Université d'Orléans **2007-2008**
Mathématiques **Master M3MT12**

Processus aléatoires et applications I

Chapitre 0. Phénomènes sans mémoire.

Une variable aléatoire réelle X a une *loi exponentielle de paramètre* λ si elle admet une densité

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \, . \end{cases}$$

Sa fonction de répartition vaut

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \, . \end{cases}$$

On a alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \, .$$

Cette variable aléatoire possède la propriété d'*absence de mémoire*:

$$\mathbb{P}\{X > s + t | X > t\} = \mathbb{P}\{X > s\} \text{ pour tout } s > 0 \text{ et tout } t > 0 \, .$$

Exercice. *On considère une agence postale avec deux employés. Un client A entre dans l'agence et constate qu'un client B est servi par un employé et un client C par l'autre. Le service de A commencera dès que celui de B ou C sera terminé. Si le temps passé par un employé avec un client suit une loi exponentielle de paramètre λ, quelle est la probabilité que des trois clients A soit le dernier à quitter l'agence?*

La distribution exponentielle est la seule à posséder cette propriété d'absence de mémoire.

Chapitre 1. Le Processus de Poisson.

1. Définition du Processus de Poisson

Un processus aléatoire $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé un *processus de comptage* si $N(t)$ représente un nombre total d'événements d'un type donné qui se sont produits jusqu'au temps t. Il doit donc satisfaire à:

- $N(t)$ a ses valeurs dans $\mathbb{N}$;
- si $s < t$, $N(s) \leq N(t)$.

On dit qu'un processus de comptage a ses *accroissements indépendants* si les nombres d'événements qui se produisent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants.

On dit que ses accroissements sont *stationnaires* si la loi du nombre d'événements survenus pendant un intervalle de temps donné ne dépend que de la longueur de l'intervalle.

Définition 1 *Un processus de comptage $N(t), t \geq 0$ est un processus de Poisson de taux (ou d'intensité) λ, où $\lambda > 0$, si*

1. $N(0) = 0$
2. *N a ses accroissements indépendants*
3. *le nombre d'événements dans un intervalle de temps de longueur t suit une loi de Poisson de moyenne λt.*

Théorème 1 *Un processus de comptage N est un processus de Poisson si et seulement si:*

1. $N(0) = 0$
2. *N a ses accroissements indépendants et stationnaires*
3. *Le comptage est "idéal":*

$$lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}[N(h) > 1]}{\mathbb{P}[N(h) = 1]} = 0.$$

2. Loi des durées inter-arrivées.

Soit N un processus de Poisson, $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ la suite des instants d'arrivées, $X_1 = T_1, X_2 = T_2 - T_1, \ldots$ la suite des durées inter-arrivées.

Proposition 1 *Les variables aléatoires $(X_i, i \geq 1)$ sont indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.*

Proposition 2 *Pour tout $n \geq 1$, la variable T_n suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$ de densité*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\ .$$

3. Distribution conditionnelle des temps d'arrivée.

Exercice. *On observe les instants d'arrivée d'un processus de Poisson. Si l'on constate qu'un événement et un seul s'est produit avant l'instant t, quelle est la loi de cet instant d'arrivée ?*

Le calcul donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 \leq s | N(t) = 1] &= \frac{\mathbb{P}[N(s)=1, N(t)-N(s)=0]}{\mathbb{P}[N(t)=1]} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t}\end{aligned}$$

et la réponse est la loi uniforme sur $]0, t[$.

Définition 2 *Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, on note $Y_{(k)}$ la k-ième plus petite valeur parmi $Y_1, \ldots, Y_n$. La suite $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ est appelée la* statistique d'ordre *de $Y_1, \ldots, Y_n$.*

Proposition 3 *Si les variables (Y_i) sont indépendantes de même densité f, la densité du vecteur $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ est donnée par*

$$g(z_1, \ldots, z_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(z_i) \quad \textit{pour } z_1 < \ldots < z_n \; .$$

En particulier, si les Y_i ont une loi uniforme sur $]0, t[$, cette densité vaut

$$\frac{n!}{t^n} \quad \text{pour } 0 < z_1 < \ldots < z_n < t \; .$$

Théorème 2 *Sachant que $N(t) = n$, les n temps d'arrivée $T_1, \ldots, T_n$ ont pour loi jointe la loi de la statistique d'ordre de n variables aléatoires indépendantes uniformes sur $]0, t[$.*

Exercice. *Des usagers arrivent à une gare suivant un processus de Poisson de taux λ. Si le train part au temps t, quelle est la valeur moyenne de la somme des temps d'attente des voyageurs arrivés dans l'intervalle $]0, t[$?*

Théorème 3 *On suppose que dans un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, les arrivées sont de type 0 ou 1. Si l'arrivée se produit à l'instant s, indépendamment de tout le reste la probabilité qu'elle soit de type 1 est $p(s)$ et la probabilité qu'elle soit de type 0 est $1 - p(s)$. Si $N^1(t)$ (resp. $N^0(t)$) représente le nombre d'arrivées de type 1 (resp. de type 0) avant t, les variables aléatoires $N^1(t)$ et $N^0(t)$ sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $\lambda \int_0^t p(s) ds$ et $\lambda \int_0^t (1 - p(s)) ds$.*

