

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - Grenoble I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Spécialité : "Mathématiques Appliquées"

préparée au laboratoire Jean Kuntzmann

dans le cadre de l'**École Doctorale**

"**Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**"

présentée et soutenue publiquement le 30 Novembre 2007

par

Carine LUCAS

**Effets de petites échelles, du tenseur des contraintes,
des conditions au fond et à la surface
sur les équations de Saint-Venant.**

Directeurs de thèse :

Didier BRESCH, Christine KAZANTSEV

JURY

| | | | |
|-----|---------------------|---------------------------------|------------------------|
| M. | Stéphane LABBÉ | PR, Université Joseph Fourier | Président |
| M. | Émmanuel FRÉNOD | PR, Université de Bretagne Sud | Rapporteur |
| M. | Daniel LE ROUX | PR, Université de Laval, Québec | Rapporteur |
| M. | Mohamed NAAIM | DR, Cemagref de Grenoble | Examinateur |
| M. | Didier BRESCH | DR, Université de Savoie | Directeur de thèse |
| Mme | Christine KAZANTSEV | MCF, Université Joseph Fourier | Co-directrice de thèse |

Remerciements.

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement Didier BRESCH et Christine KAZANTSEV d'avoir encadré cette thèse. Plus particulièrement, merci à Didier de m'avoir montré qu'il est possible de travailler différemment en menant plusieurs batailles de front, de m'avoir incitée à viser toujours plus haut et de m'avoir permis de collaborer avec d'autres personnes ; merci à Christine pour son aide précieuse, notamment lorsque j'ai dû apprivoiser le Fortran.

Un grand merci également à Antoine ROUSSEAU qui m'a énormément apporté tout au long de cette dernière année. J'ai vraiment apprécié la façon dont s'est déroulée notre collaboration, et j'espère que nous aurons encore l'occasion de travailler ensemble.

Je souhaite aussi remercier Emmanuel FRÉNOD et Daniel LE ROUX d'avoir rapporté cette thèse et, par leurs commentaires, de m'avoir aidée à l'améliorer. Merci également à Stéphane LABBÉ d'avoir présidé ce jury et à Mohamed NAAIM d'avoir accepté d'en faire partie.

Merci à tous ceux de la tour IRMA avec qui j'ai partagé ces années, aussi bien les membres de l'équipe MOISE, où il règne une très bonne ambiance, que les doctorants du labo. Je pense en particulier à ceux qui sont partis depuis plusieurs mois maintenant, Aude, Basile, Claire, Julie, Laurent, Olivier-s, ceux qui sont sur la fin, Irène, Yann, Claire-s, sans oublier "la salle 3" (au sens large), Céline, Morgan, Marc, Elise, Cyril, William, Ehouarn, Florian, ainsi que celles qui étaient déjà à mes côtés sur les bancs de l'Institut Fourier, Claire et Nath. Je rajoute Jean à cette liste, même si le LAMA n'est pas tout à fait mon laboratoire !
Une pensée aussi pour Claudine, Imma, Juana et Cathy qui essayent toujours de nous simplifier la vie au maximum.

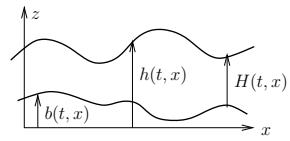
Enfin, un énorme merci à Maman qui m'a toujours soutenue et conseillée, en particulier dans les moments difficiles, et qui a même accepté de partir à la recherche des fautes d'orthographe de ce manuscrit ! Merci aussi à mon p'tit frère pour les moments passés au téléphone ... c'est justement à toi Jean-Michel que je laisse la plume, plume que tu avais prise quelques jours après un rapide passage en salle 3 : cherchez bien, tous les détails y sont !



SOUTENIR UNE THESE ...

Table des notations

| | |
|---------------------------|---|
| \mathcal{D} | domaine considéré, |
| $h(t, x)$ | surface libre, |
| $b(x)$ ou $b(t, x)$ | topographie, |
| $H(t, x)$ | hauteur de la colonne de fluide $H(t, x) = h(t, x) - b(t, x)$, |
| $U = (u, w)$ | vitesse, avec u la composante horizontale, w la composante verticale, |
| ψ | fonction courant, définie par $u = \nabla^\perp \psi$, |
| $D(U)$ | partie symétrique du gradient de vitesse, tenseur des déformations, |
| $W(U)$ | partie anti-symétrique du gradient de vitesse, |
| (e_1, e_2, e_3) | base canonique, |
| (v_1, v_2, v_3) | composantes du vecteur v dans la base canonique, |
| \bar{v} | moyenne verticale du vecteur v sur la hauteur du fluide, |
| V^\perp | vecteur orthogonal au vecteur V |
| | si $V = (V_1, V_2)$, alors $V^\perp = (-V_2, V_1)$, |
| σ | tenseur total des contraintes, |
| σ | tenseur des contraintes supplémentaires, |
| τ | tenseur de cisaillement, |
| Ω | vitesse de rotation de la Terre, |
| θ | latitude, |
| g | constante universelle de gravitation, |
| a | coefficient de capillarité, |
| A | coefficient de capillarité non-dimensionnel, |
| κ | courbure moyenne, |
| $k = 1/\ell$ | coefficient de frottement, |
| K | coefficient de frottement non-dimensionnel, |
| k_t | coefficient de frottement turbulent, |
| K_t | coefficient de frottement turbulent non-dimensionnel, |
| p | pression, |
| μ, λ | viscosités, |
| ν | viscosité non-dimensionnelle, |
| ε | rapport des échelles caractéristiques du fluide, |
| Ro | nombre de Rossby (voir définition page 15), |
| Fr | nombre de Froude, |
| $F = Fr^2/Ro^2$ | coefficient qui lie les nombres de Froude et de Rossby, |
| $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ | nombres d'onde, |
| $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$ | |
| ω, W | pulsations, |



| | |
|---------------------|---|
| λ | temps de relaxation, |
| G | taux de plasticité, |
| r | rapport entre l'élasticité et la viscosité, |
| $q = Hu$ | débit, |
| ϵ, η | petits paramètres, |
| $X = x/\epsilon$ | variable rapide en espace, |
| $\chi = \epsilon x$ | variable lente en espace, |
| \hat{f} | transformée de Fourier de la fonction f , |
| $J(f, g)$ | jacobien des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, $J(f, g) = \partial_{x_1} f \partial_{x_2} g - \partial_{x_2} f \partial_{x_1} g$, |
| \mathcal{D}' | espace des distributions. |

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| I Les équations de Saint-Venant : modèles et propriétés mathématiques | 11 |
| 1 L'équation de Saint-Venant visqueuse 2D avec effet cosinus | 13 |
| 1.1 Obtention de l'équation de Saint-Venant visqueuse | 14 |
| 1.1.1 Mise sous forme non-dimensionnelle des équations de Navier-Stokes | 15 |
| 1.1.2 Approximation hydrostatique | 17 |
| 1.1.3 Système de Saint-Venant (ou Shallow-Water) | 19 |
| 1.1.4 Cas de la latitude non constante | 23 |
| 1.2 Existence d'une solution de l'équation de Saint-Venant | 23 |
| 1.2.1 Estimations <i>a priori</i> | 24 |
| 1.2.2 Convergence et compacité | 29 |
| 1.2.3 Fin de la preuve | 30 |
| 1.3 Ondes pour les fluides tournants | 30 |
| 1.3.1 Conservation de la vorticité potentielle | 31 |
| 1.3.2 Modèle linéarisé et ondes de Poincaré | 32 |
| 1.3.3 Ondes équatoriales | 34 |
| 2 Effets des conditions au fond et à la surface | 37 |
| 2.1 Choix des conditions au fond | 38 |
| 2.1.1 Condition de non-glissement $\ell = 0$ | 38 |
| 2.1.2 Condition au bord de type Navier $\ell \neq 0$ | 39 |
| 2.1.3 Influence de ces conditions au fond sur le modèle de Saint-Venant | 39 |
| 2.2 Un modèle avec évaporation en surface | 45 |
| 2.2.1 Système de Saint-Venant avec évaporation au premier ordre | 46 |
| 2.2.2 Système de Saint-Venant avec évaporation au second ordre | 46 |
| 3 Effets du tenseur des contraintes : exemple de la loi d'Oldroyd B | 49 |
| 3.1 Obtention du modèle | 50 |
| 3.1.1 Mise sous forme non dimensionnelle des équations de Navier-Stokes | 50 |
| 3.1.2 Approximation hydrostatique | 51 |
| 3.1.3 Système de Saint-Venant | 52 |
| 3.2 Propriétés mathématiques de ce système | 55 |
| 3.2.1 Cas où α est le vecteur nul | 56 |
| 3.2.2 Cas où α est un vecteur non nul | 56 |

| | |
|---|------------|
| 4 Echelles multiples autour des équations de Saint-Venant | 59 |
| 4.1 Introduction aux développements multi-échelles | 60 |
| 4.2 Différents régimes pour les équations de Saint-Venant | 61 |
| 4.3 Développement multi-échelles en espace avec une variable lente | 62 |
| 4.4 Cas où la topographie est une fonction oscillante | 63 |
| 4.4.1 Système de Saint-Venant faiblement non-linéaire | 64 |
| 4.4.2 Système de Saint-Venant non linéaire | 66 |
| 4.4.3 Système de Saint-Venant avec viscosité d'ordre 1 | 66 |
| 4.4.4 Cas d'une viscosité de l'ordre du nombre de Froude | 68 |
| 5 Propriétés de modèles de type Saint-Venant | 71 |
| 5.1 Un modèle de Saint-Venant couplé à une formule de sédimentation | 72 |
| 5.1.1 Inégalités d'énergie et estimations <i>a priori</i> | 73 |
| 5.1.2 Théorème de convergence | 76 |
| 5.1.3 Résultats numériques | 80 |
| 5.2 Fluides de Bingham | 85 |
| 5.2.1 Présentation du modèle | 85 |
| 5.2.2 Propriétés énergétiques | 88 |
| II Équations Quasi-Géostrophiques et équation des lacs | 97 |
| 6 Modèle de Saint-Venant Quasi-Géostrophique en deux dimensions | 99 |
| 6.1 Obtention des équations de Saint-Venant Quasi-Géostrophiques 2D | 100 |
| 6.2 Commentaires et propriétés mathématiques | 103 |
| 6.2.1 Un premier commentaire | 103 |
| 6.2.2 Un second commentaire | 104 |
| 6.2.3 Propriétés mathématiques | 104 |
| 6.3 Etude numérique de l'effet cosinus | 107 |
| 6.3.1 Méthodologie | 107 |
| 6.3.2 Résultats obtenus | 110 |
| 7 Une méthode d'approximation multi-échelles | 117 |
| 7.1 Résultats théoriques | 118 |
| 7.1.1 Estimations <i>a priori</i> | 118 |
| 7.1.2 Existence et unicité de la solution à ϵ fixé | 119 |
| 7.2 Une méthode d'approximation | 124 |
| 7.2.1 Construction | 125 |
| 7.2.2 Existence | 126 |
| 7.2.3 Convergence quand ϵ tend vers 0 | 128 |
| 7.3 Premiers résultats numériques | 129 |
| 7.3.1 Le programme | 130 |
| 7.3.2 Résultats obtenus en stationnaire | 131 |
| 7.4 Dépendance en temps | 132 |
| 7.5 Modification du correcteur | 133 |
| 7.5.1 Support du correcteur | 133 |
| 7.5.2 Validation de la méthode | 133 |

| | | |
|-----------------------------------|--|------------|
| 7.6 | Solutions du problème linéaire simplifié | 135 |
| 8 | Influence de la topographie dans les équations Quasi-Géostrophiques | 137 |
| 8.1 | Equation simplifiée avec la topographie | 138 |
| 8.1.1 | Résultats théoriques | 138 |
| 8.1.2 | Un premier cas : fond à l'ordre principal | 139 |
| 8.1.3 | Une seconde étude : fond d'ordre ϵ^{-1} | 151 |
| 8.2 | Passage en deux dimensions | 157 |
| 8.2.1 | Développement asymptotique | 157 |
| 8.2.2 | Programmes et résultats | 160 |
| 8.2.3 | Comparaisons et analyse | 165 |
| 8.3 | Equation Quasi-Géostrophique | 167 |
| 8.3.1 | Dépendance en temps | 167 |
| 8.3.2 | Terme de frottement de fond | 167 |
| 9 | Quelques mots sur l'équation des lacs | 169 |
| 9.1 | Obtention du modèle | 170 |
| 9.1.1 | Modèle complet avec viscosité | 170 |
| 9.1.2 | Formulation courant-vorticité pour un modèle simplifié | 171 |
| 9.2 | Existence d'une solution de l'équation des lacs | 172 |
| 9.2.1 | Cas où H^0 reste strictement positif | 173 |
| 9.2.2 | Cas où H^0 s'annule | 174 |
| Conclusion et perspectives | | 177 |
| Bibliographie | | 179 |

Introduction.

Nowadays, the understanding of meteorological phenomena constitutes a major challenge for the planet. It has markedly evolved thanks to developments in computing, and to the obtention of new models. One of the key points of this science relies on the narrow and mutual relation that exists between the movements of the atmosphere and the ones of the oceans. Even if they seem different in appearance, these two geophysical fluids can be represented with an identical model regarding their common properties. As a matter of fact, they are both submitted to the rotation of the Earth around its axis, which creates a centrifugal force, generally regrouped with the gravity, and the Coriolis force. Thus we are in presence of what we call rotating fluids. This is the general context of this manuscript.

The objective of this work is to consider the effects of small scales that are involved in the models, the stress tensor and the boundary conditions (at the surface and at the bottom) on Shallow-Water type systems. We also show the influence of these parameters on the limit equations that can be deduced from the Shallow-Water equations.

1 General description

This Ph.D. is composed of two parts: the first one, which corresponds to Chapters 1 to 5, deals with the Shallow-Water system and the second one, from Chapter 6 to 9, is interested in its limit equations, particularly to the Quasi-Geostrophic equations.

1.1 First part: the Shallow-Water equations.

The first part of this Ph.D. is dedicated to the Shallow-Water equations, or Saint-Venant equations. Introduced in 1871 by Adhémar Barré de SAINT-VENANT (see [62]), they are still of great importance in maritime or fluvial hydrodynamics today. For example, they are used for the protection of the environment, the tide computing and storm waves, the impact and the stability of construction works, the sedimentation or the study of flood. They can also describe the horizontal movements of the atmosphere, or more generally of all fluid submitted to the gravity in a rotating domain.

These equations are obtained from the Navier-Stokes equations. It is necessary to consider a domain where the deepness is small compared to the horizontal dimensions. Then we integrate the equations over the water height, since the variable of the final form is the mean velocity. In the initial one-dimensional version, this system of equations describes the flow of water in a rectangular channel with flat bottom by means of the water height $H(t, x) \geq 0$

and the mean velocity $u(t, x)$:

$$\begin{aligned}\partial_t H + \partial_x(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \partial_x\left(Hu^2 + \frac{gH^2}{2}\right) &= 0,\end{aligned}$$

where g is the gravity. It is also possible to take into account the variations of topography, bottom drag terms, source terms such as the wind at the surface. Concerning the viscous terms, their contribution was often added *a posteriori*. However, J.-F. GERBEAU and B. PERTHAME obtained a one-dimensional Shallow-Water model with viscosity in [34]. This leads to the addition, in the second equation, of the term:

$$4\mu\partial_x(H\partial_x u)$$

in the right hand side, where μ symbolizes the fluid viscosity. Moreover, as they consider a Navier condition at the bottom that reads ku (where k is the friction coefficient), a new drag term appears, which is not $-ku$ anymore but:

$$\frac{-ku}{1 + \frac{kH}{3\mu}}.$$

After them, in [52], F. MARCHE generalized this system to the bi-dimensional case, from the three-dimensional Navier-Stokes equations. He takes into account the viscosity, linear or quadratic drag terms on the bottom, the variability of the topography and surface tension. Equally, he keeps the first order of the Coriolis force, that is the part that depends on the *sine* of the latitude, but neglects the *cosine* part.

In this work, we show that the viscous terms are of the same order of size as the *cosine* part of the Coriolis force. Thus the latter has to be considered in its entirety along the computations. Then we obtain the following Shallow-Water system:

$$\partial_t H + \operatorname{div}_x(Hu) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(Hu) + \operatorname{div}_x(Hu \otimes u) + \frac{g}{2}\nabla_x H^2 &= \\ -\alpha_0(H)u - \alpha_1(H)Hu|u| + aH\nabla_x\Delta_x H + 2\mu\nabla_x(H\operatorname{div}_x u) + 2\mu\operatorname{div}_x(HD_x u) &= \\ +\Omega \cos \theta \nabla_x(u_1 H^2) + \Omega \cos \theta H^2 e_1 \operatorname{div}_x u - 2\Omega \sin \theta Hu^\perp &= \\ -2\Omega \cos \theta H e_1 \nabla_x b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla_x b + aH\nabla_x\Delta_x b - gH \nabla_x b, &= \end{aligned} \tag{2}$$

where

$$\begin{aligned}\alpha_0(H) &= \frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}} \quad \text{is the laminar friction term and} \\ \alpha_1(H) &= \frac{k_t}{\left(1 + \frac{kH}{3\mu}\right)^2} \quad \text{represents the quadratic drag term.}\end{aligned}$$

In these equations, b symbolizes the topography, θ the latitude and a is the capillary coefficient, that enables us to express the surface tension. We also denote by e_1 the vector ${}^t(1, 0)$. We can remark that having two space dimensions splits up the viscous terms into two terms. Lastly, as we emphasized it before, we obtain new terms, in bold in the above equations, due to taking into consideration the *cosine* part of the Coriolis force. More complete than the previous ones, this model will be studied in details in the following.

