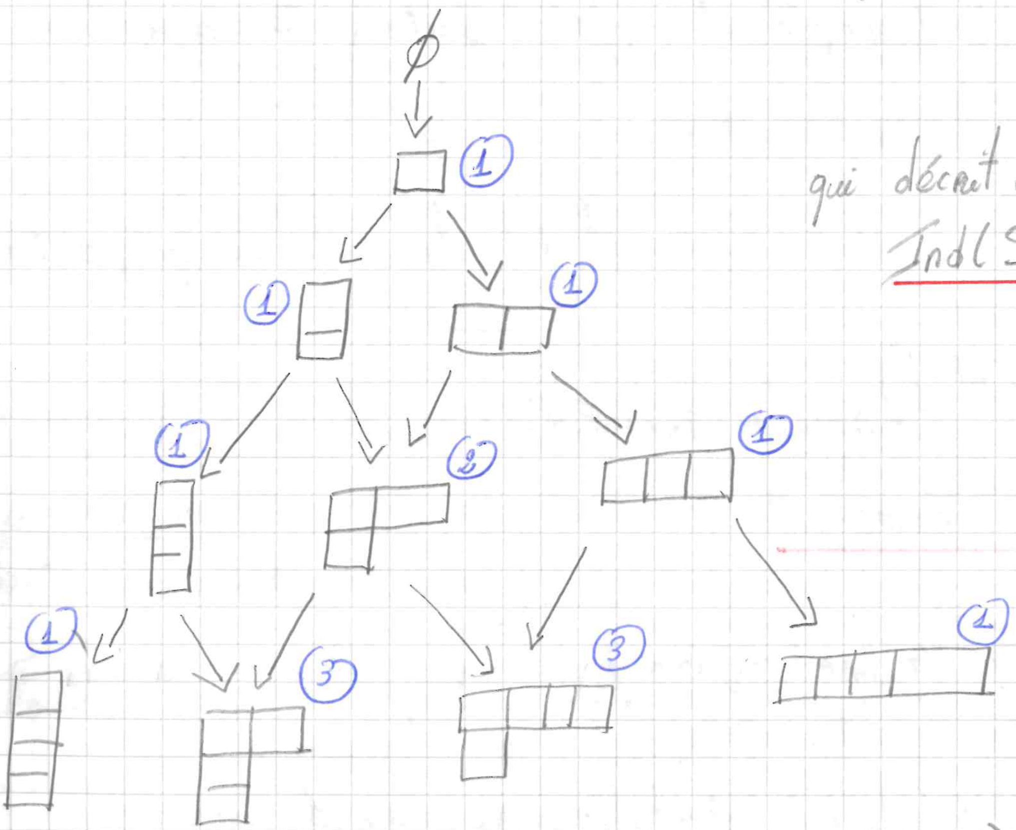
Représentations modulaires du gpe symétrique - involution de Mullineux

I En caractéristique 0

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n) = \{ S^\lambda \mid \lambda \vdash n \}$$

S^λ : module de Specht

- $\lambda = (n)$ rep. triv.
- $\lambda = (1^n)$ rep. signe.
- On calcule les dimensions des S^λ avec le graphe de Young :



qui décrit aussi $\mathrm{Ind}(S^\lambda)$

- Si $\lambda \vdash n$, $\varepsilon \otimes S^\lambda$ est irred : $\varepsilon \otimes S^\lambda \simeq S^{\lambda'}$ (λ' partition conjuguée)

Ex $\mathfrak{S}_3$, $\varepsilon : \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^\times$, $\mathrm{Id} : \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^*$

$S^{(2,1)}$:

$$(12) \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(23) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

II En caractéristique $p>0$

- les S^λ sont toujours défini mais non irréductible

Ex $S^{(21)}$ $(12) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\langle(-1,1)\rangle$ est stable

$(23) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Mais $\langle(1,0)\rangle$ n'est pas stable pour (23) ds $S^{(21)}$ est indécomposable mais réductible

- Comment s'en sortir ? chaque S^λ admet une suite de composition

$$S^\lambda \supset M_1 \supset M_2 \supset \quad \supset M_k = 0$$

où chaque M_i/M_{i-1} est simple et appelé facteur de composition

$\forall M \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n)$, on définit alors

$[S^\lambda : M]$ = multiplicité de M ds "la" suite de composition

$$\mathcal{D}_p := \left([S^\lambda : M]\right)_{\lambda \vdash n,\, M \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n)}$$

est la matrice de décomposition

Ex $\lambda = (3)$ $S^{(3)} \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_3 \mathfrak{S}_3)$