Exercice. File d'attente $M/G/\infty$ à une infinité de serveurs. *Des clients arrivent à une station suivant un processus de Poisson de taux λ. A son arrivée, le client est immédiatement pris en charge par un serveur, les durées de service de chaque client étant indépendantes et de fonction de répartition commune G. Quelle est la loi jointe du nombre de clients ayant fini leur service au temps t et du nombre de clients encore en service au temps t ?*

Théorème 4 *On suppose que dans un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$ les arrivées sont de type 1 ou 0 avec les probabilités p ou $1 - p$. alors les processus de comptage $N^1(t)$ et $N^0(t)$ correspondant aux arrivées de type 1 ou 0 sont des processus de Poisson indépendants de taux respectifs λp et $\lambda(1 - p)$.*

4. Processus de Poisson non homogène

Définition 3 *Un processus de comptage* $(N(t), t \geq 0)$ *est un processus de Poisson non homogène d'intensité* $(\lambda(t), t \geq 0)$*, où* λ *est une fonction positive continue par morceaux et continue à droite, si*

1. $N(0) = 0$
2. N *a ses accroissements indépendants*
3. $\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$ *pour tout* $t \geq 0$
4. $\mathbb{P}[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$ *pour tout* $t \geq 0$*.*

On associe à un tel processus la fonction continue croissante

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \; .$$

Proposition 4 *Soit* N *un processus de Poisson non homogène d'intensité* $(\lambda(t), t \geq 0)$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*,* $s > 0$*,* $t \geq 0$*, on a :*

$$\mathbb{P}[N(t+s) - N(t) = n] = e^{-[m(t+s)-m(t)]} \frac{(m(t+s) - m(t))^n}{n!}$$

Exercice. Processus des sorties d'une file d'attente $M/G/\infty$. *Si* G *est la fonction de répartition de la loi du service et* λ *le taux d'arrivée, montrer que le processus des sorties* N^s *est un processus de Poisson non homogène d'intensité* $\lambda(t) = \lambda G(t)$ *.*

5. Processus de Poisson composé

Définition 4 *Un processus* $(X(t), t \geq 0)$ *est un* processus de Poisson composé *s'il peut être représenté sous la forme*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

où N *est un processus de Poisson d'intensité* λ *et* (Y_i) *une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et indépendantes du processus* N*.*

Exemple. *Si des clients entrent dans un magasin suivant un processus de Poisson et que leurs dépenses sont indépendantes et de même loi, le montant total de leurs achats jusqu'à un instant donné est un processus de Poisson composé.*

Proposition 5 *On suppose que* $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$*. Alors*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[X(t)] & = & \lambda t \, \mathbb{E}[Y_1] \\ Var(X(t)) & = & \lambda t \, \mathbb{E}[Y_1^2] \; . \end{array}$$

6. Application à la ruine d'une compagnie d'assurances

La crainte du risque

Il y a demande d'assurance parce que les agents économiques (individus ou entreprises) sont soumis à des aléas dont ils ne peuvent supporter facilement les conséquences financières. Leurs fortunes ou leurs fonds propres disponibles seraient même dans certains cas insuffisants pour faire face à ces événements.

L'opération d'assurance a un objectif universel: elle vise le transfert de tout ou partie des conséquences du risque subi par l'*assuré* vers une *société d'assurance* dans les conditions et circonstances précisées par un contrat. Ce sera toujours une entreprise spécialisée, et non pas un individu, qui donnera une garantie d'assurance. La société d'assurance prendra totalement ou partiellement en charge les sinistres advenus à l'assuré moyennant le versement régulier d'une *prime* par celui-ci.

Le problème de la ruine

Le modèle mathématique de risque en assurance remonte à la thèse de Lundberg en 1903. Il réalisa que les arrivées des sinistres aux clients d'une compagnie, vu leur caractère imprévu, pouvaient être modélisées par un processus de Poisson, ou plus généralement un processus de renouvellement.

Définition 5 . *On appelle* modèle de renouvellement *la donnée d'un processus des sinistres et d'un processus des dépenses où:*
a) les sinistres se produisent en des instants aléatoires $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ *tels que les durées inter-arrivées*

$$X_1 = T_1, \ldots, X_k = T_k - T_{k-1}, \ldots$$

soient des variables i.i.d. de moyenne finie $1/\lambda$*;*
b) les charges des sinistres successifs sont des variables positives (Y_k) *i.i.d. de moyenne finie* m*;*
c) les suites (X_k) *et* (Y_k) *sont indépendantes.*
On appelle modèle de Cramér-Lundberg *un modèle de renouvellement où les variables* (X_k) *suivent la loi* $\mathcal{E}(\lambda)$.

On note pour $t \geq 0$ et $x \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} N(t) & = & \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\} \\ F(x) & = & \mathbb{P}(Y_1 \leq x) \\ \bar{F}(x) & = & 1 - F(x) = \mathbb{P}(Y_1 > x) \\ S(t) & = & \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \, . \end{array}$$

Ainsi $N(t)$ est un processus de Poisson dans le modèle de Cramér-Lundberg.