To represent in a better way the reality, some people have been interested in the stratification, which means that one consider the fluid to be the superposition of several horizontal layers. This has been studied by E. AUDUSSE in [5] for example, imposing a different kinematic condition between each layer. Then we obtain a Shallow-Water system for each layer, coupled to the upper layer and the lower by this condition.

From a mathematical point of view, without going into details for the moment, we can remark that the equation that governs the water height is a transport equation and the momentum equation is degenerated.

The contribution of this work, beyond the analysis of this cosine effect (Chapter 1), is to study the influence of the conditions at the bottom and at the surface (Chapter 2), of the use of multi-scales schemes (Chapter 4) for newtonian fluids. We also tackle (in Chapter 3) the case of some non-newtonian fluids. Finally, we propose (Chapter 5) theoretical and numerical results on a new sedimentation model with viscosity.

1.2 Second part: the Quasi-Geostrophic equations and the lakes equation.

In a second part, we are interested in the limit equations of the Shallow-Water system, and principally to the Quasi-Geostrophic equations. This theory is recent: it has been introduced in 1947 by the american meteorologist Jules G. CHARNEY. The following year, the simplification of the resulting equations allowed Charney and his colleagues R. FJÖRTOFT, J. SMAGORINSKY and J. VON NEUMAN to realize the first numerical integration of the equations of the atmosphere. This historical computation was the starting point for the numerical simulation which is nowadays the basis of the meteorology and the oceanography. The quasi-geostrophic approximation still remains a very powerful theoretical tool for interpreting the numerical results and understanding phenomena. As underlined in [12], the Quasi-Geostrophic equations are widely used in oceanography for the mid-latitude models.

This formulation relies on the assumption that the Froude and the Rossby numbers are small non-dimensional numbers. The Froude number (Fr) characterizes the relative importance of the inertial and gravity forces. In the case of rotating fluids, the Rossby number (Ro) represents the ratio of the inertial forces and the forces due to the rotation of the domain. We also perform the β -plane approximation, which means that we develop the Coriolis term around a fixed latitude. Thus we write the Shallow-Water equations with the different assumptions listed before and get the Quasi-Geostrophic equations. In the viscous case, without the *cosine* term, the usual form of the Quasi-Geostrophic equation is the following:

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) (\Delta \psi - F\psi + b + \beta x_2) = -\alpha_0 \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + \text{curl } f, \quad (3)$$

where b represents the topography, α_0 the friction term, μ the viscosity and f a source term, such as the wind. The stream function ψ is linked to the velocity as follows:

$$u(t, x) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \psi(t, x) \\ \partial_{x_1} \psi(t, x) \end{pmatrix}.$$

The existence of solutions for such equations has been proved in [6]. The demonstration of the convergence of the viscous Shallow-Water system to Equation (3) has been performed in [15]. Note that it is also possible to obtain the Quasi-Geostrophic equations from the Navier-Stokes system (the computation is detailed in [28]), but there are only mathematical results with the rigid lid assumption (see for example [55], [37]).

Here we are interested in the Quasi-Geostrophic Shallow-Water equations (3) and to the limit, for small Rossby and Froude numbers, of the viscous Shallow-Water system with a complete Coriolis force (1)-(2). It produces a new model that reads:

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) ((\Delta + \delta \partial_{x_2}^2) \psi - F\psi + (1 - C \partial_{x_2}) b + \beta x_2) = -\alpha_0 \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + \operatorname{curl} f, \quad (4)$$

where the coefficients δ and C can be expressed as functions of the *cosine* of the mean latitude.

The results developed in this part first show (Chapter 6) the influence of these new terms in a theoretical and mathematical point of view. Then we propose (Chapters 7 and 8) a multi-scale approach for the resolution of Equation (3). The last chapter is dedicated to another limit equation obtained from the Shallow-Water system with a complete Coriolis force: the lakes equation, that also includes new terms in *cosine*.

2 Presentation of the chapters.

After the presentation of the two main themes of this Ph.D., we detail below the content of each of the 9 chapters which compose it.

First, in **Chapter 1**, we explain the obtention of the viscous Shallow-Water system (1)-(2). To do this, we consider the tri-dimensional Navier-Stokes equations:

$$\begin{aligned} \partial_t U + \operatorname{div}(U \otimes U) &= \operatorname{div} \sigma - 2\Omega \times U + f, \\ \operatorname{div} U &= 0, \end{aligned}$$

in a domain with a small deepness and a variable topography $b(x)$. In these equations, $U = (u, w)$ is the fluid velocity, σ the total stress tensor, $2\Omega \times U$ symbolizes the Coriolis force and f the gravity force. We use a Navier type condition at the bottom, and add a quadratic drag term. Thus we write:

$$(\sigma n)_{\tan} = k U_{\tan} + k_t H |U| U_{\tan}$$

where n is the normal at the bottom. We denote by h the surface of the fluid, that is h is the sum of the fluid height H and of the bottom height b . At the surface, we take into account the capillarity through the formula $\sigma n = a \kappa n$ (κ is the curvature and a the surface tension coefficient) and we impose the usual kinematic condition that reads $\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w$. As the domain is a thin domain, we introduce a small parameter ε which represents the aspect ratio, ratio between the characteristic height and the characteristic length. Following the classical method of asymptotic developments, we develop our variables according to this small parameter. Then we study the different orders of the Navier-Stokes equations with the hydrostatic approximation. The first order gives us a generalization of the system proposed by A. J.-C. de SAINT-VENANT to two dimensions, with the first order of the Coriolis force. However, as it has been done by J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME, we have to go to the second order to see the trace of the viscosity. At this moment, we remark that the first order drag term must be changed: on the one hand, the laminar friction term becomes equal to $\alpha_0(H)$, and on the other hand, we see the turbulent drag term. Moreover, the Coriolis force has a new contribution, related to the *cosine* of the latitude: it gives a new system (1)-(2) for which we set up some properties. First, we bend over the existence of global weak solutions. For

this, we use a mathematical entropy proposed by D. BRESCH et B. DESJARDINS in [15], [18] and extended in [16], which consists in multiplying the momentum equation not by u which gives the classical energy, but by $\mu \nabla \ln H$. To get this result, it is necessary to slightly modify the viscous terms, keeping only those in $\operatorname{div}(H D(u))$. Thus we follow the same steps as [54]; however, we cannot directly assert that $\sqrt{H} \nabla u$ is bounded. A precise study of each new term is indispensable to conclude about the existence of global weak solutions in the presence of capillarity. Finally, in the last part, we consider waves for rotating fluids: we show how the *cosine* part of the Coriolis force modifies Poincaré waves and equatorial waves (Kelvin waves and mixed Rossby-gravity waves). This new term is far from anecdotal, as we will see on an example.

In **Chapter 2** we discuss the conditions at the surface and at the bottom of our domain. At the bottom, two possibilities are generally evoked: the Navier condition,

$$(\sigma n)_{\tan} = k U_{\tan},$$

used to get the model (1)-(2), with the friction coefficient k , and the no-slip condition, $u = 0$. The latter, that is considered as an unquestionable condition by some people, stipulates that the horizontal velocity is zero, just as the vertical velocity. Then we are interested in the influence of the choice of the bottom condition on the obtention of the Shallow-Water system, detailing the model with the no-slip assumption. It has been studied by J.-P. VILA in [69], for an inclined flat bottom. For an horizontal flat bottom, we are led to add a source term in order to have a non trivial solution. The methodology is exactly the same as the one introduced above (asymptotic developments and study of the different orders). However, this choice of boundary condition constrains us to compute the velocity at the second order to get the Shallow-Water system at the first order. As a matter of fact, we need an approximation at the order ε of the term (linked to the no-slip condition):

$$\frac{\mu_0}{\varepsilon} \partial_z u|_{z=0},$$

that is to say $\partial_z u|_{z=0}$ at order ε^2 . We detail the computations for a source term which is constant in space and time, and then give the model when the source term depends on the horizontal variables.

After bending over the bottom conditions, we consider the surface conditions. We chose to take into account the evaporation, as it has been done in the case of a drop (see [23]). We propose here a Shallow-Water system with an evaporation term that we do not precise. This term is a complex function and differs a lot from an application to another. The contribution of this element is visible through a term, of the same type as the ones of friction. Moreover, in the same way that the viscosity modified the system obtain by J.-F. GERBEAU and B. PERTHAME, the evaporation also has an influence on the expression of the coefficients α_0 and α_1 .

After letting the bottom and the surface conditions vary, we study the influence of the stress tensor in **Chapter 3**. The model (1)-(2) supposes that the stress tensor is the classical Cauchy tensor. However, numerous fluids are not newtonian and their constitutive laws do not satisfy this limitation. Here we study the case of the Oldroyd B law, which characterizes some visco-elastic fluids. This law is given by

$$\sigma = -p Id + \tau = -p Id + 2\mu(1-r) \frac{\nabla U + {}^t \nabla U}{2} + \boldsymbol{\sigma},$$

where r represents the ratio between the elasticity and the viscosity. The stress tensor is not explicitly given, it is a function of the extra-stress tensor σ which is also solution of the differential equation

$$\lambda(\partial_t \sigma + U \cdot \nabla \sigma + g_\alpha(\nabla U, \sigma)) + F(\sigma)\sigma = 2\mu r \frac{\nabla U + {}^t \nabla U}{2}.$$

Thus we are led to combine carefully this equation and the Navier-Stokes equations to propose a new Shallow-Water system that corresponds to this law, with a certain choice of parameters. In the final model for a flat bottom ($h = H$), only one new term remains, term that depends on the ratio r as follows:

$$\frac{k}{1 + \frac{k}{3\mu}h} \frac{r}{6\varepsilon} h^2 \nabla \operatorname{div} u.$$

We also study mathematical properties of this system, or more precisely of the linearized one. In the spirit of [61], we face an eigenvalues problem, for which the asymptotic behavior enables us to give conditions such that the system is well-posed. We realize that the choice of the Oldroyd law tends to destabilize the system comparatively to the Cauchy tensor. As a matter of fact, the term related to the ratio r comes in opposition to the viscosity whose regularizing properties are well known. So this term has to remain small compared to the viscosity.

Another approach, detailed in [Chapter 4](#), is to do multi-scale developments on the Shallow-Water equations. They allow the capture of all the variations of the functions, in our case the variations of the topography, introducing new scales: a quick scale, which takes into account the oscillating part of the function, and a slow scale, which represents the main behavior of the curve.

We propose several possible regimes for the Shallow-Water equations with a small Froude number (denoted by ϵ), depending on the topography we consider (oscillating, with slow variations or function of the classical variable). We prove that it is sometimes possible to transform the small variation into a quick variation in time, and we detail two regimes: the one where the bottom is a function of x and ϵx , and the one of an oscillating topography, that depends on x and x/ϵ . In the first case, we manage to get a closed system, without real difficulty. The second one is much more intricate: the first point is to look at the weakly non-linear system associated to this problem, so that the cumbersome terms are shifted of one order and we obtain a closed system. Besides, note that this model is consistent with the results of [19] where the authors study this limit but in two steps, through the lakes equation. Then we explain the problems we have to face in the non-linear case and propose to use the viscous version of the Shallow-Water system to get satisfactory results. We consider two choices of viscosity (of order 1 and of the order of the Froude number), and we prove that, in both cases, we are able to close the system.

Finally, to conclude on the Shallow-Water equations, in [Chapter 5](#) we are interested in the properties of Shallow-Water type models. In [Chapter 1](#), we first worked on the model itself, model that we completed up to here. We also gave mathematical results, obtained thanks to energy and entropy inequalities. Such technics, in particular the BD entropy, can also be applied to other problems of the same type, like a sedimentation model for example.

We propose here a new coupling between a viscous Shallow-Water system and a diffusive equation for the sediment layer, for which we prove a stability theorem.

In addition, we present some numerical simulations of our viscous model: we study the evolution of a conical dune of sand in a channel. On the one hand, we show the influence of the viscous terms on the angle of spread of this dune, and, on the other hand, the possible link between this model and the one proposed by Grass [36], for which the evolution equation for the sediments does not depend on the water height.

In a second part, we study the compressible Bingham system. Bingham fluids are complex materials, whose constitutive law is given by an inequality that can be expressed as:

- when the shear is smaller than a given threshold, the fluid is not deformed,
- if the shear exceeds the threshold, the fluid is deformed.

We prove that such a law gives a Shallow-Water system under the form of an inequality with degenerated viscosities. It is one of the reasons why the problem of the existence of solutions is still under consideration. Then we try to adapt the results for the usual Shallow-Water equations to this compressible Bingham system. A first step carried out here is to prove new estimates with energy and entropy inequalities.

The second part of this work is dedicated to the limit equations that can be deduced from the Shallow-Water equations. **Chapter 6** presents the Quasi-Geostrophic limit of the Shallow-Water system obtained in Chapter 1. Thus we consider the Froude and Rossby numbers as small numbers. We carry out an asymptotic development of the Shallow-Water equations according to the latter small parameter. The resulting model (4) gives two contributions of the latitude *cosine*: first, the laplacian of the vorticity is modified in the North-South direction, and the topography term also has to be changed. Next, we are interested in the well-posedness of the limit equation. In the rectangular case with impermeability and slip conditions on the boundaries, we prove the existence of a unique strong solution thanks to *a priori* estimates.

Then we give some numerical results: our goal is to see whether the Coriolis term has an effective role or not on straightforward examples. We implemented these coefficients in a program that resolves the Quasi-Geostrophic equations (3). We present two series of results, which represent a *double-gyre* circulation in a domain such as the north Atlantic Ocean. At first, we take a flat bottom, which enables us to see the effects of the anisotropy introduced in the laplacian. Then we test a mid-Atlantic type ridge to take into account the contribution of the topography.

In **Chapter 7**, we present a multi-scale approximation method on a simple Quasi-Geostrophic type equation in one dimension:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x) - \partial_x^2 \psi(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi(t, x) &= \frac{1}{\epsilon} f(t, x) && \text{in } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) &= 0 && \forall t \in [0, T] \\ \psi(0, x) &= 0 && \forall x \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

studying the existence of such functions beforehand. For this, we use the classical method of series developments with several spatial scales x and X , fast variable. It allows us to split

our problem into equations on the interior of the domain (equations that do not depend on X) and a system that does not depend on x , which governs the western boundary where we can observe a boundary layer. The first numerical results encourage us to improve this approximation: we show that it is possible to assume the boundary layer terms to be equal to zero outside this area. Therefore we reduce the computation time whereas the result stays close to the theoretical solution.

In the following chapter, **Chapter 8**, we begin by adding a topography term to the equations studied in Chapter 7, term which is a periodic function of the fast variable. Thus we can make use of the methodology presented above, but now the functions on the interior of the domain depend on the two space variables. Moreover, we manage to express the contribution of the topography term, that is we give the expression of the terms we must add to the solution for a flat bottom to get the solution with a varying bottom. In spite of their complexity, we prove that it constitutes a good approximation from a numerical point of view. We also present some results when the topography is not of order one anymore but of order ϵ^{-1} . In these conditions, we cannot carry out the asymptotic development: we are led to achieve changes of variables that depend on the choice of the source term.

We generalize this study to the stationary Quasi-Geostrophic equations in two dimensions. We prove that we can put the previous theory in place, with three space variables in total. Indeed we do not add the fast variable corresponding to y , we consider a bottom of the type $b(X, y)$. Then we obtain the beginning of the series development of the solution for a variable topography. This approach has been numerically validated thanks to a program that solves the Quasi-Geostrophic equations with a finite difference method. In a last part, we pass to the Quasi-Geostrophic equations themselves, with a time evolution and a bottom friction term.

Chapter 9 is dedicated to another type of limit equations: the lakes equations, modified by the terms in *cosine* of the Coriolis force. They constitute the limit for a small Froude number of the Shallow-Water system, without any assumption on the Rossby number. Taking into account the complete Coriolis force has the effect of modifying the vorticity that becomes:

$$\Pi = \frac{1}{H^0} \operatorname{curl} u + \frac{\sin \theta}{Ro} \frac{1}{H^0} + \epsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \frac{\partial_{x_2} H^0}{H^0},$$

but the satisfied equations are the same. Then we adapt the various existing results for the usual lakes equations to this new vorticity. Differentiating the case where the water height vanishes, it enables us to conclude about the existence of solutions to such equations.