$\lambda = (111)$ $S^{(111)} \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_3 \mathfrak{S}_3)$

$\lambda = (21)$ $\langle(-1,1)\rangle$ est stable avec vap 1 donc rep triv

$$S^{(21)} \supset M_{triv} \supset 0 \quad \text{et} \quad S^{(21)}/M_{triv} \simeq M_{signe}$$

$$\mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème (James)

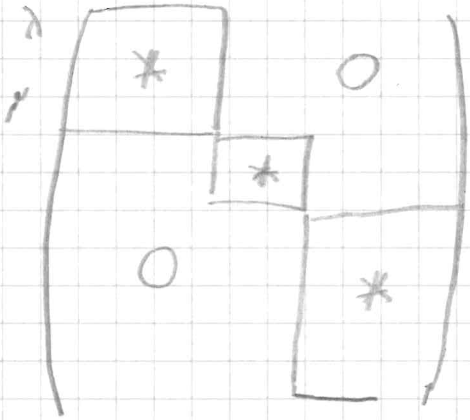
Il existe un ordre sur ligne et colonne tq

$$D_p = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Big] \text{ partitions } p\text{-rég } Reg_p$$

où $\lambda \in Reg_p(n) \Leftrightarrow$ aucune part de λ ne se répète p-fois

Donc $\quad I_{rr}(\mathbb{F}_p \mathfrak{S}_n) = \{ D^\lambda \mid \lambda \in Reg_p \}$

- Blocs : la mat de décompo s'écrit



diago par blocs
donne une partition de $\{\lambda \vdash n\}$

- λ et μ ds le m̂ bloc $\Leftrightarrow$ ils ont le m̂ coeur
- poids d'un bloc : nbre de crochet qu'on doit enlever pour aboutir au coeur commun.

$\mathbb{F}_3 \mathfrak{S}_5$

$$\begin{array}{c} (5) \\ (41) \\ (32) \\ (311) \\ (221) \\ (2111) \\ (11111) \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & . & . & . & . \\ . & \underline{1} & . & . & . \\ . & 1 & \underline{1} & . & . \\ . & . & . & \underline{1} & . \\ 1 & . & . & . & \underline{1} \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . \end{pmatrix}$$

$\nearrow$ $311 \quad (\underline{1})$

$\rightarrow$

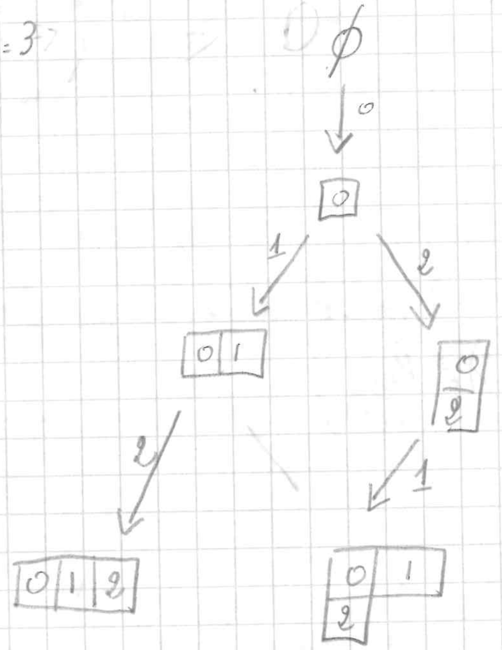
$$\begin{array}{c|cc} (5) & \underline{1} & . \\ (221) & 1 & \underline{1} \\ (2111) & . & 1 \end{array} \Rightarrow \text{coeur } (2)$$

$\searrow$

$$\begin{array}{c|cc} (41) & \underline{1} & . \\ (32) & 1 & \underline{1} \\ (111) & . & 1 \end{array} \Rightarrow \text{coeur } (11)$$

- les blocs de même poids sont dérivé-équivalent (certains st Morita Scopes)
- <u>Règle de branchement</u> : description de $\mathrm{Soc}(\mathrm{Ind}(D^\lambda))$

$p=3$:



C'est le cristal de $V(\Lambda_0)$ la rep fond. de $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_p)$

- Si $\lambda \in \mathrm{Reg}_p$, trouver $m_p(\lambda) \in \mathrm{Reg}_p$ tq

$$D^{m_p(\lambda)} \simeq \mathcal{E} \otimes D^\lambda$$

C'est dur !

Solution en suivant le graphe ci-dessus (Kleshchev)

et d'autres (Xu, Mullineux, Bessenrodt, Brundan, Fayers, ...)

Elles sont récursives !