Si $c > 0$ désigne le taux de rentrée des primes et $u \geq 0$ le capital initial de la compagnie, le processus de risque U est défini par

$$U(t) = u + ct - S(t) \, .$$

On s'intéresse à la probabilité de ruine de la compagnie :

$$\psi(u) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ pour un } t < \infty)$$

et on pose

$$r(u) = 1 - \psi(u) \, .$$

D'après la loi des grands nombres, avec probabilité un, quand $t \to \infty$,

$$\frac{U(t)}{t} \to c - \lambda m$$

et par conséquent on aura $\psi(u) = 1$ si $c < \lambda m$. On peut aussi montrer, un peu plus difficilement, que $\psi(u) = 1$ si $c = \lambda m$. On va donc imposer la *condition de profit net*

$$c - \lambda m > 0 \, ,$$

ce qui, si l'on introduit la *charge de sécurité*

$$\rho = \frac{c}{\lambda m} - 1 \, ,$$

revient à imposer $\rho > 0$.

Proposition 6 . *Sous la condition de profit net,*
a) $\lim_{u\to\infty} r(u) = 1$ *;*
b) pour le modèle de Cramér-Lundberg,

$$r(u) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{m(1+\rho)} \int_0^u r(u-v)\bar{F}(v)\, dv \ .$$

Preuve. a) Pour tout $u \geq 0$,

$$\begin{array}{rcll} r(u) & = & \mathbb{P}(u + ct - S(t) \geq 0 & \forall t \geq 0) \\ & = & \mathbb{P}(u + \sum_{i=1}^{N(t)}(cX_i - Y_i) \geq 0 & \forall t \geq 0) \\ & = & \mathbb{P}(u + \sum_{i=1}^{n}(cX_i - Y_i) \geq 0 & \forall n \geq 0) \\ & = & \mathbb{P}(u \geq \sup_n \sum_{i=1}^{n}(Y_i - cX_i)) & . \end{array}$$

D'après la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - cX_i) \to m - \frac{c}{\lambda} < 0 \ \ p.s.,$$

donc la variable aléatoire $\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - cX_i)$ est finie p.s. Par conséquent,

$$r(\infty) = \lim_{u\to\infty} r(u) = 1 \ .$$

b) Comme souvent on note dF au lieu de dP_{Y_1}. La fonction r est aussi une fonction de répartition et

$$\begin{array}{rcl} r(u) & = & \mathbb{P}(\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - cX_i) \leq u) \\ & = & \mathbb{P}(Y_1 - cX_1 \leq u,\, \sup_{n\geq 2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - cX_i) \leq u) \\ & = & \mathbb{P}(Y_1 - cX_1 \leq u,\, \sup_{n\geq 2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - cX_i) \leq u - Y_1 + cX_1) \ . \end{array}$$

Mais la variable $\sup_{n\geq 2}\sum_{i=2}^{n}(Y_i - cX_i)$ est indépendante de $Y_1 - cX_1$ et a même loi que $\sup_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - cX_i)$. Il en résulte

$$\begin{array}{rcl} r(u) & = & \int\int\int_{y-cx\leq u,\, z\leq u-y+cx} \lambda e^{-\lambda x} dx\, dF(y)\, dr(z) \\ & = & \int\int_{y-cx\leq u} \lambda e^{-\lambda x} r(u-y+cx)\, dx\, dF(y) \ . \end{array}$$

En posant $s = u + cx$, il vient

$$\begin{array}{rcl} r(u) & = & \int\int_{0<y\leq s,\, u<s} \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda\frac{s-u}{c}} r(s-y)\, ds\, dF(y) \\ & = & \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u} c \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda s}{c}} (\int_0^s r(s-y)\, dF(y))\, ds \end{array}$$

puis en dérivant

$$r'(u) \ = \ \frac{\lambda}{c} r(u) \ - \ \frac{\lambda}{c}\int_0^u r(u-y)\, dF(y) \ .$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^u r(u-y)\, dF(y) \ = \ r(0)F(u) \ + \ \int_0^u r'(u-y)\, F(y)\, dy$$

et par Fubini

$$\begin{array}{rcl} \int_0^u (\int_0^v r(v-y)\, dF(y))\, dv & = & r(0)\int_0^u F(v)\, dv \ + \ \int_0^u (\int_y^u r'(v-y)\, dv) F(y)\, dy \\ & = & r(0)\ \int_0^u F(v)\, dv \ + \ \int_0^u (r(u-y) - r(0))\, F(y)\, dy \\ & = & \int_0^u r(u-v)\, F(v)\, dv \ . \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} r(u) & = & r(0) \ + \ \int_0^u r'(v)\, dv \\ & = & r(0) \ + \ \frac{\lambda}{c}\int_0^u r(v)\, dv \ - \ \frac{\lambda}{c}\int_0^u r(u-v)\, F(v)\, dv \\ & = & r(0) \ + \ \frac{\lambda}{c}\int_0^u r(u-v)\, dv \ - \ \frac{\lambda}{c}\int_0^u r(u-v)\, F(v)\, dv \\ & = & r(0) \ + \ \frac{\lambda}{c}\int_0^u r(u-v)\, \bar{F}(v)\, dv \ . \end{array}$$