Introduction.

De nos jours, la compréhension des phénomènes météorologiques constitue un enjeu majeur pour la planète. Elle a nettement évolué grâce aux progrès de l'informatique, ainsi qu'à l'obtention de nouveaux modèles. Un des points essentiels de cette science repose sur la relation étroite et mutuelle qui existe entre les mouvements de l'atmosphère et ceux des océans. Bien que différents en apparence, ces deux fluides géophysiques peuvent être modélisés de façon identique de par leurs propriétés communes. En effet, ils sont tous deux soumis à la rotation de la Terre autour de son axe, qui crée une force centrifuge, généralement regroupée avec la gravité, et la force de Coriolis. Nous sommes donc en présence de ce que l'on appelle des fluides tournants. Il s'agit là du contexte général de ce manuscrit.

L'objectif de ce travail est de considérer les effets des petites échelles qui entrent en jeu dans les modèles, du tenseur des contraintes ainsi que des conditions aux bords (à la surface et au fond) sur des systèmes de type Saint-Venant. Nous montrons aussi l'influence de ces paramètres sur les équations limites qui se déduisent des équations de Saint-Venant.

1 Description générale.

Cette thèse se décompose en deux parties : la première, qui correspond aux Chapitres 1 à 5, traite du système de Saint-Venant, et la seconde, du Chapitre 6 au Chapitre 9, s'intéresse à ses équations limites, en particulier aux équations Quasi-Géostrophiques.

1.1 Première partie : équations de Saint-Venant.

La première partie de cette thèse est consacrée aux équations de Saint-Venant, ou équations en eaux peu profondes. Introduites en 1871 par Adhémar Barré de SAINT-VENANT (voir [62]), elles sont encore aujourd'hui d'une grande importance en hydrodynamique maritime ou fluviale. Elles sont par exemple utilisées pour la protection de l'environnement, le calcul des marées et des ondes de tempête, l'impact et la stabilité des ouvrages d'art, la sédimentation ou encore l'étude des crues. Elles peuvent également décrire les mouvements horizontaux de l'atmosphère, ou plus généralement de tout fluide soumis à la gravité dans un domaine en rotation.

Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes. Il est nécessaire de se placer dans un domaine où la profondeur est petite par rapport aux dimensions horizontales. Il faut ensuite intégrer les équations sur la hauteur d'eau, puisque la variable qui intervient dans la forme finale est la moyenne de la vitesse. Dans sa version mono-dimensionnelle initiale, ce système d'équations décrit l'écoulement de l'eau dans un canal rectangulaire à fond horizontal,

par l'intermédiaire de la hauteur d'eau $H(t, x) \geq 0$ et de la vitesse moyenne $u(t, x)$:

$$\begin{aligned}\partial_t H + \partial_x(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \partial_x\left(Hu^2 + \frac{gH^2}{2}\right) &= 0,\end{aligned}$$

où g est la gravité. Il est également possible de prendre en compte les variations de topographie, des termes de trainée au fond, des termes source tels que le vent en surface. En ce qui concerne les termes visqueux, ils étaient souvent rajoutés *a posteriori*. Cependant, J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME ont obtenu, dans [34], un modèle de Saint-Venant unidimensionnel avec viscosité. Cela se traduit par l'ajout, dans la seconde équation, du terme :

$$4\mu\partial_x(H\partial_x u)$$

dans le membre de droite, où μ désigne la viscosité du fluide. De plus, comme ils considèrent au fond une condition de Navier de type ku (où k est le coefficient de frottement), ils voient apparaître un nouveau terme de trainée, qui n'est plus de la forme $-ku$ mais qui s'écrit :

$$\frac{-ku}{1 + \frac{kH}{3\mu}}.$$

Par la suite, dans [52], F. MARCHE a généralisé ce système au cas bi-dimensionnel, à partir des équations de Navier-Stokes tri-dimensionnelles. Il tient compte de la viscosité, des termes de frottement de fond (linéaires ou quadratiques), de la variabilité de la topographie et de la tension de surface. Il conserve également le premier ordre de la force de Coriolis, c'est-à-dire la partie qui dépend du *sinus* de la latitude, mais en néglige la partie en *cosinus*.

Dans ce travail, nous montrons que les termes visqueux sont du même ordre de grandeur que la partie en *cosinus* de la force de Coriolis. Celle-ci doit donc être considérée dans son intégralité tout au long des calculs. Nous obtenons alors le système de Saint-Venant suivant :

$$\partial_t H + \operatorname{div}_x(Hu) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(Hu) + \operatorname{div}_x(Hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla_x H^2 &= \\ -\alpha_0(H)u - \alpha_1(H)Hu|u| + aH\nabla_x \Delta_x H + 2\mu \nabla_x(H\operatorname{div}_x u) + 2\mu \operatorname{div}_x(HD_x u) &= \\ +\Omega \cos \theta \nabla_x(u_1 H^2) + \Omega \cos \theta H^2 e_1 \operatorname{div}_x u - 2\Omega \sin \theta Hu^\perp &= \\ -2\Omega \cos \theta H e_1 \nabla_x b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla_x b + aH \nabla_x \Delta_x b - gH \nabla_x b, &= \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\alpha_0(H) = \frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}} \quad \text{est le terme de frottement laminaire et}$$

$$\alpha_1(H) = \frac{k_t}{\left(1 + \frac{kH}{3\mu}\right)^2} \quad \text{représente le terme de trainée quadratique.}$$

Dans ces équations, b désigne la topographie, θ la latitude et a est le coefficient de capillarité, qui permet d'exprimer la tension de surface. Nous notons également e_1 le vecteur ${}^t(1, 0)$. Nous pouvons remarquer que le fait d'avoir deux dimensions d'espace scinde les termes visqueux en deux termes. Enfin, comme nous l'avons souligné auparavant, nous obtenons de nouveaux termes, ceux figurant ci-dessus en gras, dus à la prise en considération de la partie en *cosinus*

de la force de Coriolis. Ce modèle, plus complet que ceux évoqués auparavant, va être étudié en détails dans la suite.

Pour mieux représenter la réalité, certains se sont intéressés à la stratification, ce qui signifie que l'on considère le fluide comme la superposition de plusieurs couches horizontales. C'est ce qu'a étudié par exemple E. AUDUSSE dans [5], en imposant une condition cinématique entre les différentes couches. On obtient alors un système de Saint-Venant pour chaque couche, couplé à la couche supérieure et à la couche inférieure par cette condition.

D'un point de vue mathématique, sans entrer dans les détails pour le moment, nous pouvons remarquer que l'équation qui régit la hauteur est une équation de transport et que l'équation des moments est dégénérée.

La contribution de ce travail, outre l'analyse de cet effet cosinus (Chapitre 1), est d'étudier l'influence des conditions au fond et à la surface (Chapitre 2), de l'utilisation de schémas multi-échelles (Chapitre 4) pour des fluides newtoniens. Nous abordons aussi (au Chapitre 3) le cas de certains fluides non-newtoniens. Enfin nous proposons (Chapitre 5) des résultats théoriques et numériques sur un nouveau modèle de sédimentation avec viscosité.

1.2 Deuxième partie : équations Quasi-Géostrophiques et équation des lacs.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons aux équations limites du système de Saint-Venant, et principalement aux équations Quasi-Géostrophiques. Cette théorie est récente : elle a été introduite en 1947 par le météorologue américain Jules G. CHARNEY. La simplification des équations qui en résulte a permis à Charney et à ses collègues R. FJÖRTOFT, J. SMAGORINSKY et J. VON NEUMAN de réaliser l'année suivante la première intégration numérique des équations de l'atmosphère. Ce calcul historique a ouvert la voie à la simulation numérique qui est maintenant l'outil de base de la météorologie et de l'océanographie. Aujourd'hui encore, l'approximation quasi-géostrophique demeure un outil théorique très puissant pour interpréter les résultats des calculs numériques et comprendre les phénomènes. Comme souligné dans [12], les équations Quasi-Géostrophiques sont largement utilisées en océanographie et météorologie pour la modélisation à moyenne latitude.

Cette formulation repose sur l'hypothèse que le nombre de Froude et le nombre de Rossby sont de petits nombres sans dimension. Le nombre de Froude (Fr) caractérise l'importance relative des forces d'inertie et de gravité. Le nombre de Rossby (Ro), quant à lui, représente, dans le cas des fluides tournants, le rapport entre les forces d'inertie et les forces dues à la rotation du domaine. Nous effectuons également l'approximation du plan β , ce qui signifie que nous développons le terme de Coriolis autour d'une latitude de référence. Nous reprenons donc les équations de Saint-Venant avec les différentes hypothèses énumérées ci-dessus et obtenons les équations Quasi-Géostrophiques. Dans le cas visqueux sans terme en *cosinus*, la forme usuelle des équations Quasi-Géostrophiques est la suivante :

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) (\Delta \psi - F\psi + b + \beta x_2) = -\alpha_0 \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + \text{curl } f, \quad (3)$$

où b représente la topographie, α_0 le terme de frottement, μ la viscosité et f un terme source, le vent par exemple. La fonction ψ , fonction courant, est liée à la vitesse par la relation :

$$u(t, x) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \psi(t, x) \\ \partial_{x_1} \psi(t, x) \end{pmatrix}.$$

L'existence de solutions pour de telles équations a été prouvée dans [6]. La démonstration de la convergence du système de Saint-Venant visqueux vers l'équation (3) a été effectuée dans [15]. Notons qu'il est également possible d'obtenir les équations Quasi-Géostrophiques à partir du système de Navier-Stokes (le calcul est détaillé dans [28]), mais il n'y a de résultats mathématiques qu'avec l'hypothèse du toit rigide (voir par exemple [55], [37]).

Nous nous intéressons ici aux équations de Saint-Venant Quasi-Géostrophiques (3) ainsi qu'à la limite, pour de faibles nombres de Rossby et de Froude, du système de Saint-Venant visqueux avec force de Coriolis complète (1)-(2). Cela produit un nouveau modèle qui s'écrit :

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) ((\Delta + \delta \partial_{x_2}^2) \psi - F\psi + (1 - \mathbf{C} \partial_{x_2}) b + \beta x_2) = -\alpha_0 \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + \operatorname{curl} f, \quad (4)$$

où les coefficients δ et C s'expriment en fonction du *cosinus* de la latitude moyenne.

Les résultats présentés dans cette partie montrent tout d'abord (Chapitre 6) l'influence de ces nouveaux termes d'un point de vue numérique et théorique. Nous proposons ensuite (Chapitres 7 et 8) une approche multi-échelle pour la résolution de l'équation (3). Le dernier chapitre est consacré à une autre équation limite obtenue à partir du système de Saint-Venant avec force de Coriolis complète : l'équation des lacs, qui comporte, elle aussi, de nouveaux termes en *cosinus*.

2 Présentation des chapitres.

Après avoir présenté les deux thématiques principales de cette thèse, nous détaillons ci-dessous le contenu de chacun des 9 chapitres qui la composent.

Tout d'abord, dans le **Chapitre 1**, nous présentons l'obtention du système de Saint-Venant visqueux (1)-(2). Pour cela, nous considérons les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles :

$$\begin{aligned} \partial_t U + \operatorname{div}(U \otimes U) &= \operatorname{div} \sigma - 2\boldsymbol{\Omega} \times U + f, \\ \operatorname{div} U &= 0, \end{aligned}$$

dans un domaine de faible profondeur, avec une topographie variable $b(x)$. Dans ces équations, $U = (u, w)$ est la vitesse du fluide, σ le tenseur total des contraintes, $2\boldsymbol{\Omega} \times U$ désigne la force de Coriolis et f la force de gravité. Nous utilisons une condition de type Navier au fond à laquelle nous ajoutons un terme de trainée quadratique. Nous écrivons donc :

$$(\sigma n)_{\tan} = kU_{\tan} + k_t H|U|U_{\tan}$$

où n est la normale au fond. Nous représentons la surface par la fonction h , c'est-à-dire que h est la somme de la hauteur du fluide H et de la hauteur du fond b . A la surface, nous prenons en compte la capillarité par la formule $\sigma n = a\kappa n$ (κ est la courbure et a le coefficient de tension de surface) et nous imposons la condition cinématique usuelle qui s'écrit $\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w$. Comme le domaine est mince, nous introduisons un petit paramètre ε qui représente le rapport entre la hauteur caractéristique et la longueur caractéristique. Suivant la méthode classique des développements asymptotiques, nous développons nos variables en fonction de ce petit paramètre. Nous étudions alors les différents ordres des équations de Navier-Stokes

sur lesquelles nous avons fait l'hypothèse hydrostatique. Le premier ordre nous donne une généralisation du système présenté par A. J.-C. de SAINT-VENANT en deux dimensions, avec le premier ordre de la force de Coriolis. Cependant, comme l'ont fait J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME, nous devons regarder nos équations au second ordre pour voir apparaître la trace de la viscosité. A ce moment là, nous remarquons que le terme de trainée doit être modifié par rapport au premier ordre : d'une part, le terme de frottement laminaire devient égal à $\alpha_0(H)$, et d'autre part, nous voyons arriver le terme de trainée turbulente. De plus, la force de Coriolis a une nouvelle contribution liée au *cosinus* de la latitude : cela nous donne un nouveau système (1)-(2) pour lequel nous établissons quelques propriétés. Tout d'abord, nous nous penchons sur l'existence de solutions faibles globales. Nous utilisons pour cela une entropie mathématique proposée par D. BRESCH et B. DESJARDINS dans [15], [18] puis étendue dans [16], qui consiste à multiplier l'équation des moments non plus par u , ce qui donne l'énergie classique, mais par $\mu \nabla \ln H$. Ce résultat nécessite de modifier légèrement les termes visqueux en ne conservant que ceux en $\operatorname{div}(HD(u))$. Nous suivons donc la même démarche que [54] sans toutefois pouvoir affirmer directement que $\sqrt{H} \nabla u$ est borné. Une étude précise de tous les nouveaux termes est alors nécessaire pour conclure quant à l'existence de solutions faibles globales en présence de capillarité. Enfin, dans une dernière partie, nous considérons les ondes pour les fluides tournants : nous montrons comment la partie en *cosinus* de la force de Coriolis modifie les ondes de Poincaré et les ondes équatoriales (ondes de Kelvin et ondes mixtes de Rossby-gravité). Ce nouveau terme est loin d'être anecdotique, comme nous pourrons le voir sur un exemple.

Dans le **Chapitre 2** nous discutons des conditions au fond et à la surface de notre domaine. Au fond, deux possibilités sont généralement évoquées : la condition de Navier,

$$(\sigma n)_{\tan} = k U_{\tan},$$

utilisée pour obtenir le modèle (1)-(2), qui fait intervenir le coefficient de frottement k , ou bien la condition de non-glissement $u = 0$. Cette dernière, que certains peuvent considérer comme une condition indiscutable, stipule que la vitesse horizontale est nulle, tout comme la vitesse verticale. Nous nous intéressons alors à l'influence du choix de la condition au fond sur l'obtention du système de Saint-Venant, en présentant le modèle avec l'hypothèse de non-glissement. Cela a été étudié par J.-P. VILA dans [69], pour un fond plat incliné. Pour un fond plat horizontal, nous sommes amenés à ajouter un terme source pour que la solution ne soit pas triviale. La méthodologie est exactement la même que celle exposée ci-dessus (développements asymptotiques et étude des différents ordres). Cependant, ce choix de condition au fond nous oblige à calculer la vitesse au second ordre pour obtenir le système de Saint-Venant au premier ordre. En effet, il nous faut une approximation à l'ordre ε du terme (lié à la condition de non-glissement) :

$$\frac{\mu_0}{\varepsilon} \partial_z u|_{z=0},$$

c'est-à-dire $\partial_z u|_{z=0}$ à l'ordre ε^2 . Nous détaillons les calculs pour un terme source constant en espace et en temps pour simplifier les résultats, puis nous donnons le modèle dans le cas où le terme source dépend des variables horizontales.

Après nous être penchés sur les conditions au fond, nous passons aux conditions à la surface. Nous avons choisi de tenir compte de l'évaporation, comme cela a été fait dans le cas d'une

goutte (voir [23]). Nous proposons ici un système de Saint-Venant avec un terme d'évaporation que nous ne précisons pas. En effet, ce terme est une fonction complexe des paramètres du modèle et diffère beaucoup d'une application à l'autre. La contribution de cet élément est visible au travers d'un terme du même type que les termes de frottement. De plus, de la même façon que la viscosité modifiait le système obtenu par J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME, l'évaporation a aussi une influence sur l'expression des coefficients α_0 et α_1 .

