- On rajoute la case $ij \bar{a} C(t)$ après un temps d'attente exponentiel $\mathbb{E}_{ij} \sim \text{Exp}(\alpha_i + \beta_j)$.
- Définit un processus de Markov sur ces interfaces.

Supposons.

$$\alpha_i + \beta_j \equiv 1$$



TASEP (1968)

totally asymmetric simple exclusion process.

$$\left(\left\{ Z(n,n) \leq t \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{nbre de particules} \\ \text{à dté de } 0 \\ \text{au tps } t \end{array} \geq n \right\} \right) \\
 = \left\{ X_n(t) \geq 0 \right\}$$

$$\left\{ Z(n,m) \leq t \right\} \iff \left\{ X_m(t) + m \geq n \right\}$$

Classe d'universalité KPZ (1986)

- Croissance d'interface
- système de particules
- EPP stochastiques $\partial_t h = \partial_{xx} h + (\partial_x h)^2 + \xi$
- Pavage aléatoires
- modèles type six-vertex

...

hauteur de l'interface
 $h(z, t, x, t^{2/3}) - ct$

point fixe KPZ

$t^{1/3}$

$\xRightarrow[t \rightarrow \infty]{} H(z, x)$
processus universel

Quelle est la loi de $H(z, x)$ par ex $H(1, 0)$?

(par universalité, il suffit d'étudier n'importe quel modèle)

→ d'où l'intérêt des modèles exactement solubles dans ce domaine.

3) Matrices aléatoires

a) GUE

$$G \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad G_{ij} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1) \quad i > j$$

Hermittienne

$$G_{ji} = \overline{G_{ij}}$$
$$G_{ii} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0, 1)$$

Les vep $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ ont pour densité

$$\frac{1}{C} \underbrace{\prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^2}_{\text{det de Vandermonde au carré}} \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i^2/2}$$

det de Vandermonde au carré.

Théorème (Tracy-Widom 1994)

$$\mathbb{P} \left(\frac{\lambda_1 - \sqrt{2n}}{n^{1/6}} \leq x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_2(x)$$

} dist. de Tracy-Widom

b) Wishart

$$X \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$X_{ij} \sim \mathcal{N}_e\left(\frac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)$$

\mathcal{L} var^{de} $X^t X$ pour densité

$$\frac{1}{C_{\alpha, \beta}} \det\left(e^{-\alpha_i X_{ij}}\right) \det\left(e^{-\beta_j X_{ij}}\right)$$

Conséquence $\mathcal{L}(n, m) \stackrel{(d)}{=} \chi_1(X^t X)$

Théorème : $\mathbb{P}\left(\frac{\mathcal{L}(n, n) - 4n}{2^{4/3} n^{1/3}} \leq u\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_2(x)$

(Johansson 2001)

4) Extensions

a) $P(\lambda) \propto s_\lambda(x) s_\lambda(y)$

specialisations arbitraires positifs

→ autres modèles, permutation aléatoires ...

b) Identité de Littlewood

$$\sum_{\lambda' \text{ pair}} s_\lambda(x) = \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j}$$

$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4, \dots$

↳ percolation de dernier passage dans une matrice symétrique

⇔ TASEP sur \mathbb{N}

↳ mélange Cauchy / Littlewood

c) Processus de Schur.

la jointe de partitions aléatoires,

$$\lambda^1 \subset \lambda^2 \subset \dots \subset \lambda^n$$

par ex
(Okounkov-Reshetikhin
2003)

$$s_{\lambda^1}(x_1) s_{\lambda^2/\lambda^1}(x_2) \dots s_{\lambda^n/\lambda^{n-1}}(x_n) s_{\lambda^n}(y) \quad \textcircled{11}$$

↳ relié aux corrélations entre particules dans le TASEP.