Il reste à trouver la valeur de $r(0)$. D'après le a), en faisant tendre u vers l'infini, la formule précédente devient par convergence dominée

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & r(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(v)\,dv \\ & = & r(0) + \frac{\lambda}{c} m \,, \end{array}$$

d'où les valeurs de $r(0)$ et de $r(u)$. □

On peut en savoir plus sur le comportement asymptotique de $r(u)$ ou $\psi(u)$ quand $u \to \infty$ mais au prix d'une hypothèse supplémentaire de nature exponentielle sur la loi des charges des sinistres. Toujours dans le modèle de Cramér-Lundberg soumis à la condition de profit net, on suppose de plus qu'il existe un $\nu > 0$ tel que

$$\int_0^\infty e^{\nu x}\bar{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda}\,.$$

On appelle ce nombre s'il existe le *coefficient d'ajustement* ou encore *exposant de Lundberg*. Son existence exige celle d'un moment exponentiel pour la loi de Y_1, mais ne lui est pas équivalente. On peut alors démontrer l'un des résultats les plus connus de l'assurance mathématique.

Théorème 5 (Inégalité de Lundberg) . *S'il existe un coefficient d'ajustement ν dans le modèle de Cramér-Lundberg soumis à la condition de profit net, alors pour tout $u \geq 0$*

$$\psi(u) \leq e^{-\nu u}\,.$$

Ce résultat est bien sûr rassurant. Si l'on part d'un capital initial important, la probabilité de ruine est exponentiellement petite. Le problème est que la queue de distribution des charges des sinistres ne vérifie pas souvent la majoration exponentielle nécessaire à l'existence de ce coefficient. En revanche, tout marche bien en cas de distribution exponentielle où l'on a même des calculs explicites, non seulement de l'exposant de Lundberg, mais aussi de la valeur exacte de la probabilité de ruine.

Proposition 7 *Dans le cas exponentiel où $\bar{F}(x) = e^{-x/m}$, l'exposant de Lundberg vaut $\nu = \frac{\rho}{m(1+\rho)}$ et l'on a exactement*

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}\exp\{-\frac{\rho}{m(1+\rho)}u\}\,.$$

Chapitre 2. Processus de renouvellement.

1. Introduction

Un processus de renouvellement permet de représenter les instants successifs de renouvellement d'un matériel. Un matériel est mis en service à l'instant initial; lorsqu'il tombe en panne il est remplacé par un matériel neuf ou rénové, et ainsi de suite.

Si les durées de réparation ne sont pas prises en compte, par exemple lorsqu'elles sont négligeables devant les durées de bon fonctionnement, la succession des instants de remise en marche détermine un processus de renouvellement auquel on peut associer un processus de comptage.

Si les durées de réparation ne sont pas négligeables mais sont toutes indépendantes et de même loi, on observe un processus de renouvellement alterné. Son étude se ramène au cas précédent car les instants successifs de panne (resp. de remise en marche) du matériel forment aussi un processus de renouvellement.

2. Renouvellement

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes de même loi désignée par sa fonction de répartition F. On suppose que

$$F(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) < 1$$

ce qui évitera le cas trivial où les v.a. sont p.s. nulles. On suppose que les variables (X_n) ont une espérance finie, on la note

$$\mu = \int x \, dF(x) \; > 0$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} T_0 & = & 0 \\ T_n & = & \sum_{i=1}^n X_i \quad n \geq 1 \, . \end{array}$$

On appelle F la *loi inter-arrivées*. D'après la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{T_n}{n} \to \mu > 0 \quad p.s.$$

donc $T_n \to \infty$ p.s. On introduit le processus de comptage

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\} \; .$$

Proposition 8

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad p.s. \text{ quand} \quad t \to \infty$$

3. Processus régénératifs

Soit $N(t)$ un processus de renouvellement de durées inter-arrivées $(X_n, n \geq 1)$. A chaque cycle de renouvellement est associée une variable aléatoire positive R_n. On suppose que les couples (X_n, R_n) sont indépendants et de même loi. La moyenne de chaque variable X_n est notée $\mathbb{E}[X]$, celle de chaque variable R_n est notée $\mathbb{E}[R]$.

On suppose qu'est définie pour tout $t \geq 0$ une variable $C(t)$ (représentant par exemple un coût cumulé jusqu'à l'instant t) qui vérifie

$$\sum_{n=1}^{N(t)} R_n \leq C(t) < \sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n \; .$$

Théorème 6 *Si $\mathbb{E}[X] < \infty$ et $\mathbb{E}[R] < \infty$, alors, p.s. quand $t \to \infty$,*

$$\frac{C(t)}{t} \to \frac{\mathbb{E}[R]}{\mathbb{E}[X]} \, .$$

La limite précédente s'appelle souvent le *coût asymptotique moyen*.