Après avoir fait varier les conditions au fond et à la surface, nous étudions l'influence du tenseur des contraintes dans le **Chapitre 3**. En effet, le modèle (1)-(2) suppose que le tenseur des contraintes est le tenseur classique de Cauchy. Cependant, de nombreux fluides ne sont pas newtoniens et leur loi constitutive ne rentre pas dans ce cadre. Nous étudions ici le cas de la loi d'Oldroyd B, qui caractérise certains fluides viscoélastiques. Cette loi est donnée par

$$\sigma = -pId + \tau = -pId + 2\mu(1-r)\frac{\nabla U + {}^t\nabla U}{2} + \sigma,$$

où r représente le rapport entre l'élasticité et la viscosité. Le tenseur des contraintes n'est pas donné explicitement, il s'exprime en fonction du tenseur des contraintes supplémentaires σ qui, lui-même, vérifie l'équation différentielle

$$\lambda(\partial_t\sigma + U \cdot \nabla\sigma + g_\alpha(\nabla U, \sigma)) + F(\sigma)\sigma = 2\mu r \frac{\nabla U + {}^t\nabla U}{2}.$$

Nous sommes donc amenés à combiner soigneusement cette équation et les équations de Navier-Stokes pour proposer un nouveau système de Saint-Venant correspondant à cette loi, avec un certain choix de paramètres. Dans le cas d'un fond plat ($h = H$), il ne reste qu'un seul nouveau terme dans le modèle final, terme dépendant du rapport r comme suit :

$$\frac{k}{1 + \frac{k}{3\mu}h} \frac{r}{6\varepsilon} h^2 \nabla \operatorname{div} u.$$

Nous étudions également les propriétés mathématiques de ce système, ou plus précisément du système linéarisé. Dans l'esprit de [61], nous nous ramenons à un problème de valeurs propres, dont le comportement asymptotique nous permet de donner les conditions pour lesquelles le système est bien posé. Nous nous rendons compte que le choix de la loi d'Oldroyd a tendance à déstabiliser le système par rapport au tenseur de Cauchy. Le terme lié au rapport r vient en effet s'opposer à la viscosité dont les propriétés régularisantes sont bien connues. Il est donc nécessaire que ce terme reste petit devant la viscosité.

Une autre approche, exposée au **Chapitre 4**, est d'effectuer des développements multi-échelles sur les équations de Saint-Venant. Ceux-ci permettent de bien capter toutes les variations des fonctions, dans notre cas les variations de la topographie, en introduisant de nouvelles échelles : une échelle dite rapide, qui prend en compte la partie oscillante de la fonction, et une échelle lente, qui représente l'allure grossière de la courbe.

Nous présentons plusieurs régimes possibles pour les équations de Saint-Venant avec faible nombre de Froude (que l'on note ϵ), en fonction de la topographie considérée (oscillante, à variations lentes ou fonction variable classique). Nous montrons qu'il est parfois possible de transformer la variation faible en espace en une variation rapide en temps, puis nous détaillons

deux régimes : celui où le fond varie en fonction de x et de ϵx , ainsi qu'une topographie oscillante dépendant de x et de x/ϵ . Dans le premier cas, nous arrivons, sans réelle difficulté, à un système fermé. Le second choix est nettement plus complexe : dans un premier temps, nous regardons le système faiblement non-linéaire associé, ce qui permet de décaler les termes générants d'un ordre et d'obtenir un système fermé. Notons d'ailleurs que ce modèle est en accord avec les résultats de [19] où les auteurs étudient cette même limite mais en deux étapes, en passant par l'équation des lacs. Nous expliquons ensuite les problèmes auxquels nous sommes confrontés dans le cas non-linéaire, et nous proposons d'utiliser la version visqueuse des équations de Saint-Venant pour avoir des résultats satisfaisants. Nous considérons deux choix de viscosité (d'ordre 1 et de l'ordre du nombre de Froude), et nous montrons que, dans les deux cas, nous sommes capables de fermer le système.

Enfin, pour conclure sur les équations de Saint-Venant, nous nous intéressons, dans le **Chapitre 5**, aux propriétés de modèles de type Saint-Venant. En effet, dans le premier chapitre, nous avons tout d'abord travaillé sur le modèle en lui-même, modèle que nous avons complété jusqu'ici. Nous avons également donné des résultats mathématiques, obtenus grâce à des inégalités d'énergie et d'entropie. Ces techniques, en particulier l'entropie BD, s'appliquent aussi à des problèmes de même type, comme par exemple un modèle de sédimentation. En effet, nous proposons ici un nouveau couplage entre un système de Saint-Venant visqueux et une équation d'évolution avec diffusion pour la couche de sédiments, pour lequel nous montrons un théorème de stabilité.

Nous présentons également des simulations numériques de notre modèle visqueux : nous étudions l'évolution d'une dune de sable dans un canal rempli d'eau. Nous montrons d'une part l'influence des termes visqueux sur l'angle d'étalement de cette dune, et d'autre part le lien possible entre ce modèle et celui proposé par Grass [36], pour lequel l'équation d'évolution des sédiments ne dépend pas de la hauteur d'eau.

Dans un deuxième temps, nous étudions le système de Bingham compressible. Les fluides de Bingham sont des matériaux complexes, dont la loi constitutive s'exprime sous la forme d'une inégalité que l'on peut reformuler comme suit :

- lorsque le cisaillement est inférieur à un seuil donné, le fluide n'est pas déformé,
- si le cisaillement dépasse le seuil, le fluide est déformé.

Nous montrons qu'une telle loi nous donne un système de Saint-Venant sous la forme d'une inégalité avec des viscosités dégénérées. C'est en partie pour cela que la question de l'existence de solutions est toujours à l'étude. Nous essayons alors d'adapter les résultats pour les équations de Saint-Venant usuelles à ce système de Bingham compressible. Une première étape, réalisée ici, est de prouver par des inégalités d'énergie et d'entropie, de nouvelles estimations.

La seconde partie de ce travail est consacrée aux équations limites qui se déduisent des équations de Saint-Venant. Ainsi, le **Chapitre 6** présente la limite quasi-géostrophique du système de Saint-Venant obtenu au Chapitre 1. Il s'agit donc de considérer les nombres de Froude et de Rossby petits. Nous effectuons alors un développement asymptotique des équations en eaux peu profondes en fonction de ce petit paramètre. Le modèle obtenu (4) fait apparaître deux contributions du *cosinus* de la latitude : d'une part, le laplacien de la vorticité est modifié dans la direction nord-sud, et d'autre part le terme de topographie doit

aussi être changé. Nous nous intéressons ensuite au caractère bien posé de l'équation limite. Dans le cas d'un rectangle avec conditions d'imperméabilité et de glissement sur les bords, nous montrons l'existence d'une unique solution forte grâce à des estimations *a priori*.

Nous passons ensuite à une étude numérique : notre but est de voir, sur des exemples assez simples, si la prise en compte de ce terme de Coriolis a un rôle effectif ou non. Nous avons donc programmé ces coefficients dans un code qui résout les équations Quasi-Géostrophiques (3). Nous présentons deux séries de résultats, qui représentent une circulation *double-gyre* dans un domaine de type océan Atlantique nord. Dans un premier temps, nous prenons un fond plat, qui nous permet d'observer l'effet de l'anisotropie introduite dans le laplacien. Nous testons, dans un second temps, un fond de type dorsale médio-atlantique pour tenir compte de la contribution due à la topographie.

Nous présentons, au **Chapitre 7**, une méthode d'approximation multi-échelles sur une équation simple de type Quasi-Géostrophique en une dimension :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x) - \partial_x^2 \psi(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi(t, x) &= \frac{1}{\epsilon} f(t, x) && \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D} \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) &= 0 && \forall t \in [0, T] \\ \psi(0, x) &= 0 && \forall x \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

en ayant au préalable étudié l'existence de telles fonctions. Pour cela, nous utilisons la technique classique des développements en série avec plusieurs échelles spatiales x et X , variable rapide. Cela nous permet de séparer notre problème en des équations sur l'intérieur du domaine (équations qui ne dépendent pas de X) et un système qui ne dépend pas de x , qui régit le bord ouest où l'on observe un phénomène de couche limite. Les premiers résultats numériques obtenus nous incitent à améliorer cette approximation : nous montrons qu'il est possible de considérer que les termes de couche limite sont nuls en dehors de cette zone. Nous diminuons ainsi le temps de calcul, pour un résultat qui reste proche de la solution théorique.

Dans le chapitre suivant, **Chapitre 8**, nous commençons par ajouter, aux équations étudiées au Chapitre 7, un terme de topographie, fonction périodique de la variable rapide. Nous pouvons donc mettre en œuvre la méthode présentée ci-dessus, mais les fonctions sur l'intérieur du domaine dépendent désormais des deux variables d'espace. De plus, nous arrivons à exprimer la contribution du terme de topographie, c'est-à-dire que nous donnons l'expression des termes à ajouter à la solution avec fond plat pour obtenir la solution avec fond variable. Malgré leur complexité, nous montrons numériquement que cela constitue une bonne approximation. Nous présentons également des résultats dans le cas où la topographie n'est plus d'ordre un mais d'ordre ϵ^{-1} . Dans ces conditions, nous ne pouvons plus effectuer le développement asymptotique : nous sommes amenés à réaliser des changements de variables qui dépendent du choix du terme source.

Nous généralisons cette étude aux équations Quasi-Géostrophiques stationnaires en deux dimensions. Nous montrons que nous pouvons mettre en place la théorie présentée auparavant, avec au total trois variables d'espace. En effet, nous n'ajoutons pas de variable rapide correspondant à y , nous considérons un fond du type $b(X, y)$. Nous obtenons alors le début du développement en série de la solution avec topographie variable. Cette approche a été validée numériquement à l'aide d'un programme qui résout les équations Quasi-Géostrophiques avec

une méthode de différences finies. Enfin, dans une dernière partie nous passons aux équations Quasi-Géostrophiques proprement dites, avec évolution en temps et terme de frottement de fond.

Le **Chapitre 9** est consacré à l'étude d'un autre type d'équations limites : les équations des lacs, modifiées par les termes en *cosinus* de la force de Coriolis. Elles constituent la limite faible nombre de Froude du système de Saint-Venant, sans hypothèse particulière sur le nombre de Rossby. La prise en compte de la force de Coriolis complète a pour effet de modifier la vorticité qui devient :

$$\Pi = \frac{1}{H^0} \operatorname{curl} u + \frac{\sin \theta}{Ro} \frac{1}{H^0} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2 Ro} \frac{\partial_{x_2} H^0}{H^0},$$

mais les équations satisfaites sont les mêmes. Nous adaptons alors les différents résultats existants pour les équations des lacs usuelles à cette nouvelle vorticité. Cela nous permet de conclure, en distinguant le cas où la hauteur d'eau s'annule, quant à l'existence de solutions à de telles équations.

Première partie

Les équations de Saint-Venant :
modèles et propriétés
mathématiques.

Chapitre 1

L'équation de Saint-Venant visqueuse en deux dimensions avec effet cosinus.

Dans ce chapitre, nous montrons rigoureusement, mais formellement, l'obtention des équations de Saint-Venant visqueuses en deux dimensions à partir des équations de Navier-Stokes en trois dimensions. Nous prouvons que suivant le lien entre la viscosité et le rapport entre la hauteur et la longueur caractéristiques du domaine, nous devons considérer la force de Coriolis complète et non pas son approximation au premier ordre comme cela a été fait jusqu'à présent. Nous obtenons donc un nouveau système de Saint-Venant visqueux, avec les termes en *cosinus* de la force de Coriolis. Notons que, sans viscosité, ce système constitue le second ordre des équations de Saint-Venant.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons aux propriétés mathématiques de ce système. En utilisant ce qui a été fait par F. MARCHE en particulier (voir [53], [52] et plus récemment [54]), nous démontrons l'existence de solutions faibles globales à condition de modifier légèrement le terme visqueux. Pour cela, nous donnons des estimations *a priori* grâce à l'égalité d'énergie mais aussi avec une nouvelle entropie, l'entropie BD définie par D. BRESCH et B. DESJARDINS dans [15], qui nous permet de contrôler de nouveaux termes. Nous pouvons alors, avec des propriétés de compacité, passer à la limite dans les différents produits.

Enfin, nous présentons des résultats sur diverses ondes. Comme nos nouveaux termes dépendent du *cosinus* de la latitude, nous nous penchons plus particulièrement sur les ondes équatoriales du modèle de Saint-Venant visqueux : nous pensons en effet que c'est au niveau de l'équateur que l'effet cosinus devrait jouer un rôle important.

Ce chapitre, ainsi qu'une partie des Chapitres 6 et 9, fait l'objet d'une note aux CRAS, section Mathématique [50]. Un article plus détaillé [49] a été accepté pour publication dans *Quarterly of Applied Mathematics*.

1.1 Obtention de l'équation de Saint-Venant visqueuse.

On considère les équations de Navier-Stokes 3D pour un fluide homogène :

$$\begin{aligned}\partial_t U + \operatorname{div}(U \otimes U) &= \operatorname{div} \sigma - 2\Omega \times U + f, \\ \operatorname{div} U &= 0,\end{aligned}$$

pour (x, z) variant dans $\mathbb{T}^2 \times [b(x), h(t, x)]$,

où • $U = (u, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est la vitesse du fluide,

• σ est le tenseur total des contraintes,

• $2\Omega \times U$ est la force de Coriolis avec $\Omega = \Omega(0, \cos \theta, \sin \theta)$, θ représentant la latitude, supposée constante, et Ω la vitesse de rotation de la Terre,

• enfin, $f = -g^t(0, 0, 1)$ désigne la force de gravité.

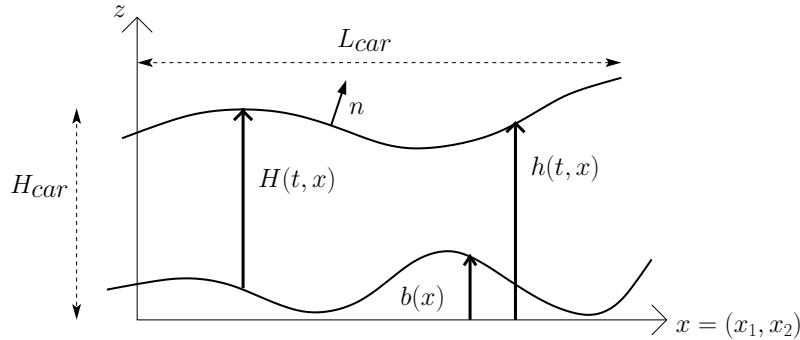


FIG. 1.1 – Notations utilisées lors de l'obtention du système de Saint-Venant.

A ces équations, nous devons ajouter des conditions aux bords (voir Figure 1.1) :

• à la surface libre $z = h(t, x)$:

habituellement, on néglige la pression atmosphérique, et on utilise la condition

$$\sigma n = 0,$$

où n est la normale à la surface.

On peut parfois ajouter les effets de la tension de surface, c'est à dire

$$\sigma n = a \kappa n,$$

où a est la capillarité, κ est la courbure moyenne.

Enfin, dans tous les cas, on rajoute le fait que la vitesse normale dans le référentiel translaté lié à une particule qui se déplace à la surface est nulle :

$$\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w.$$

• au fond $z = b(x)$:

on impose des conditions de type Navier

$$(\sigma n) \cdot \tau_1 \tau_1 + (\sigma n) \cdot \tau_2 \tau_2 = k U \cdot \tau_1 \tau_1 + k U \cdot \tau_2 \tau_2,$$

où k est le coefficient de frottement, (τ_1, τ_2) forme une base de la surface tangente. On ajoute la condition de non-pénétration

$$-u \cdot \nabla_x b + w = 0.$$

On peut aussi considérer des termes de trainée turbulente en remplaçant dans la formule précédente kU par $k_t HU|U|$, où k_t est le coefficient de frottement turbulent (voir [60]).

Dans la suite, nous mettons ces équations sous forme non-dimensionnelle, en remplaçant σ par le tenseur des contraintes de Cauchy habituel. Nous écrivons ensuite un développement asymptotique de U et nous étudions les premiers ordres que l'on obtient. On a alors l'équation de Saint-Venant en faisant la moyenne sur la hauteur d'eau. Nous montrons ici que, pour les fluides géophysiques, celle-ci est donnée au second ordre par :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}_x(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}_x(Hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla_x H^2 &= \\ -\alpha_0(H)u - \alpha_1(H)Hu|u| + aH\nabla_x \Delta_x H + 2\mu \nabla_x(H \operatorname{div}_x u) + 2\mu \operatorname{div}_x(HD_x u) \\ + \Omega \cos \theta \nabla_x(u_1 H^2) + \Omega \cos \theta H^2 e_1 \operatorname{div}_x u - 2\Omega \sin \theta Hu^\perp \\ - 2\Omega \cos \theta He_1 \nabla_x b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla_x b + aH \nabla_x \Delta_x b - gH \nabla_x b, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_0(H) = \frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}}, \quad \alpha_1(H) = \frac{k_t}{\left(1 + \frac{kH}{3\mu}\right)^2}.$$

1.1.1 Mise sous forme non-dimensionnelle des équations de Navier-Stokes.

On considère les équations de Navier-Stokes en trois dimensions pour un fluide homogène, avec $\sigma = -p\operatorname{Id} + 2\mu D(U)$, où μ représente la viscosité et $D(U)$ est la partie symétrique du gradient de vitesse :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + w \partial_z u &= -\nabla_x p + 2\mu \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \mu \partial_z^2 u + \mu \nabla_x(\partial_z w) - 2\Omega \sin \theta u^\perp, \\ &\quad - 2\Omega \cos \theta w e_1 \\ \partial_t w + u \cdot \nabla_x w + w \partial_z w &= -\partial_z p + \mu \partial_z(\operatorname{div}_x u) + \mu \Delta_x w + 2\mu \partial_z^2 w + 2\Omega \cos \theta u_1 - g, \\ \operatorname{div}_x u + \partial_z w &= 0. \end{aligned}$$

On note avec un indice x les quantités liées aux variables horizontales ; u_1 et u_2 sont les deux composantes du vecteur u , u^\perp est le vecteur orthogonal à u défini par ${}^t(-u_2, u_1)$ et e_1 est le vecteur ${}^t(1, 0)$.