d) Schur \rightarrow Macdonald. $q, t \in (0, 1)$

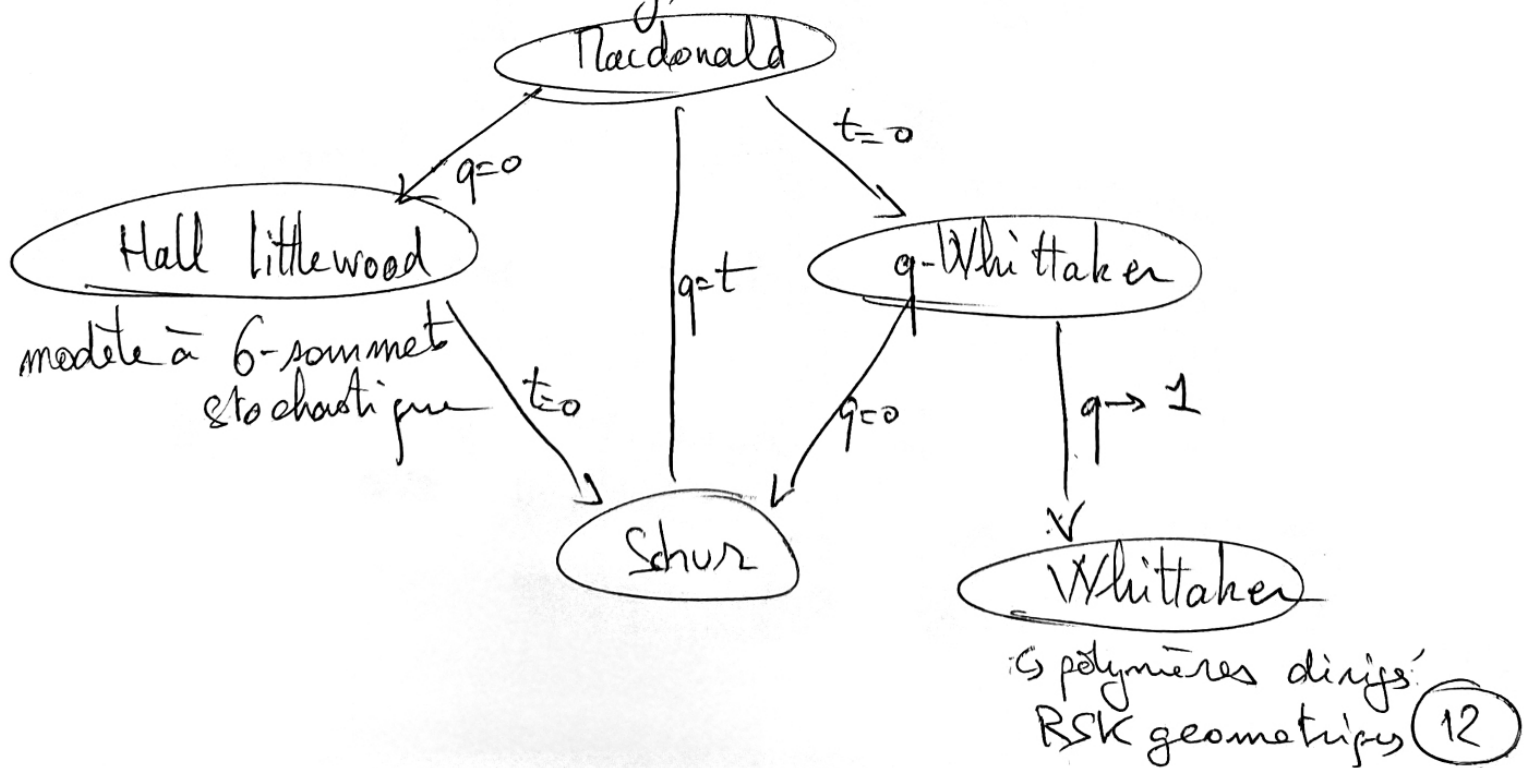
$$P_\lambda Q_\lambda \in \mathbb{Q}(q, t) [x_1, x_2, x_3, \dots]$$

mesure de Macdonald basée sur

$$\sum_\lambda P_\lambda(x) Q_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(xy_i; q)_\infty}$$

$$\text{ou } (a; q)_\infty = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\dots$$

$$\Pi(\lambda) = \frac{1}{\Pi(x; y)} P_\lambda(x) Q_\lambda(y)$$



fct
Schur

RSK
(max, +)

$$L(n, m) = \max_{\pi} \sum_{i, j \in \pi} E_{ij}$$

fcts
de
Mittler

gRSK
(+, x)

$$Z(n, m) = \sum_{\pi} \prod_{(i, j) \in \pi} \omega_{ij}$$

fonction de partition de
polymères dirigés.

② Les fonctions de partitions de modèles à vertex
(construit à l'aide de représentations de groupes quantiques)
fournissent des bases de fonctions F_{λ}, G_{λ}
satisfaisant l'identité de Cauchy et relations
d'orthogonalité qui permettent d'étudier de
nouvelles classes de modèles stochastiques.

(Borodin et al 2016...)