Exemple. *Des passagers arrivent à une gare suivant un processus de renouvellement de durée inter-arrivées moyenne μ. Un train part dès que N voyageurs sont présents. Si le coût par unité de temps de l'attente d'un voyageur est c et s'il y a un coût K à chaque départ de train, quel est le coût asymptotique moyen ?*

4. Files d'attente G/G/1

Définition 6 *Soit $(Y_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires. On dit qu'une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ est un* temps d'arrêt *de la suite $(Y_n, n \geq 1)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{N = n\}$ ne dépend que des valeurs de $Y_1, \ldots, Y_n$.*

Théorème 7 (Equation de Wald.) *Si la suite $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance finie et si N est un temps d'arrêt de la suite tel que $\mathbb{E}[N] < \infty$, alors*

$$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{N} X_n] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1] \, .$$

Proposition 9 *Soit $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance $0 < \mathbb{E}[U_1] < \infty$. Si on pose*

$$N = \inf\{n \geq 1 : U_1 + \ldots + U_n > 0\} \, ,$$

alors $\mathbb{E}[N] < \infty$.

On considère maintenant une file d'attente G/G/1. On a donc une station munie d'un seul serveur avec une capacité infinie, ce qui signifie que la taille de la file d'attente n'est pas limitée. A son arrivée le client est immédiatement servi si le serveur est inoccupé, sinon il attend son tour dans la file. Le système est composé de la station de service et de la file d'attente.

Théorème 8 (Formule de Little) *Dans une file d'attente G/G/1, on suppose que la durée moyenne de service $\mathbb{E}[Y]$ et la durée moyenne inter-arrivées $\mathbb{E}[X]$ vérifient*

$$0 < \mathbb{E}[Y] < \mathbb{E}[X] < \infty \, .$$

On appelle $\lambda = 1/\mathbb{E}[X]$ le taux d'arrivée.

1. *Le nombre moyen de clients présents dans le système pendant l'intervalle $[0, t]$ converge p.s. vers une constante L quand t tend vers l'infini.*

2. *La durée moyenne de présence dans le système des n premiers clients converge p.s. vers une constante W quand n tend vers l'infini.*

3. *On a $L = \lambda W$.*

On a des énoncés analogues en remplaçant la présence dans le système par la présence dans la file ou encore la présence devant la station. Dans ce dernier cas, le *taux d'occupation* de la station vaut donc λ/μ, où $\mu = 1/\mathbb{E}[Y]$.

Chapitre 3. Chaînes de Markov à temps continu.

1. Phénomènes markoviens

On considère un processus à temps continu $\{X(t), t \geq 0\}$ prenant ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$. On dira que ce processus est une chaîne de Markov à temps continu si pour $s, t \geq 0$ i et j entiers, x une fonction de $[0, s[$ dans $\mathbb{N}$ constante par morceaux, on a

$$\mathbb{P}(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s) = \mathbb{P}(X(t+s) = j | X(s) = i) \; .$$

On supposera désormais que le second membre de cette égalité ne dépend pas de s, on dira alors que la chaîne de Markov est *homogène*.

On déduit facilement de cette propriété que si le processus est en i à l'instant 0 et si T_i désigne l'instant où il quitte l'état i, alors T_i suit une loi exponentielle. On note v_i le paramètre de cette loi. Le processus peut se décrire de la façon suivante: si à un moment donné il est dans l'état i, il y reste un temps exponentiel de paramètre v_i, puis il choisit d'aller dans l'état $j \neq i$ avec la probabilité p_{ij} et ainsi de suite. On peut résumer les données grâce aux valeurs

$$q_{ij} = v_i p_{ij} \quad i \neq j$$

puisqu'on aura $v_i = \sum_j q_{ij}$ et $p_{ij} = q_{ij}/v_i$.

2. Processus de naissance et de mort

On considère un système dont l'état à chaque instant est représenté par le nombre de personnes présentes. On suppose que lorsque n personnes sont présentes,

- une nouvelle arrivée a lieu au taux exponentiel λ_n
- un départ a lieu au taux exponentiel μ_n.

On dit que ce système est un *processus de naissance et de mort* de taux de naissance (λ_n) et de taux de mort (μ_n). Les transitions ne vont donc que de n à $n+1$ ou $n-1$. On aura

$$\begin{array}{lll} v_0 & = & \lambda_0 \\ v_i & = & \lambda_i + \mu_i \quad i > 0 \\ p_{0,1} & = & 1 \\ p_{i,i+1} & = & \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad i > 0 \\ p_{i,i-1} & = & \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad i > 0 \; . \end{array}$$

Exemples

1. Processus de Poisson.
$$\mu_n = 0, \lambda_n = \lambda$$
2. Processus de naissance à taux linéaire: chaque individu donne naissance à un autre au taux λ.
$$\mu_n = 0, \lambda_n = n\lambda \; .$$
C'est le processus de *Yule*.
3. Processus de naissance et de mort à taux linéaire. Cette fois chaque individu peut de plus mourir au taux μ.
$$\mu_n = n\lambda, \lambda_n = n\mu$$
On peut montrer que
$$\mathbb{E}[X(t) | X(0) = i] = i\, e^{(\lambda - \mu)t} \; .$$
4. Processus de naissance et de mort à taux linéaire avec immigration.
$$\mu_n = n\mu, \lambda_n = n\lambda + \theta \; .$$