On définit alors les variables non-dimensionnelles et nombres sans dimensions suivants :

$$\begin{aligned} x &= L_{car} x', & z &= H_{car} z', & \text{avec } \varepsilon = \frac{H_{car}}{L_{car}} \ll 1, \\ u &= u_{car} u', & w &= w_{car} w', & \text{avec } w_{car} = \varepsilon u_{car}, \\ \nu &= \frac{\mu}{L_{car} u_{car}}, & p &= p_{car} p', & \text{avec } p_{car} = u_{car}^2, \\ t &= \frac{L_{car}}{u_{car}} t', & Ro &= \frac{u_{car}}{2L_{car} \Omega}, & Fr &= \frac{u_{car}}{\sqrt{g H_{car}}}, \end{aligned}$$

et on réécrit ces équations en enlevant les primes :

$$\begin{aligned} \frac{u_{car}^2}{L_{car}} \partial_t u + \frac{u_{car}^2}{L_{car}} u \cdot \nabla_x u + \frac{u_{car}^2}{L_{car}} w \partial_z u &= -\frac{p_{car}}{L_{car}} \nabla_x p - 2\Omega u_{car} \sin \theta u^\perp - \varepsilon 2\Omega u_{car} \cos \theta w e_1 \\ &\quad + 2\mu \frac{u_{car}}{L_{car}^2} \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \frac{\mu}{\varepsilon^2} \frac{u_{car}}{L_{car}^2} \partial_z^2 u + \mu \frac{u_{car}}{L_{car}^2} \nabla_x(\partial_z w), \\ \varepsilon \frac{u_{car}^2}{L_{car}} \partial_t w + \varepsilon \frac{u_{car}^2}{L_{car}} u \cdot \nabla_x w + \varepsilon \frac{u_{car}^2}{L_{car}} w \partial_z w &= -\frac{p_{car}}{\varepsilon L_{car}} \partial_z p + 2\Omega u_{car} \cos \theta u_1 - g \\ &\quad + \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{u_{car}}{L_{car}^2} \partial_z(\operatorname{div}_x u) + \mu \varepsilon \frac{u_{car}}{L_{car}^2} \Delta_x w + \frac{2\mu}{\varepsilon} \frac{u_{car}}{L_{car}^2} \partial_z^2 w, \\ \frac{u_{car}}{L_{car}} (\operatorname{div}_x u + \partial_z w) &= 0. \end{aligned}$$

On multiplie l'équation des moments sur u par $L_{car} u_{car}^{-2}$ et l'équation sur w par $\varepsilon^{-1} L_{car} u_{car}^{-2}$ et on obtient la forme non-dimensionnelle des équations de Navier-Stokes 3D :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + w \partial_z u &= -\nabla_x p + 2\nu \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u + \nu \nabla_x(\partial_z w) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{Ro} u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} w e_1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \partial_t w + u \cdot \nabla_x w + w \partial_z w &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z p + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z(\operatorname{div}_x u) + \nu \Delta_x w + \frac{2\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 w \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\cos \theta}{Ro} u_1 - \frac{1}{\varepsilon^2 F r^2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}_x u + \partial_z w = 0. \tag{1.3}$$

Il nous faut maintenant transformer les conditions aux bords. On commence par réécrire ces conditions en remplaçant σ par son expression puis on change les variables :

- à la surface libre $z = h(t, x)$:

la normale n s'écrit : $n = \frac{1}{\sqrt{1+(\nabla_x h)^2}} \begin{pmatrix} -\nabla_x h \\ 1 \end{pmatrix}$, donc on a

$$\begin{aligned} p \nabla_x h + a \kappa \nabla_x h - 2\mu D_x(u) \nabla_x h + \mu \nabla_x w + \mu \partial_z u &= 0, \\ p + a \kappa - 2\mu \partial_z w + \mu \nabla_x w \cdot \nabla_x h + \mu \partial_z u \cdot \nabla_x h &= 0, \\ \partial_t h + u \cdot \nabla_x h &= w. \end{aligned}$$

De plus, la courbure est donnée par $\kappa = \operatorname{div}(-n)$ si n est la normale extérieure définie ci-dessus. Ainsi, en variables non-dimensionnelles, si on écrit $h = H_{car} h'$ (puisque il s'agit de la même échelle que z) et par conséquent $\kappa = \varepsilon L_{car}^{-1} \kappa' = \varepsilon L_{car}^{-1} \Delta_x h'$ à $O(\varepsilon^3)$ près, ces conditions deviennent :

$$\begin{aligned} \varepsilon p_{car} p \nabla_x h + \varepsilon^2 \frac{a}{L_{car}} \kappa \nabla_x h - 2\mu \varepsilon \frac{u_{car}}{L_{car}} D_x(u) \nabla_x h + \mu \varepsilon \frac{u_{car}}{L_{car}} \nabla_x w + \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{u_{car}}{L_{car}} \partial_z u &= 0, \\ p_{car} p + \varepsilon \frac{a}{L_{car}} \kappa - 2\mu \frac{u_{car}}{L_{car}} \partial_z w + \varepsilon^2 \mu \frac{u_{car}}{L_{car}} \nabla_x w \cdot \nabla_x h + \mu \frac{u_{car}}{L_{car}} \partial_z u \cdot \nabla_x h &= 0, \\ \varepsilon u_{car} (\partial_t h + u \cdot \nabla_x h) &= \varepsilon u_{car} w. \end{aligned}$$

Si on définit $A = \varepsilon a u_{car}^{-2} L_{car}^{-1}$, et que l'on multiplie la première condition par $\varepsilon^{-1} u_{car}^{-2}$,

la seconde par u_{car}^{-2} , on obtient les conditions non-dimensionnelles à la surface libre :

$$p \nabla_x h + A \kappa \nabla_x h - 2\nu D_x(u) \nabla_x h + \nu \nabla_x w + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u = 0, \quad (1.4)$$

$$p + A \kappa - 2\nu \partial_z w + \varepsilon^2 \nu \nabla_x w \cdot \nabla_x h + \nu \partial_z u \cdot \nabla_x h = 0, \quad (1.5)$$

$$\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w. \quad (1.6)$$

- au fond $z = b(x)$:

si $b = H_{car} b'$, la condition de non-pénétration s'écrit $\varepsilon u_{car} (-u \cdot \nabla_x b + w) = 0$ en variables non-dimensionnelles, c'est-à-dire :

$$-u \cdot \nabla_x b + w = 0. \quad (1.7)$$

Etudions maintenant l'expression de la condition de Navier. On choisit les vecteurs tangents $\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{1}{|\nabla_x b|} \begin{pmatrix} \nabla_x^\perp b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{\sqrt{|\nabla_x b|^2 + |\nabla_x b|^4}} \begin{pmatrix} -\nabla_x b \\ -|\nabla_x b|^2 \end{pmatrix}$ et les deux premières lignes s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu}{|\nabla_x b|^2 (1 + |\nabla_x b|^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\partial_x b \partial_y b \partial_x u_1 + \frac{1}{2} (\partial_y b)^2 (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - \frac{1}{2} \partial_y b (\partial_x w + \partial_z u_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\partial_x b)^2 (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - \partial_x b \partial_y b \partial_y u_2 + \frac{1}{2} \partial_x b (\partial_y w + \partial_z u_2) \right) (1 + |\nabla_x b|^2) \nabla_x^\perp b \right. \\ & \quad \left. - \left((\partial_x b)^2 \partial_x u_1 + \partial_x b \partial_y b (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - \frac{1}{2} \partial_x b (\partial_x w + \partial_z u_1) + (\partial_y b)^2 \partial_y u_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_y b (\partial_y w + \partial_z u_2) + \frac{1}{2} |\nabla_x b|^2 \partial_x b (\partial_x w + \partial_z u_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} |\nabla_x b|^2 \partial_y b (\partial_y w + \partial_z u_2) - |\nabla_x b|^2 \partial_z w \right) \nabla_x b \right] = k u + k_t H u |u|. \end{aligned}$$

A nouveau, on considère les variables non-dimensionnelles et $b = H_{car} b'$; on note également $K = k u_{car}^{-1}$ et $K_t = k_t L_{car}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{2\varepsilon\nu}{|\nabla_x b|^2 (1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\partial_x b \partial_y b \partial_x u_1 + \frac{1}{2} (\partial_y b)^2 (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_y b (\partial_x w + \varepsilon^{-2} \partial_z u_1) - \frac{1}{2} (\partial_x b)^2 (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - \partial_x b \partial_y b \partial_y u_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \partial_x b (\partial_y w + \varepsilon^{-2} \partial_z u_2) \right) (1 + \varepsilon^2 |\nabla_x b|^2) \nabla_x^\perp b - \left((\partial_x b)^2 \partial_x u_1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \partial_x b \partial_y b (\partial_x u_2 + \partial_y u_1) - \frac{1}{2} \partial_x b (\partial_x w + \varepsilon^{-2} \partial_z u_1) + (\partial_y b)^2 \partial_y u_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \partial_y b (\partial_y w + \varepsilon^{-2} \partial_z u_2) + \frac{1}{2} |\nabla_x b|^2 \partial_x b (\varepsilon^2 \partial_x w + \partial_z u_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} |\nabla_x b|^2 \partial_y b (\varepsilon^2 \partial_y w + \partial_z u_2) - |\nabla_x b|^2 \partial_z w \right) \nabla_x b \right] = K u + \varepsilon K_t H u |u|. \end{aligned}$$

1.1.2 Approximation hydrostatique.

Pour continuer, on utilise l'hypothèse hydrostatique, c'est-à-dire que l'on considère que ε est petit dans la seconde équation du système de Navier-Stokes (l'équation (1.2)). On se

ramène donc au système :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + w \partial_z u &= -\nabla_x p + 2\nu \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u + \nu \nabla_x(\partial_z w) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{Ro} u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} w e_1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\partial_z p = \nu \partial_z(\operatorname{div}_x u) + 2\nu \partial_z^2 w - \frac{1}{Fr^2} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div}_x u + \partial_z w = 0. \quad (1.10)$$

La condition de Navier devient alors

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \nu D_x(u) \nabla_x b - \varepsilon \nu \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z u + \nabla_x w \right) \\ = -Ku - \varepsilon K_t H u |u| + 2\varepsilon \nu \partial_z w \nabla_x b + \varepsilon \nu (\nabla_x b \cdot \partial_z u) \nabla_x b. \end{aligned} \quad (1.11)$$

La condition à la surface libre sur h (équation (1.6)) reste inchangée. La première condition à la surface libre (équation (1.4)) se réécrit

$$\nu \partial_z u = -\varepsilon^2 (p \nabla_x h + A \kappa \nabla_x h - 2\nu D_x(u) \nabla_x h + \nu \nabla_x w),$$

et nous sert à simplifier la seconde condition (équation (1.5)) :

$$\begin{aligned} p + A \kappa - 2\nu \partial_z w &= -\varepsilon^2 \nu \nabla_x w \cdot \nabla_x h - \nu \partial_z u \cdot \nabla_x h \\ &= \varepsilon^2 (p \nabla_x h + A \kappa \nabla_x h - 2\nu D_x(u) \nabla_x h). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient les premiers ordres en ε

$$p + A \kappa - 2\nu \partial_z w = O(\varepsilon^2) \quad \text{en } z = h. \quad (1.12)$$

On intègre alors la dérivée verticale de la pression, donnée par l'équation (1.9), de h à z , pour z variant entre b et h :

$$p - p|_{z=h} = \frac{1}{Fr^2} (h - z) + \nu \operatorname{div}_x u - \nu (\operatorname{div}_x u)|_{z=h} + 2\nu \partial_z w - 2\nu (\partial_z w)|_{z=h} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_h^z u_1.$$

L'équation (1.12) nous permet de remplacer $p|_{z=h} - 2\nu (\partial_z w)|_{z=h}$ par $-A \kappa + O(\varepsilon^2)$, et avec l'équation (1.10) qui nous donne $\operatorname{div}_x u = -\partial_z w$, on a :

$$p(t, x, z) = \frac{1}{Fr^2} (h(t, x) - z) - A \kappa - \nu (\operatorname{div}_x u)|_{z=h(t,x)} - \nu \operatorname{div}_x u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_h^z u_1 + O(\varepsilon^2). \quad (1.13)$$

On cherche maintenant à déterminer des équations sur la moyenne de la vitesse et sur la surface libre. Pour commencer, on intègre l'équation des moments (1.8) sur la hauteur d'eau, c'est-à-dire entre $z = b(x)$ et $z = h(t, x)$:

$$\begin{aligned} \int_b^h \partial_t u + \int_b^h \operatorname{div}_x(u \otimes u) + \int_b^h \partial_z(uw) + \int_b^h \nabla_x p &= 2\nu \int_b^h \operatorname{div}_x(D_x(u)) \\ &\quad + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \int_b^h \partial_z^2 u + \nu \int_b^h \nabla_x(\partial_z w) - \frac{\sin \theta}{Ro} \int_b^h u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_b^h w e_1. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Leibniz pour sortir les dérivées des intégrales :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_b^h u - \partial_t h u|_{z=h} + \operatorname{div}_x \int_b^h (u \otimes u) - ((u \cdot \nabla_x h) u)|_{z=h} + ((u \cdot \nabla_x b) u)|_{z=b} + (u w)|_{z=h} - (u w)|_{z=b} \\ + \nabla_x \int_b^h p = \nabla_x h p|_{z=h} - \nabla_x b p|_{z=b} + 2\nu \operatorname{div}_x \int_b^h D_x(u) - 2\nu D_x(u)|_{z=h} \nabla_x h + 2\nu D_x(u)|_{z=b} \nabla_x b \\ + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u|_{z=h} - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u|_{z=b} + \nu \nabla_x w|_{z=h} - \nu \nabla_x w|_{z=b} - \frac{\sin \theta}{Ro} \int_b^h u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_b^h w e_1. \end{aligned}$$

On veut simplifier les expressions à la surface et au fond grâce aux conditions aux bords.

A la surface, on voit apparaître la somme $(\partial_t h + u \cdot \nabla_x h - w)|_{z=h}$ qui est nulle d'après l'équation (1.6). La seconde partie des termes de surface, $\nabla_x h p|_{z=h} - 2\nu D_x(u)|_{z=h} \nabla_x h + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u|_{z=h} + \nu \nabla_x w|_{z=h}$ vaut $-A \kappa \nabla_x h$ d'après la condition (1.4).

On regroupe également les termes de fond de manière à les simplifier : tout d'abord, le terme $(u \cdot \nabla_x b - w)|_{z=b}$ vaut à nouveau zéro car on a l'égalité (1.7). La condition (1.11) nous permet aussi de remplacer l'expression $2\nu D_x(u)|_{z=b} \nabla_x b - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u|_{z=b} - \nu \nabla_x w|_{z=b}$ par $(-\frac{K}{\varepsilon} u - K_t H u|u| + \nu \nabla_x b (2\partial_z w + \nabla_x b \cdot \partial_z u))|_{z=b}$.

Finalement, lorsque l'on modifie tous ces termes dans l'équation des moments intégrée, on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_b^h u + \operatorname{div}_x \int_b^h (u \otimes u) + \nabla_x \int_b^h p = -A \kappa \nabla_x h - \nabla_x b p|_{z=b} - \left(\frac{K}{\varepsilon} u + K_t H u|u| \right)|_{z=b} \\ + \nu \nabla_x b (2\partial_z w + \nabla_x b \cdot \partial_z u)|_{z=b} + 2\nu \operatorname{div}_x \int_b^h D_x(u) - \frac{\sin \theta}{Ro} \int_b^h u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_b^h w e_1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Enfin, on intègre l'équation de divergence nulle (1.10) du fond à la surface en utilisant encore la formule de Leibniz :

$$\operatorname{div}_x \int_b^h u - u|_{z=h} \cdot \nabla_x h + u|_{z=b} \cdot \nabla_x b + w|_{z=h} - w|_{z=b} = 0,$$

ce qui nous donne, avec les conditions (1.6) et (1.7) à la surface et au fond :

$$\partial_t h(t, x) + \operatorname{div}_x \int_{b(x)}^{h(t, x)} u = 0. \quad (1.15)$$

Nous fixons maintenant les valeurs de ν , K et K_t en fonction de ε et nous regardons ce que deviennent les équations (1.14) et (1.15) lorsque l'on approche u au premier ordre ou au second ordre en ε .

1.1.3 Système de Saint-Venant (ou Shallow-Water).

On considère les équations (1.8)-(1.10) avec les conditions (1.4)-(1.6) à la surface libre et (1.11) au fond. Nous remplaçons les diverses expressions dans les équations intégrées (1.14) et (1.15), en utilisant également l'équation (1.13). Nous supposons ici que ν , A , K et K_t sont d'ordre ε : $\nu = \varepsilon \nu_0$, $A = \varepsilon A_0$, $K = \varepsilon K_0$ et $K_t = \varepsilon K_{t0}$.

On développe u , w , H , p , b en fonction de ε , c'est-à-dire que l'on écrit $u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots$ (et de même pour les autres fonctions), où l'on a noté $H(t, x) = h(t, x) - b(x)$ la hauteur d'eau.

Système de Saint-Venant au premier ordre.

On commence par chercher le premier ordre de la vitesse, u^0 . Pour cela, on utilise l'équation des moments horizontaux (1.8) ainsi que les conditions aux bords (1.4) et (1.11). On obtient :

$$\partial_z^2 u = O(\varepsilon), \quad (\partial_z u)_{|z=b} = O(\varepsilon) \quad \text{et} \quad (\partial_z u)_{|z=h} = O(\varepsilon),$$

donc, au premier ordre, u ne dépend pas de z : $u^0(t, x, z) = u^0(t, x)$, qui reste inconnu. On veut connaître la dynamique de u^0 , donc on va regarder les premiers ordres des équations précédentes.

Tout d'abord, on peut déjà réécrire l'équation (1.15) sous la forme :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_x(H^0 u^0) = 0, \quad (1.16)$$

puisque les variations en temps de h et de H sont les mêmes.

Ensuite, lorsque l'on écrit la valeur de p , donnée par la formule (1.13), au premier ordre, on trouve : $p^0(t, x, z) = Fr^{-2}(h - z)$.

Ainsi, si on reporte ces valeurs dans l'équation des moments intégrée (1.14), on obtient l'égalité :

$$\partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}_x(H^0 u^0 \otimes u^0) + \frac{1}{2 Fr^2} \nabla_x(H^0)^2 = -\frac{1}{Fr^2} H^0 \nabla_x b^0 - K_0 u^0 - \frac{\sin \theta}{Ro} H^0 u^{0\perp}. \quad (1.17)$$

Les équations (1.16) et (1.17) constituent les équations de Saint-Venant au premier ordre en variables non-dimensionnelles.

Lorsque l'on revient aux variables avec dimensions, on obtient le système de Saint-Venant au premier ordre :

$$\partial_t H + \operatorname{div}_x(H u) = 0, \quad (1.18)$$

$$\partial_t(H u) + \operatorname{div}_x(H u \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla_x H^2 = -gH \nabla_x b - ku - 2\Omega \sin \theta H u^\perp. \quad (1.19)$$

Cependant, au premier ordre, la viscosité n'apparaît pas. Il est donc nécessaire d'aller à l'ordre suivant pour obtenir le système de Saint-Venant visqueux.

Remarque 1.1. *Si nous considérons le cas des fluides minces en rotation, nous pouvons étudier le cas d'une viscosité d'ordre 1 et non plus d'ordre ε . Nous prenons également une tension de surface d'ordre 1. Les résultats sont inchangés jusqu'à la réécriture de l'équation des moments intégrés ; le système au premier ordre est alors donné par :*

$$\partial_t H + \operatorname{div}_x(H u) = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_t(H u) + \operatorname{div}_x(H u \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla_x H^2 &= -gH \nabla_x b - ku - 2\Omega \sin \theta H u^\perp \\ &+ aH \nabla_x \Delta_x b + aH \nabla_x \Delta_x H + 2\mu \nabla_x(H \operatorname{div}_x u) + 2\mu \operatorname{div}_x(H D_x u). \end{aligned}$$

Les termes visqueux apparaissent alors dès le premier ordre, il n'est aucunement nécessaire d'écrire l'ordre suivant pour avoir la trace de la viscosité dans les équations de Saint-Venant.

Système de Saint-Venant au second ordre.

Etudions maintenant ce que l'on obtient au second ordre.

Dans cette partie, on notera en gras les variables à l'ordre 1 (par exemple, $\mathbf{u}^1 = u^0 + \varepsilon u^1$) et avec une barre les moyennes sur la hauteur d'eau :

$$\bar{u} = \frac{1}{H(t, x)} \int_b^h u dz.$$

On réécrit l'équation de la divergence :

$$\partial_t \mathbf{H}^1 + \operatorname{div}_x(\mathbf{H}^1 \bar{\mathbf{u}}^1) = O(\varepsilon^2). \quad (1.20)$$

On cherche à nouveau à écrire l'équation des moments, mais à l'ordre 1 cette fois. On reprend donc l'équation (1.8) :

$$\frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u = \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla_x u^0 + \frac{1}{Fr^2} \nabla_x h^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} u^{0\perp} + O(\varepsilon).$$

Or les équations au premier ordre (1.16) et (1.17) permettent d'écrire :

$$H^0 \left(\partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla_x u^0 + \frac{1}{Fr^2} \nabla_x h^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} u^{0\perp} \right) = -K_0 u^0.$$

On obtient donc la dérivée seconde de u :

$$\frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u = -\frac{K_0}{H^0} u^0 + O(\varepsilon).$$

On peut intégrer cette équation de b à z , pour z variant entre $b(x)$ et $h(t, x)$:

$$\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z u = \frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z u|_{z=b} - \frac{K_0}{H^0} u^0 (z - b) + O(\varepsilon) = K_0 u^0 \left(1 - \frac{z - b^0}{H^0} \right) + O(\varepsilon),$$

où la seconde égalité est obtenue avec la condition au fond (1.11) qui nous donne la relation $\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z u|_{z=b} = K_0 u^0 + O(\varepsilon)$. On réintègre encore une fois de b à z pour trouver une approximation de u à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{u}^1|_{z=b} + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} u^0 \int_b^z \left(1 - \frac{s - b^0}{H^0} \right) ds + O(\varepsilon^2) \\ &= \mathbf{u}^1|_{z=b} \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} (z - b^0) \left(1 - \frac{z - b^0}{2H^0} \right) \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Ceci nous permet maintenant de calculer la moyenne de u et la moyenne de u^2 . On trouve :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \mathbf{u}^1|_{z=b} \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} \frac{H^0}{3} \right) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u^2} &= (\mathbf{u}^1|_{z=b})^2 \left(1 + 2\varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} \frac{H^0}{3} \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

et donc la moyenne de u^2 est égale au carré de la moyenne de u à $O(\varepsilon^2)$ près. De la même façon, on montre que la moyenne de la matrice $u \otimes u$ est égale (toujours en ajoutant un $O(\varepsilon^2)$)

à la matrice formée à partir des moyennes de u , soit $\bar{u} \otimes \bar{u}$.

Enfin, l'équation (1.13) nous donne une expression à l'ordre ε^2 de la pression :

$$\begin{aligned} p(t, x, z) = & \frac{1}{Fr^2} (\mathbf{H}^1(t, x) + b - z) - \varepsilon A_0 \Delta_x h - \varepsilon \nu_0 (\operatorname{div}_x u^0)_{|z=h(t,x)} - \varepsilon \nu_0 \operatorname{div}_x u^0 \\ & + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1^0 (z - h^0) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

On peut alors utiliser ces résultats dans l'équation des moments intégrée (1.14), en remarquant que la condition de divergence nulle (1.10) nous donne $\int_b^h w^0 = -\frac{(H^0)^2}{2} \operatorname{div}_x u^0 + H^0 \nabla_x b^0 \cdot u^0$:

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbf{H}^1 \bar{u}) + \operatorname{div}_x(\mathbf{H}^1 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla_x(\mathbf{H}^1)^2 - \varepsilon A_0 \nabla_x(H^0 \Delta_x h^0) - 2\varepsilon \nu_0 \nabla_x(H^0 \operatorname{div}_x u^0) \\ - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla_x(u_1^0 (H^0)^2) = -\nabla_x b \left(\frac{\mathbf{H}^1}{Fr^2} - \varepsilon A_0 \Delta_x h^0 - 2\varepsilon \nu_0 \operatorname{div}_x u^0 - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1^0 H^0 \right) \\ - (K_0 \mathbf{u}^1 + \varepsilon K_{0t} H^0 \mathbf{u}^1 | \mathbf{u}^1 |)_{|z=b} + \varepsilon \nu_0 \nabla_x b^0 (2\partial_z w^0 + \nabla_x b^0 \cdot \partial_z u^0)_{|z=b} - \varepsilon A_0 \Delta_x h^0 \nabla_x h^0 \\ + 2\varepsilon \nu_0 \operatorname{div}_x(H^0 D_x u^0) - \frac{\sin \theta}{Ro} \mathbf{H}^1 \bar{u}^\perp + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} (H^0)^2 e_1 \operatorname{div}_x u^0 - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} H^0 e_1 \nabla_x b^0 \cdot u^0 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

On regroupe les termes de tension de surface à droite : $\varepsilon A_0 H^0 \nabla_x \Delta_x H^0 + \varepsilon A_0 H^0 \nabla_x \Delta_x b^0$.

La vitesse au fond $u_{|z=b}$ s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{u}^1_{|z=b} = \frac{\bar{u}}{1 + \frac{\varepsilon K_0}{\nu_0} \frac{H^0}{3}} + O(\varepsilon^2).$$

Cela nous donne donc :

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbf{H}^1 \bar{u}) + \operatorname{div}_x(\mathbf{H}^1 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla_x(\mathbf{H}^1)^2 = & -K_0 \frac{\bar{u}}{1 + \frac{\varepsilon K_0}{\nu_0} \frac{\mathbf{H}^1}{3}} - \varepsilon K_{0t} \frac{\bar{u}}{\left(1 + \frac{\varepsilon K_0}{\nu_0} \frac{\mathbf{H}^1}{3}\right)^2} \mathbf{H}^1 | \bar{u} | \\ & + \varepsilon A_0 \mathbf{H}^1 \nabla_x \Delta_x \mathbf{H}^1 + \varepsilon A_0 \mathbf{H}^1 \nabla_x \Delta_x b + 2\varepsilon \nu_0 \nabla_x(\mathbf{H}^1 \operatorname{div}_x \bar{u}) + 2\varepsilon \nu_0 \operatorname{div}_x(\mathbf{H}^1 D_x \bar{u}) \\ & + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla_x(\bar{u}_1(\mathbf{H}^1)^2) + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} (\mathbf{H}^1)^2 e_1 \operatorname{div}_x \bar{u} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \mathbf{H}^1 e_1 \nabla_x b \cdot \bar{u} \\ & - \frac{\sin \theta}{Ro} \mathbf{H}^1 \bar{u}^\perp - \nabla_x b \left(\frac{\mathbf{H}^1}{Fr^2} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \bar{u}_1 \mathbf{H}^1 \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Les équations (1.20)-(1.21) forment le système de Saint-Venant au second ordre en variables non-dimensionnelles.

On revient enfin aux variables dimensionnelles pour obtenir le système de Saint-Venant visqueux au second ordre :

$$\partial_t H + \operatorname{div}_x(Hu) = 0, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(Hu) + \operatorname{div}_x(Hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla_x H^2 = & -\alpha_0(H) u - \alpha_1(H) Hu |u| + aH \nabla_x \Delta_x H + 2\mu \nabla_x(H \operatorname{div}_x u) + 2\mu \operatorname{div}_x(H D_x u) \\ & + \Omega \cos \theta \nabla_x(u_1 H^2) + \Omega \cos \theta H^2 e_1 \operatorname{div}_x u - 2\Omega \sin \theta H u^\perp \\ & - 2\Omega \cos \theta H e_1 \nabla_x b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla_x b + aH \nabla_x \Delta_x b - gH \nabla_x b, \end{aligned} \quad (1.23)$$

où

$$\alpha_0(H) = \frac{k}{1 + \frac{kH}{3\mu}} \quad \alpha_1(H) = \frac{k_t}{\left(1 + \frac{kH}{3\mu}\right)^2}.$$

1.1.4 Cas de la latitude non constante.

Si la latitude θ varie en fonction de la seconde variable x_2 , en reprenant les calculs précédents on trouve le système de Saint-Venant suivant :

$$\partial_t H + \operatorname{div}_x(Hu) = 0, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(Hu) + \operatorname{div}_x(Hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla_x H^2 &= \\ -\alpha_0(H)u - \alpha_1(H)Hu|u| + aH\nabla_x \Delta_x H + 2\mu \nabla_x(H\operatorname{div}_x u) + 2\mu \operatorname{div}_x(HD_x u) \\ + \Omega \nabla_x(\cos \theta u_1 H^2) + \Omega \cos \theta H^2 e_1 \operatorname{div}_x u - 2\Omega \sin \theta Hu^\perp \\ - 2\Omega \cos \theta He_1 \nabla_x b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla_x b + aH\nabla_x \Delta_x b - gH \nabla_x b. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le seul terme modifié est $\nabla_x(\cos \theta u_1 H^2)$, puisque l'on ne peut plus faire sortir le *cosinus* du gradient.

Dans la suite de ce chapitre, nous omettons l'indice x qui désignait les variables horizontales puisque nos fonctions ont été moyennées sur la hauteur d'eau et par conséquent ne dépendent plus de la variable z .

1.2 Existence d'une solution de l'équation de Saint-Venant.

L'existence de solutions de l'équation de Saint-Venant a été démontrée récemment par F. MARCHE et P. FABRIE dans [54] sans les nouveaux termes dus à l'effet cosinus et avec comme terme visqueux uniquement $\mu \operatorname{div}(HD(u))$. Nous ajoutons ici les termes en *cosinus* de la latitude, mais nous sommes contraints, de par la structure de l'entropie BD que nous utilisons dans la démonstration, de faire la même hypothèse sur les termes visqueux, c'est-à-dire de ne pas considérer le terme en $\nabla(H\operatorname{div}u)$. Nous étudions donc le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla H^2 &= -\tilde{\alpha}_0(H)u - \tilde{\alpha}_1(H)Hu|u| \\ + AH\nabla \Delta H + AH\nabla \Delta b + 2\nu \operatorname{div}(HD(u)) + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla(u_1 H^2) \\ + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H^2 e_1 \operatorname{div}u - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} He_1 \nabla b \cdot u - \frac{\sin \theta}{Ro} Hu^\perp \\ - \nabla b \left(\frac{H}{Fr^2} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1 H \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

avec des conditions aux bords périodiques, c'est-à-dire dans un domaine $\mathcal{D} = \mathbb{T}^2$. On rappelle que

$$\tilde{\alpha}_0(H) = \frac{K_0}{1 + \frac{\varepsilon K_0 H}{3\nu_0}} \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_1(H) = \frac{\varepsilon K_{0t}}{\left(1 + \frac{\varepsilon K_0 H}{3\nu_0}\right)^2}.$$

On suppose que le fond est suffisamment régulier ($b \in H^3(\mathcal{D})$) et que la condition initiale sur la hauteur vérifie :

$$\begin{aligned} H|_{t=0} = H_0 \geq 0, \quad \sqrt{H_0} &\in H_{per}^1(\mathcal{D}), \quad H_0 \in L_{per}^2(\mathcal{D}), \\ H_0 u_0^2 &\in L_{per}^1(\mathcal{D}), \quad \ln(K_0^{-1} H_0 \tilde{\alpha}_0(H_0)) \in L_{per}^1(\mathcal{D}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dans la suite, nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Si $A > 0$, $\tilde{\alpha}_0(H) > 0$ et $\tilde{\alpha}_1(H) \geq 0$, avec H_0 satisfaisant (1.27), il existe une solution faible globale de (1.26).*

1.2.1 Estimations *a priori*.

Inégalité d'énergie.

Nous établissons tout d'abord l'inégalité d'énergie. Celle-ci ne nous donne pas les estimations *a priori* nécessaires pour passer à la limite, mais elle est utilisée pour obtenir l'inégalité d'entropie.

Proposition 1.3. *L'inégalité d'énergie associée au système (1.26) est donnée par :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{H^2}{Fr^2} + H|u|^2 + A|\nabla H|^2 \right) + \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_0(H)|u|^2 + \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H)H|u|^3 \\ + \frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla u + {}^t \nabla u|^2 \leq \int_{\mathcal{D}} H \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot u. \end{aligned} \quad (1.28)$$

La démonstration de cette inégalité est classique. On multiplie la seconde équation du système (1.26) par u et on intègre sur \mathcal{D} . En simplifiant les différents termes, on obtient l'inégalité annoncée.

Inégalité d'entropie.

Nous pouvons donner une seconde inégalité qui nous permet d'avoir de meilleures estimations *a priori* : l'inégalité d'entropie.