3. Les équations différentielles de Kolmogorov

On pose

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i) \ .$$

Proposition 10 (Equation de Chapman-Kolmogorov) *Pour tout $s > 0$ et tout $t > 0$*

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \ .$$

Proposition 11 . *On a*

$$\begin{array}{lcll} \lim_{h\to 0} \frac{1-p_{ii}(h)}{h} & = & v_i & \forall i \\ \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} & = & q_{ij} & \forall i \neq j \ . \end{array}$$

Théorème 9 (Equations de Kolmogorov)

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} q_{kj} p_{ik}(t) - v_j p_{ij}(t) \quad \forall i, j \ .$$

4. Régime permanent

Supposons qu'il existe une limite

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$$

indépendante de i. A l'aide des équations de Kolmogorov, on obtient les équations

$$\boxed{\pi_j v_j \ = \ \sum_{k\neq j} \pi_k q_{kj} \quad \forall j}$$

Ces équations s'appellent les *équations de balance*. Jointes à la condition

$$\sum_j \pi_j = 1 \ ,$$

elles permettent de calculer les π_j. Si on munit chaque état j de la pondération π_j, on peut interpréter ces équations en disant qu'un *flux entrant* est égal à un *flux sortant*.

Pour un processus de naissance et de mort, les équations de balance deviennent

$$\begin{array}{rcl} \pi_0\lambda_0 & = & \pi_1\mu_1 \\ \pi_1(\lambda_1+\mu_1) & = & \pi_2\mu_2 + \pi_0\lambda_0 \\ \vdots & & \\ \pi_n(\lambda_n+\mu_n) & = & \pi_{n+1}\mu_{n+1} + \pi_{n-1}\lambda_{n-1} \\ \vdots & & \end{array}$$

On en tire les équations

$$\pi_n\lambda_n = \pi_{n+1}\mu_{n+1}, \quad n \geq 0$$

qui s'appellent les *équations de balance locale*. Dans ce cas on calcule facilement les valeurs des π_n:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & = & \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \vdots & & \\ \pi_n & = & \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\pi_0 \\ \vdots & & \end{array}$$

et la condition $\sum \pi_n = 1$ devient

$$\boxed{\pi_0 \quad = \quad \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}}}$$

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une probabilité limite (on parlera dans ce cas d'existence d'un régime permanent) est donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} < \infty$$

et on aura alors pour tout $n \geq 1$

$$\boxed{\pi_n \quad = \quad \frac{\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}}{1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k}}}$$

Exemple
Dans le modèle linéaire avec immigration,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(\lambda+\theta)\ldots((n-1)\lambda+\theta)}{n!\mu^n}$$

et la condition de convergence est $\lambda < \mu$.

Chapitre 4. Files d'attente markoviennes

1. Introduction

Une file d'attente est constituée de *clients* qui passent devant un *guichet* (ou un *serveur*) pour recevoir un *service*. Les clients arrivent les uns après les autres, ils peuvent éventuellement attendre dans un espace particulier (espace d'attente ou file d'attente au sens strict) qu'un serveur soit libre. La règle de service sera généralement FIFO (premier arrivé premier servi). La notation $A/B/s/N$ due à Kendall indique:

- A: la loi interarrivées
- B: la loi du temps de service
- s: le nombre de serveurs
- N: la taille totale du système (serveurs + places en attente)

On supposera que les intervalles interarrivées et les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes. On code par M les lois exponentielles. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux files markoviennes, pour lesquelles A=M et B=M. Le nombre total X_t de clients présents dans le système à l'instant t est alors un processus de naissance et de mort.

2. La file M/M/1

Soit λ (resp. μ) le paramètre de la loi interarrivées (resp. de la loi du service). On a alors affaire à un PNM sur $\mathbb{N}$ avec $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$. Un régime permanent existe si et seulement si $\lambda < \mu$. On pose souvent

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} ,$$

la condition devient donc $\boxed{\rho < 1}$ et on vérifie facilement que la probabilité stationnaire est donnée par

$$\pi_n = \rho^n (1-\rho) \quad n \geq 0 .$$

A l'équilibre,

$$L = \mathbb{E}[X_t] = \sum_{n \geq 0} n \rho^n (1-\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} .$$

Soit U le temps passé par un client dans le système à l'équilibre. S'il arrive et trouve n clients présents, il devra attendre $n+1$ variables aléatoires $\mathcal{E}(\mu)$ avant de s'en aller, d'où

$$\mathbb{P}(U > t) = \sum_{n \geq 0} \pi_n \int_t^\infty \mu \frac{(\mu s)^n}{n!} e^{-\mu s} ds = e^{-(\mu - \lambda)t} .$$

Ainsi U suit la loi $\mathcal{E}(\mu - \lambda)$ et il en résulte que le temps moyen W passé dans le système vaut

$$W = \mathbb{E}[U] = \frac{1}{\mu - \lambda} .$$

Ce résultat est conforme à la formule de Little, valable pour G/G/1.

3. File M/M/s

On a maintenant s guichets. Le nombre de clients présents dans le système suit un PNM avec $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \min(s,n)\mu$. La condition de stationnarité est $\boxed{\rho < s}$.