Proposition 1.4. *L'inégalité d'entropie pour le système (1.26) s'écrit :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \left(H|u + 2\nu \nabla \ln H|^2 + \frac{H^2}{Fr^2} + A|\nabla H|^2 \right) + \frac{\nu}{2} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla u - {}^t \nabla u|^2 \\ - 2\nu K_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \ln(K_0^{-1} H \tilde{\alpha}_0(H)) + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}'_0(H) \nabla H \cdot u + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H)|u|u \cdot \nabla H \\ + 2\nu A \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 H|^2 + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \frac{|\nabla H|^2}{Fr^2} + 2\nu \frac{\sin \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u^\perp \cdot \nabla H - 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H H \operatorname{div} u \\ - 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla(H^2 u \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H + 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u e_1 \cdot \nabla H \\ - 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H + \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_0(H)|u|^2 + \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H)H|u|^3 \\ \leq \int_{\mathcal{D}} \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot (Hu + 2\nu \nabla H). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Cette nouvelle entropie (dénommée entropie BD) a été introduite par D. BRESCH et B. DESJARDINS dans [15]. La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.5. *On a les deux égalités :*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla \ln H|^2 + \int_{\mathcal{D}} H \nabla \operatorname{div} u \cdot \nabla \ln H + \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : \nabla \ln H \otimes \nabla \ln H = 0, \quad (1.30)$$

et

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla \ln H|^2 + \nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_0(H) u \cdot \nabla \ln H + \nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H) |u| u \cdot \nabla H \\
& + \nu A \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 H|^2 + \nu \int_{\mathcal{D}} \frac{|\nabla H|^2}{Fr^2} + \nu \frac{\sin \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u^\perp \cdot \nabla H \\
& - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H H \operatorname{div} u - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla(H^2 u \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H \\
& = -\nu \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} u \cdot \nabla H + \nu \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : {}^t \nabla u - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u e_1 \cdot \nabla H \\
& + \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H + \nu \int_{\mathcal{D}} \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot \nabla H.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Remarque 1.6. Les nouveaux termes en cosinus ne donnent que quatre termes dans la seconde équation.

Preuve.

La première égalité a été prouvée dans [15] : on l'obtient en dérivant l'équation de la masse (première équation de (1.26)) par rapport à x_i et en la multipliant ensuite par $H \partial_i \ln H$. On somme alors sur i et on intègre le résultat sur \mathcal{D} .

Pour la seconde égalité, on multiplie l'équation des moments (seconde équation de (1.26)) par $\nu \nabla \ln H$:

$$\begin{aligned}
& \nu \int_{\mathcal{D}} (\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) \cdot \nabla H + 2\nu^2 \int_{\mathcal{D}} D(u) : \left(\nabla \nabla H - \frac{\nabla H \otimes \nabla H}{H} \right) + \nu A \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 H|^2 \\
& + \nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_0(H) u \cdot \nabla \ln H + \nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H) |u| u \cdot \nabla H + \nu \int_{\mathcal{D}} \frac{|\nabla H|^2}{Fr^2} + \nu \frac{\sin \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u^\perp \cdot \nabla H \\
& - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H H \operatorname{div} u - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla(H^2 u \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H \\
& + \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u e_1 \cdot \nabla H - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H = \nu \int_{\mathcal{D}} \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot \nabla H.
\end{aligned}$$

On simplifie alors cette expression en utilisant les relations :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} H \nabla u : \nabla \ln H \otimes \nabla \ln H &= \int_{\mathcal{D}} D(u) : \frac{\nabla H \otimes \nabla H}{H}, \\
\int_{\mathcal{D}} D(u) : \nabla \nabla H + \int_{\mathcal{D}} \nabla \operatorname{div} u \cdot \nabla H &= 0,
\end{aligned}$$

et en ajoutant l'équation (1.30) multipliée par $2\nu^2$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& \nu^2 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla \ln H|^2 + \nu \int_{\mathcal{D}} \frac{|\nabla H|^2}{Fr^2} + \nu A \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 H|^2 + \nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_0(H) u \cdot \nabla \ln H \\
& + \nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H) |u| u \cdot \nabla H + \nu \frac{\sin \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u^\perp \cdot \nabla H - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H H \operatorname{div} u \\
& - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla(H^2 u \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H + \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u e_1 \cdot \nabla H \\
& + \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H = I,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I &= -\nu \int_{\mathcal{D}} (\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) \cdot \nabla H + \nu \int_{\mathcal{D}} \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot \nabla H, \\ I &= -\nu \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} u \cdot \nabla H + \nu \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : {}^t \nabla u + \nu \int_{\mathcal{D}} \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot \nabla H, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 1.5.

□

Preuve de la proposition 1.4.

Grâce au lemme 1.5, nous pouvons démontrer la proposition.

On réécrit l'équation (1.31) sous la forme :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u + 2\nu \nabla \ln H|^2 + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_0(H) u \cdot \nabla \ln H + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H) |u| u \cdot \nabla H \\ &\quad + 2\nu A \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 H|^2 + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \frac{|\nabla H|^2}{Fr^2} + 2\nu \frac{\sin \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u^\perp \cdot \nabla H \\ &\quad - 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H H \operatorname{div} u - 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla (H^2 u \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H \\ &\quad + 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u e_1 \cdot \nabla H - 2\nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_{\mathcal{D}} u \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^2 + 2\nu \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : {}^t \nabla u + 2\nu \int_{\mathcal{D}} \left(A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right) \cdot \nabla H, \end{aligned}$$

et on ajoute l'inégalité d'énergie (1.28) ; on obtient alors l'inégalité (1.29), ce qui clôture la démonstration.

□

Estimations *a priori*.

Soient $(H_k)_{k \geq 1}$ et $(u_k)_{k \geq 1}$ deux suites de solutions faibles du système (1.26) et satisfaisant les relations (1.28) et (1.29).

L'inégalité d'énergie (1.28) donne classiquement les résultats suivants :

- $(H_k)_k$ dans $L^\infty(0, T; H_{per}^1(\mathcal{D}))$,
- $(\sqrt{H_k} u_k)_k$ dans $L^\infty(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$,
- $(\sqrt{H_k} (\nabla u_k + {}^t \nabla u_k))_k$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^4)$,
- $(\tilde{\alpha}_0(H_k)^{1/2} u_k)_k$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$,
- $(\tilde{\alpha}_1(H_k)^{1/3} H_k^{1/3} u_k)_k$ dans $L^3(0, T; (L_{per}^3(\mathcal{D}))^2)$.

On montre alors que l'on a de nouvelles informations, en particulier grâce à l'énergie d'entropie (1.29) :

- $(\partial_t H_k)_k$ dans $L^\infty(0, T; W_{per}^{-1, q}(\mathcal{D}))$, $\forall q < 2$,
- $(u_k)_k$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$,

- $\left(h_k^{1/3}u_k\right)_k$ dans $L^3(0, T; (L_{per}^s(\mathcal{D}))^2)$, $\forall s < 3$,
- $(\tilde{\alpha}_0(H_k))_k$ dans $L^\infty(0, T; H_{per}^1(\mathcal{D}))$,
- $(\tilde{\alpha}_1(H_k))_k$ dans $L^\infty(0, T; H_{per}^1(\mathcal{D}))$,
- $(\nabla \sqrt{H_k})_k$ dans $L^\infty(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$,
- $(H_k)_k$ dans $L^2(0, T; H_{per}^2(\mathcal{D}))$,
- $(\sqrt{H_k}(\nabla u_k - {}^t \nabla u_k))_k$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^4)$ et donc, avec les résultats déduits de l'énergie, $(\sqrt{H_k} \nabla u_k)_k$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^4)$,
- $(H_k u_k)_k$ dans $L^2(0, T; (W_{per}^{1,1}(\mathcal{D}))^2)$.

Preuve.

Pour les cinq premières estimations, nous renvoyons le lecteur à [54]. Il s'agit principalement de réécrire les différents termes en fonction des quantités qui sont déjà bornées par l'inégalité d'énergie.

Les estimations suivantes reposent sur l'inégalité d'entropie (1.29), mais les termes en *cosinus* compliquent leur écriture : on ne peut pas déduire directement que $(\sqrt{H_k} \nabla u_k)_k$ est bornée dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^4)$. Nous sommes amenés à combiner des termes du membre de droite avec les termes du membre de gauche.

Tout d'abord, à partir des résultats obtenus sur H_k et u_k , on sait que $(H_k u_k)_k$ est bornée dans $L^2(0, T; (L_{per}^p(\mathcal{D}))^2)$ pour tout $p < 2$. On peut aussi écrire :

$$\left| \nu \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \tilde{\alpha}_1(H_k) u |u| \cdot \nabla H_k \right| \leq C \|\sqrt{H_k} u_k\|_{L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)}^2 + \delta_1 \|\sqrt{H_k} \nabla u_k\|_{L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^4)}^2.$$

Alors, pour δ_1 suffisamment petit et ν_1 positif, on peut montrer, en majorant les différents termes comme dans [54], que, pour tout $p < 2$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} H_k |u_k + \nu \nabla \ln H_k|^2 + \nu_1 \int_0^t \int_{\mathcal{D}} H_k |\nabla u - {}^t \nabla u|^2 + \nu \frac{\sin \theta}{Ro} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} u_k^\perp \cdot \nabla H_k \\ & - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H_k H_k \operatorname{div} u_k - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \nabla (H_k^2 u_k \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H_k \\ & + \nu A \int_0^t \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 H_k|^2 + \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u_k e_1 \cdot \nabla H_k - \nu \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_0^t \int_{\mathcal{D}} u_k \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H_k \\ & \leq C_1 + C_2 \left\| A \nabla \Delta b - \frac{\nabla b}{Fr^2} \right\|_{(L^2(\mathcal{D}))^2} \left(\|H_k u_k\|_{L^2(0, T; (L^p(\mathcal{D}))^2)} + \|\nabla H_k\|_{L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)} \right). \end{aligned}$$

Il nous reste donc à étudier les termes de Coriolis :

- $\left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} u_k^\perp \cdot \nabla H_k \right| \leq \|u_k\|_{L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)} \|\nabla H_k\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)}$,
- $\left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} e_1 \cdot \nabla H_k H_k \operatorname{div} u_k \right| \leq \int_0^t \|\nabla H_k\|_{(L^2(\mathcal{D}))^2} \|\sqrt{H_k}\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \|\sqrt{H_k} \operatorname{div} u_k\|_{L^2(\mathcal{D})}$
 $\leq \frac{1}{4\delta_2} \int_0^t \|\nabla H_k\|_{(L^2(\mathcal{D}))^2}^2 \|\sqrt{H_k}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}^2 + \delta_2 \int_0^t \|\sqrt{H_k} \operatorname{div} u_k\|_{L^2(\mathcal{D})}^2$.

Pour δ_2 suffisamment petit, le dernier terme peut être absorbé dans le membre de gauche. Regardons maintenant l'autre terme : avec les estimations déduites de l'énergie,

nous avons juste besoin de contrôler $\int_0^t \|\sqrt{H_k}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}^2$.

Pour tout $\delta > 0$, on peut écrire : $\|\sqrt{H_k}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}^2 = \|H_k\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \leq \|H_k\|_{H^{1+\delta}(\mathcal{D})}$.

Grâce aux injections de Sobolev, nous avons : $\|\sqrt{H_k}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}^2 \leq \|\nabla H_k\|_{L^{2/(1-\delta)}(\mathcal{D})}$.

Nous pouvons également utiliser une inégalité de type Sobolev “précisée” (voir [14]) :

$$\forall 2 \leq p < +\infty, \quad \|f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^2}^{2/p} \|f\|_{H^1}^{1-2/p}, \quad (1.32)$$

qui nous donne les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{H_k}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}^2 &\leq \|\nabla H_k\|_{L^{2/(1-\delta)}(\mathcal{D})} \leq C_\delta \|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{D})}^{1-\delta} \|\nabla H_k\|_{H^1(\mathcal{D})}^\delta \\ &\leq C'_\delta \|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{D})}^{(2-2\delta)/(2-\delta)} + \delta_3 \|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \delta_3 \|\Delta H_k\|_{L^2(\mathcal{D})}^2. \end{aligned}$$

Quand nous intégrons ce résultat en temps pour δ_3 petit, nous pouvons passer le dernier terme dans le membre de gauche, et les autres termes sont bornés.

- $\left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \nabla(H_k^2 u_k \cdot e_1) \cdot \nabla \ln H_k \right| = \left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} 2u_k \cdot e_1 (\nabla H_k)^2 + H_k \nabla H_k \cdot \nabla(u_k \cdot e_1) \right|.$

La seconde partie du membre de droite peut être contrôlée exactement comme le terme que nous venons de détailler. La première partie demande en revanche plus de précisions.

Nous commençons par écrire la relation : $\int_{\mathcal{D}} u_k \cdot e_1 (\nabla H_k)^2 \leq \|u_k\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\nabla H_k\|_{L^4(\mathcal{D})}^2$.

Avec la propriété (1.32), nous avons l'inégalité suivante :

$$\|\nabla H_k\|_{L^4(\mathcal{D})}^2 \leq C \|\nabla H_k\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\nabla H_k\|_{H^1(\mathcal{D})}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} 2u_k \cdot e_1 (\nabla H_k)^2 \right| &\leq C' \|\nabla H_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{D}))}^2 \|u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{D}))}^2 \\ &\quad + \delta_4 \|\nabla H_k\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{D}))}^2 + \delta_4 \|\Delta H_k\|_{L^2(0,T;L^2(\mathcal{D}))}^2, \end{aligned}$$

et pour δ_4 suffisamment petit, le dernier terme peut être absorbé à gauche.

- $\left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \nabla b \cdot u_k e_1 \cdot \nabla H_k \right| \leq \|\nabla b\|_{(L^\infty(\mathcal{D}))^2} \|u_k\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^2)} \|H_k\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{D}))},$
- $\left| \int_0^t \int_{\mathcal{D}} u_k \cdot e_1 \nabla b \cdot \nabla H_k \right| \leq \|\nabla b\|_{(L^\infty(\mathcal{D}))^2} \|u_k\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^2)} \|H_k\|_{L^\infty(0,T;H^1(\mathcal{D}))}.$

En regroupant toutes ces relations, on obtient trois nouvelles estimations sur $(\nabla \sqrt{H_k})_k$, $(H_k)_k$ et sur $(\sqrt{H_k} \nabla u_k)_k$.

La dernière, $(H_k u_k)_k$ dans $L^2(0, T; (W_{p\text{er}}^{1,1}(\mathcal{D}))^2)$, est alors obtenue en développant $\nabla(H_k u_k)$ en $\sqrt{H_k} (\sqrt{H_k} \nabla u_k) + u_k \cdot \nabla H_k$.

□

Une propriété supplémentaire sur $H_k u_k$.

Pour passer à la limite, nous avons besoin de meilleures estimations sur le produit $H_k u_k$. On a la proposition :

Proposition 1.7. *Il existe une constante C positive telle que*

$$\|\tau_\eta(H_k u_k) - H_k u_k\|_{L^\infty(0, T - \eta; (W_{per}^{1, \infty}(\mathcal{D}))')} \leq C\eta^{1/3},$$

où τ_η , pour tout $\eta > 0$, est l'opérateur de translation $\tau_\eta v(t, x) = v(t + \eta, x)$.

Si pour $1 \leq q \leq +\infty$ et $0 < \varsigma < 1$, pour un espace de Banach E , on note $N_q^\varsigma(0, T; E)$ l'espace de Nikolskii défini par :

$$N_q^\varsigma(0, T; E) = \left\{ f \in L^q(0, T; E) \text{ t. q. } \exists C > 0 : \|\tau_\eta f - f\|_{L^\infty(0, T - \eta; E)} \leq C\eta^\varsigma \right\},$$

alors la propriété précédente signifie que $(H_k u_k)_k$ est borné dans $N_\infty^{1/3}(0, T; W_{per}^{1, \infty})$.

Preuve.