Proposition 12 . *Pour la file M/M/s,*

1. $\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!(s-\rho)}}$
2. $$\begin{array}{rcll} \pi_n & = & \frac{\rho^n}{n!}\pi_0 & si\ n \leq s \\ & = & \frac{\rho^n}{s!s^{n-s}}\pi_0 & si\ n \geq s \end{array}$$
3. *le nombre moyen de serveurs occupés est* ρ
4. $L = \rho + \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}\pi_0$
5. $L = \lambda W$.

Preuve.
3. Soit S le nombre moyen de serveurs occupés. On a

$$\begin{array}{rcl} S & = & \sum_{n=1}^{\infty} min(s,n)\pi_n \\ & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mu}\pi_n \\ & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu}\pi_{n-1} \\ & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu}\pi_{n-1} \\ & = & \rho\ . \end{array}$$

4. En séparant en clients en service et clients en attente, on a

$$\begin{array}{rcl} L & = & \rho + \sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)\pi_n \\ & = & \rho + \pi_0\frac{\rho^s}{s!}\sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)(\frac{\rho}{s})^{n-s} \\ & = & \rho + \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}\pi_0\ . \end{array}$$

4. La file M/M/∞

On a $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n\mu$, et il y a toujours un régime permanent.

Proposition 13 *Pour la file M/M/∞,*

$$\begin{array}{rcll} \pi_n & = & \frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho} & n \geq 0 \\ L & = & \rho & \\ W & = & \frac{1}{\mu} & \end{array}$$

5. La file M/M/1/N

Il y a un serveur et N-1 places dans l'espace d'attente. L'espace des états est $E = \{0, \ldots, N\}$ et $\lambda_n = \lambda$ si $0 \leq n < N$, $\mu_n = \mu$ si $0 < n \leq N$. Il existe toujours un régime permanent.

Proposition 14 *Pour la file M/M/1/N,*

$$\pi_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^n\ si\ \rho \neq 1, \qquad \pi_n = \frac{1}{N+1}\ si\ \rho = 1.$$

6. La file M/M/s/s

Il s'agit d'une file avec rejet. Si tous les serveurs sont occupés, le nouveau client quitte le système sans se faire servir. L'espace des états est $E = \{0, \ldots, ..., s\}$, on a $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = n\mu$. Il y a toujours un régime permanent.

Proposition 15 *Pour la file M/M/s/s,*

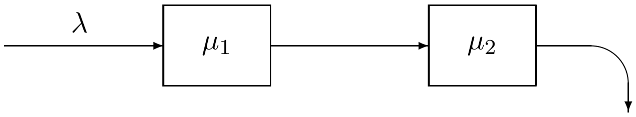
$$\pi_n = \frac{\rho^n/n!}{\sum_{k=0}^{s} \rho^k/k!}$$

On en déduit en particulier la *formule d'Erlang*: la probabilité qu'un nouveau client soit rejeté est

$$\pi_s = \frac{\rho^s/s!}{\sum_{k=0}^{s} \rho^k/k!}$$

7. Files en tandem

On considère un système composé de deux stations d'un serveur chacune qui servent successivement les clients arrivant dans la station 1. Une fois le client servi dans la station 1, il se dirige immédiatement dans la station 2 où il attend d'être servi. Ensuite il quitte le système.



Soient X_t le nombre de clients présents dans la première station, Y_t le nombre de clients présents dans la deuxième. En régime permanent, les sorties de la première station forment un processus de Poisson de taux λ, donc les deux files d'attente dans les deux stations sont du type M/M/1 avec même taux d'arrivée. Il est alors élémentaire de vérifier

$$\begin{array}{lcccc} L & = & \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[Y_t] & = & \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \\ W & = & \frac{1}{\mu_1-\lambda} + \frac{1}{\mu_2-\lambda} & = & \frac{L}{\lambda} \end{array}$$

Chapitre 5. Réseaux markoviens

1. Réseaux de Jackson

On considère un système de k stations de service en réseau entre lesquels des clients évoluent. Chaque station i est munie d'un serveur unique dont le taux de service est μ_i. Les clients arrivent de l'extérieur à chaque station i suivant des processus de Poisson indépendants de taux α_i. Une fois son service effectué à la station i, un client quitte le réseau avec la probabilité β_i ou va à la station j avec la probabilité p_{ij}, de sorte que

$$\beta_i + \sum_{j \neq i} p_{ij} = 1 \ .$$

Soit $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^k)$ le vecteur du nombre de clients présents dans les diverses stations à l'instant t. On suppose qu'il existe un régime permanent. Dans ce cas, le nombre moyen par unité de temps de clients qui entrent dans la station i est égal au nombre moyen par unité de temps de clients qui en sortent. Soit λ_i cette valeur commune. On obtient de cette façon les *équations du trafic*

$$\alpha_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j p_{ji} = \lambda_i \qquad i = 1, \ldots, k \ .$$

2. Les réseaux ouverts

Dans un réseau ouvert, il y a des arrivées de l'extérieur, donc l'un au moins des paramètres α_i est strictement positif. Pour qu'il y ait un régime permanent, il est nécessaire qu'il y ait aussi des sorties du système, donc l'un au moins des β_i est strictement positif; le taux total d'entrée est égal au taux total de sortie, donc

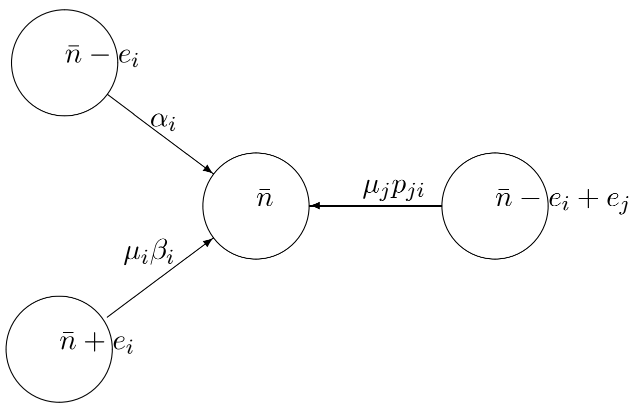
$$\sum_i \alpha_i = \sum_i \lambda_i \beta_i \ .$$

Chaque station fonctionne comme une file M/M/1 avec comme taux d'entrée λ_i et comme taux de service μ_i. L'existence d'un régime permanent nécessite que $\lambda_i < \mu_i$ pour tout i. On pose comme d'habitude $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ et on cherche à évaluer la loi stationnaire de X_t sur $\mathbb{N}^k$.

Proposition 16 *On suppose le réseau irréductible, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun sous-réseau strict. Il existe alors une unique probabilité stationnaire sur $\mathbb{N}^k$ définie par*

$$\pi_{\bar{n}} = \prod_{i=1}^{k} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i} \qquad \text{pour } \bar{n} = (n_1, \ldots, n_k) \ .$$

Preuve. Pour tout i on note $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ le i-ème vecteur de base. Soit l'état $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_k)$. Si elles sont possibles, on a les transitions suivantes:



Vérifions que la probabilité proposée est invariante.
Flux quittant l'état $\bar{n}$:

$$\pi_{\bar{n}}(\sum_i \alpha_i + \sum_i \mu_i \mathbf{1}_{\{n_i>0\}}) \; .$$

Flux arrivant à l'état $\bar{n}$:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_i \pi_{\bar{n}-e_i}\alpha_i \mathbf{1}_{\{n_i>0\}} + \sum_i \pi_{\bar{n}+e_i}\mu_i\beta_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \pi_{\bar{n}+e_j-e_i}\mu_j p_{ji}\mathbf{1}\{n_i>0\} \\
&= \pi_{\bar{n}}(\textstyle\sum \frac{\alpha_i}{\rho_i}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}} + \sum_i \rho_i\mu_i\beta_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \frac{\rho_j}{\rho_i}\mu_j p_{ji}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}}) \\
&= \pi_{\bar{n}}(\textstyle\sum \frac{\alpha_i}{\rho_i}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}} + \sum_i \alpha_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \frac{\lambda_j}{\rho_i} p_{ji}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}}) \\
&= \pi_{\bar{n}}(\textstyle\sum \frac{\alpha_i}{\rho_i}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}} + \sum_i \alpha_i + \sum_i \frac{\lambda_i-\alpha_i}{\rho_i}\mathbf{1}_{\{n_i>0\}}) \\
&= \pi_{\bar{n}}(\textstyle\sum_i \alpha_i + \sum_i \mu_i\mathbf{1}_{\{n_i>0\}}) \; .
\end{aligned}$$

Si l'on retourne cette chaîne de Markov à temps continu, on obtient un nouveau réseau de Jackson ouvert où les taux d'entrée sont maintenant $\lambda_i\beta_i$.

Proposition 17 *Le nombre moyen de clients présents dans le système est:*

$$L = \sum_i \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$$

et le temps moyen de séjour dans le réseau est

$$W = \frac{L}{\sum_i \alpha_i} \; .$$

3. Les réseaux fermés

Il n'y a ni arrivées ni départs, donc $\alpha_i = \beta_i = 0$ pour tout i. Le nombre des clients est une constante N et l'espace d'états est

$$E_N = \{\bar{n} \in \mathbb{N}^k : \sum_i n_i = N\}$$

Les équations du trafic deviennent homogènes, elles ne permettent de trouver les taux de trafic λ_i qu'à une constante multiplicative près.

Proposition 18 *Pour toute solution (l_i) du système homogène des équations du trafic, la probabilité donnée par:*

$$\pi_{\bar{n}} = C^{-1}\prod_i (l_i/\mu_i)^{n_i}$$

où

$$C = \sum_{\bar{n}\in E_N} \prod_i (l_i/\mu_i)^{n_i}$$

est l'unique probabilité stationnaire.

La preuve est identique à celle des réseaux ouverts, en plus simple. On vérifie facilement que cette probabilité ne dépend pas du choix de la solution particulière des équations du trafic car si $l'_i = al_i$, alors

$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_i (l'_i/\mu_i)^{n_i} &= a^{\sum_i n_i}\textstyle\prod_i (l_i/\mu_i)^{n_i} \\
&= a^N \textstyle\prod_i (l_i/\mu_i)^{n_i} \; .
\end{aligned}$$