On multiplie le système (1.26) par une fonction test Ψ et on l'intègre sur \mathcal{D} , puis de t à $t + \eta$. En majorant les différents termes (voir [54]), on trouve :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{D}} (\tau_\eta(H_k u_k)(t) - H_k u_k(t)) \Psi \right| &\leq \left(\int_t^{t+\eta} g(s) ds \right) \|\Psi\|_{W^{1, \infty}(\mathcal{D})} + \frac{\sin \theta}{Ro} \left| \int_t^{t+\eta} \int_{\mathcal{D}} H_k u_k^\perp \Psi \right| \\ &+ \frac{\varepsilon \cos \theta}{2Ro} \left| \int_t^{t+\eta} \int_{\mathcal{D}} H_k^2 \operatorname{div} u_k e_1 \Psi \right| + \frac{\varepsilon \cos \theta}{Ro} \left| \int_t^{t+\eta} \int_{\mathcal{D}} H_k \nabla b \cdot u_k e_1 \Psi \right| \\ &+ \frac{\varepsilon \cos \theta}{Ro} \left| \int_t^{t+\eta} \int_{\mathcal{D}} H_k (u_k)_1 \nabla b \Psi \right| + \frac{\varepsilon \cos \theta}{Ro} \left| \int_t^{t+\eta} \int_{\mathcal{D}} H_k^2 (u_k)_1 \nabla \Psi \right|, \end{aligned}$$

où la fonction g est bornée dans $L^{3/2}(0, T)$. Etudions maintenant les nouveaux termes :

- $\left| \int_{\mathcal{D}} H_k u_k^\perp \Psi \right| \leq \|H_k u_k\|_{L^1(\mathcal{D})} \|\Psi\|_{L^\infty}$,
- $\left| \int_{\mathcal{D}} H_k^2 \operatorname{div} u_k e_1 \Psi \right| \leq \|H_k\|_{L^6(\mathcal{D})} \|\sqrt{H_k}\|_{L^6(\mathcal{D})} \|\sqrt{H_k} \operatorname{div} u_k\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\Psi\|_{L^6(\mathcal{D})}$,
- $\left| \int_{\mathcal{D}} H_k \nabla b \cdot u_k e_1 \Psi \right| \leq \|H_k u_k\|_{L^1(\mathcal{D})} \|\nabla b\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \|\Psi\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$,
- $\left| \int_{\mathcal{D}} H_k (u_k)_1 \nabla b \Psi \right| \leq \|H_k u_k\|_{L^1(\mathcal{D})} \|\nabla b\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \|\Psi\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$,
- $\left| \int_{\mathcal{D}} H_k^2 (u_k)_1 \nabla \Psi \right| \leq \|\sqrt{H_k} u_k\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\sqrt{H_k}\|_{L^8(\mathcal{D})} \|H_k\|_{L^8(\mathcal{D})} \|\nabla \Psi\|_{L^4(\mathcal{D})}$.

On peut donc en conclure qu'il existe \tilde{g} bornée dans $L^{3/2}(\mathcal{D})$ telle que :

$$\|\tau_\eta(H_k u_k)(t) - H_k u_k(t)\|_{(W_{per}^{1, \infty}(\mathcal{D}))'} \leq \eta^{1/3} \|\tilde{g}\|_{L^{3/2}(0, T)}.$$

□

1.2.2 Convergence et compacité.

Nous pouvons maintenant passer à la limite dans les différents termes. Dans [54], les auteurs montrent que tous, excepté ceux liés au *cosinus* de la latitude qui ne sont pas présents dans leur modèle, convergent vers la limite attendue. Nous n'étudions donc ici que la convergence de nos nouveaux termes.

Propriétés de H_k et u_k .

Tout d'abord, nous savons que $u_k \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$. En ce qui concerne la suite $(H_k)_k$, vu que nous avons prouvé que $\|H_k\|_{L^\infty(0, T; H^1(\mathcal{D}))} \leq C$ et $\|\partial_t H_k\|_{L^\infty(0, T; H^{-2}(\mathcal{D}))} \leq C$, avec les résultats de compacité présentés dans [66], on trouve $H_k \rightarrow H$ dans $\mathcal{C}^0(0, T; H^s(\mathcal{D}))$, pour tout $s < 1$. Enfin, en utilisant à la fois la Proposition 1.7 et les propriétés des espaces de Sobolev, on obtient $H_k u_k \rightarrow H u$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$.

Etude des nouveaux termes.

Pour les termes de Coriolis “classiques” en sinus, avec les résultats précédents on peut écrire : $H_k u_k^\perp \rightarrow H u^\perp$ dans $L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2)$.

Les termes qui font intervenir le fond ne posent pas plus de problèmes :

$$\begin{aligned} H_k \nabla b \cdot u_k e_1 &\rightarrow H \nabla b \cdot u e_1 \text{ dans } L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2), \\ \text{et } H_k (u_k)_1 \nabla b &\rightarrow H u_1 \nabla b \text{ dans } L^2(0, T; (L_{per}^2(\mathcal{D}))^2). \end{aligned}$$

Enfin, pour les deux derniers, on a :

$$(u_k)_1 H_k^2 \rightarrow u_1 H^2 \text{ dans } L^1(0, T; (L^1(\mathcal{D}))^2),$$

et, comme $\sqrt{H_k} \operatorname{div} u_k \rightarrow \sqrt{H} \operatorname{div} u$ in $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ et $H_k \rightarrow H$ dans $\mathcal{C}^0(0, T; H^s(\mathcal{D}))$, pour tout $s < 1$, on obtient

$$H_k^2 \operatorname{div} u_k e_1 \rightarrow H^2 \operatorname{div} u e_1 \text{ dans } L^1(0, T; L^1(\mathcal{D})).$$

1.2.3 Fin de la preuve.

On a montré que, d'une suite vérifiant les équations (1.28) et (1.29), on peut extraire une sous-suite qui converge fortement vers une solution faible de (1.26). Comme dans [17], on peut construire, par un procédé de régularisation, des suites de solutions approchées de (1.26), suffisamment régulières. En considérant de telles suites, on obtient classiquement le Théorème 1.2.

1.3 Ondes pour les fluides tournants.

Dans cette partie, nous renvoyons le lecteur à [51] (chapitres 4 et 9) pour l'étude des ondes sans effet cosinus.

On considère les équations de Saint-Venant non-dimensionnelles au second ordre avec effet cosinus et latitude constante, sans viscosité, sans tension de surface et sans frottement de fond :

$$\partial_t H + \operatorname{div}(H u) = 0, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(H u) + \operatorname{div}(H u \otimes u) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla H^2 &= \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla(u_1 H^2) + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H^2 e_1 \operatorname{div} u \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{Ro} H u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} H e_1 \nabla b \cdot u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1 H \nabla b - \frac{1}{Fr^2} H \nabla b. \end{aligned} \tag{1.34}$$

1.3.1 Conservation de la vorticité potentielle.

La vorticité est définie par $\varpi = \operatorname{curl} u = -\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2$. Ecrivons l'équation vérifiée par ϖ en prenant le *curl* de l'équation (1.34) :

$$\begin{aligned} \partial_t \operatorname{curl} u + u \cdot \nabla \operatorname{curl} u + \operatorname{curl} u \operatorname{div} u \\ = -\frac{\sin \theta}{Ro} \operatorname{div} u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \operatorname{curl} (H \nabla u_1 + 2u_1 \nabla h + He_1 \operatorname{div} u - 2e_1 \nabla b \cdot u), \end{aligned} \quad (1.35)$$

où l'on rappelle que h représente la surface libre, soit la somme $H + b$.

On peut alors écrire, grâce à l'équation (1.33) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= H \nabla u_1 + 2u_1 \nabla h + He_1 \operatorname{div} u - 2e_1 \nabla b \cdot u \\ &= \begin{pmatrix} H \partial_{x_1} u_1 + 2u_1 \partial_{x_1} h + H \operatorname{div} u - 2\partial_{x_1} b u_1 - 2\partial_{x_2} b u_2 \\ H \partial_{x_2} u_1 + 2u_1 \partial_{x_2} h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2u_2 \partial_{x_2} h - H \partial_{x_2} u_2 - 2\partial_t H \\ 2u_1 \partial_{x_2} h + H \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix} = 2\partial_{x_2} h u^\perp + H \partial_{x_2} u^\perp - 2\partial_t H e_1. \end{aligned}$$

Quand on en prend le *curl*, en utilisant la dérivée par rapport à la seconde variable x_2 de l'équation (1.33), on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathcal{A} &= 2\partial_{x_2} h \operatorname{div} u + 2u \cdot \nabla \partial_{x_2} h + H \operatorname{div} \partial_{x_2} u + \partial_{x_2} u \cdot \nabla H + 2\partial_t \partial_{x_2} H \\ &= \partial_{x_2} H \operatorname{div} u + u \cdot \nabla \partial_{x_2} H + 2\partial_{x_2} b \operatorname{div} u + 2u \cdot \nabla \partial_{x_2} b + \partial_t \partial_{x_2} H. \end{aligned}$$

On remplace alors cette égalité dans l'équation (1.35), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_t \varpi + u \cdot \nabla \varpi + \varpi \operatorname{div} u \\ = -\frac{\sin \theta}{Ro} \operatorname{div} u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} (\partial_{x_2} H \operatorname{div} u + u \cdot \nabla \partial_{x_2} H + 2\partial_{x_2} b \operatorname{div} u + 2u \cdot \nabla \partial_{x_2} b + \partial_t \partial_{x_2} H). \end{aligned}$$

ou encore, comme b représente le fond et donc ne dépend pas du temps,

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\varpi + \frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_2} (H + 2b) \right) + \left(\varpi + \frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_2} (H + 2b) \right) \operatorname{div} u = 0.$$

On multiplie cette équation par H et on y ajoute l'équation (1.33) multipliée par l'expression $(-2Ro \varpi - 2\sin \theta + \varepsilon \cos \theta \partial_{x_2} (H + 2b)) / (2Ro)$. On a alors la relation :

$$\begin{aligned} H (\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\varpi + \frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_2} (H + 2b) \right) \\ - \left(\varpi + \frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_2} (H + 2b) \right) (\partial_t + u \cdot \nabla) H = 0, \end{aligned}$$

et donc en divisant par H^2 ,

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) \left(\frac{2Ro \varpi + 2\sin \theta - \varepsilon \cos \theta \partial_{x_2} (H + 2b)}{2Ro H} \right) = 0.$$

La vorticité potentielle définie par $(2Ro \varpi + 2\sin \theta - \varepsilon \cos \theta \partial_{x_2} (H + 2b)) / (2Ro H)$ est donc conservée.

1.3.2 Modèle linéarisé et ondes de Poincaré.

On cherche le modèle linéarisé correspondant aux équations (1.33)-(1.34). On suppose que le fond est plat, c'est-à-dire $b \equiv 0$, et on linéarise autour de l'état $H = H^c$ (constant) et $u = 0$; on pose donc $H = H^c + \delta^p H^p$ et $u = \delta^p u^p$, avec $\delta^p \ll 1$ petite perturbation.

On remplace ces expressions dans les équations et on regarde le premier ordre en δ^p . Cela nous donne alors :

$$\partial_t H^p + H^c \operatorname{div} u^p = 0, \quad (1.36)$$

$$\partial_t u^p + \frac{1}{Fr^2} \nabla H^p = \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla u_1^p + \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} e_1 \operatorname{div} u^p - \frac{\sin \theta}{Ro} u^p \perp. \quad (1.37)$$

A partir de ces équations, on peut obtenir par exemple les ondes de Poincaré, aussi appelées ondes d'inertie-gravité. Pour cela, on écrit l'équation d'onde du second ordre, obtenue de la même façon que les équations pour les ondes acoustiques en dynamique des gaz.

On dérive par rapport au temps l'équation (1.36), et on utilise l'équation (1.37) pour exprimer le terme en $\operatorname{div} \partial_t u^p$:

$$\partial_t^2 H^p + H^c \operatorname{div} \left(-\frac{1}{Fr^2} \nabla H^p + \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla u_1^p + \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} e_1 \operatorname{div} u^p - \frac{\sin \theta}{Ro} u^p \perp \right).$$

On dérive une seconde fois en temps, pour obtenir

$$\partial_t^3 H^p = \frac{1}{Fr^2} H^c \Delta(\partial_t H^p) - \varepsilon H^{c2} \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_t \Delta u_1^p - \varepsilon H^{c2} \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_1} \partial_t \operatorname{div} u^p - H^c \frac{\sin \theta}{Ro} \partial_t \operatorname{curl} u^p.$$

On linéarise l'équation de conservation de la vorticité potentielle obtenue au paragraphe 1.3.1 en posant $\varpi = \delta^p \varpi^p = \delta^p \operatorname{curl} u^p$. On trouve :

$$\partial_t \varpi^p - \frac{\sin \theta}{Ro H^c} \partial_t H^p - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_2} \partial_t H^p = 0.$$

On a aussi les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \partial_t \operatorname{div} u^p &= -\frac{1}{H^c} \partial_{x_1} \partial_t (\partial_t H^p), \\ \partial_t \Delta u_1^p &= \partial_t (\partial_{x_1} \operatorname{div} u^p - \partial_{x_2} \varpi^p) = -\frac{1}{H^c} \partial_{x_1} \partial_t (\partial_t H^p) - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_2}^2 (\partial_t H^p) - \frac{\sin \theta}{Ro H^c} \partial_{x_2} (\partial_t H^p). \end{aligned}$$

On remplace ces trois identités dans le calcul de la dérivée troisième de H^p et on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 (\partial_t H^p) &= \frac{1}{Fr^2} H^c \Delta(\partial_t H^p) + \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{Ro} \partial_{x_1} \partial_t (\partial_t H^p) \\ &\quad + \left(\varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \right)^2 \partial_{x_2}^2 (\partial_t H^p) - \left(\frac{\sin \theta}{Ro} \right)^2 (\partial_t H^p), \end{aligned}$$

que l'on peut aussi réécrire

$$\left(\partial_t - \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{x_1} \right)^2 (\partial_t H^p) = \left(\frac{1}{Fr^2} H^c + \left(\varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \right)^2 \right) \Delta(\partial_t H^p) - \left(\frac{\sin \theta}{Ro} \right)^2 (\partial_t H^p).$$

On peut alors définir une fonction G^p telle que

$$H^p(x_1, x_2, t) = G^p(y_1, y_2, s) = G^p\left(x_1 + \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} t, x_2, t\right).$$

Les dérivées des fonctions H^p et G^p sont liées de la manière suivante :

$$\partial_{x_1} H^p = \partial_{y_1} G^p, \quad \partial_{x_2} H^p = \partial_{y_2} G^p, \quad \partial_t H^p = \partial_s G^p + \varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \partial_{y_1} G^p.$$

Cela nous permet d'écrire l'équation sur H^p sous la forme d'une équation de type Klein-Gordon :

$$\partial_s^2 G^p = \left(\frac{1}{Fr^2} H^c + \left(\varepsilon H^c \frac{\cos \theta}{2Ro} \right)^2 \right) (\partial_{y_1}^2 + \partial_{y_2}^2) G^p - \left(\frac{\sin \theta}{Ro} \right)^2 G^p,$$

avec $\mathcal{G}^p = (\varepsilon H^c \cos \theta / (2Ro) \partial_{y_1} + \partial_s) G^p$.

On peut également donner ces résultats sous forme dimensionnelle. L'équation avant changement de variables devient :

$$(\partial_t - H^c \Omega \cos \theta \partial_{x_1})^2 (\partial_t H^p) = \left(g H^c + (H^c \Omega \cos \theta)^2 \right) \Delta (\partial_t H^p) - (2\Omega \sin \theta)^2 (\partial_t H^p). \quad (1.38)$$

Si on pose, par analogie avec ce que nous avons fait précédemment,

$$H^p(x_1, x_2, t) = G^p(y_1, y_2, s) = G^p(x_1 + H^c \Omega \cos \theta t, x_2, t),$$

on obtient :

$$\partial_s^2 G^p = \left(g H^c + (H^c \Omega \cos \theta)^2 \right) (\partial_{y_1}^2 + \partial_{y_2}^2) G^p - (2\Omega \sin \theta)^2 G^p, \quad (1.39)$$

où $\mathcal{G}^p = (H^c \Omega \cos \theta \partial_{y_1} + \partial_s) G^p$.

La relation de dispersion est la condition qui doit être vérifiée pour que

$$H^p(x, t) = H_0 \exp(i(k_1 x_1 + k_2 x_2 - \omega t))$$

soit solution de l'équation (1.38). Cela revient à chercher $G^p(y, s)$ solution de l'équation (1.39) sous la forme

$$G^p(y, s) = G_0 \exp(i(K_1 y_1 + K_2 y_2 - W s)),$$

avec $H_0 = G_0$, $K_1 = k_1$, $K_2 = k_2$ et $W = \omega + H^c \Omega \cos \theta k_1$.

Remarque 1.8. Pour respecter les conventions, nous utilisons ici les notations classiques dans le domaine des ondes, c'est-à-dire que k et K désignent les nombres d'onde, ω et W les pulsations.

On a donc :

$$\omega^2 + 2H^c \Omega \cos \theta k_1 \omega + (H^c \Omega \cos \theta k_1)^2 = (g H^c + (H^c \Omega \cos \theta)^2) |k|^2 + (2\Omega \sin \theta)^2,$$

ce qui donne la relation de dispersion

$$\omega(k) = -H^c \Omega \cos \theta k_1 \pm \sqrt{(g H^c + (H^c \Omega \cos \theta)^2) |k|^2 + (2\Omega \sin \theta)^2}, \quad (1.40)$$

ou bien

$$W(K) = \pm \sqrt{(g H^c + (H^c \Omega \cos \theta)^2) |K|^2 + (2\Omega \sin \theta)^2}. \quad (1.41)$$

On peut alors regarder sur un exemple le décalage dû à l'effet cosinus : on trace H^p avec comme paramètres $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $H^c = 1000$ m, $\Omega = 7 * 10^{-4}$ s⁻¹, $g = 9.81$ ms⁻² et $\theta = \pi/6$ ou $\pi/4$, et on compare cette fonction avec celle que l'on obtenait sans les termes en cosinus. On voit, sur les Figures 1.2 et 1.3, que le décalage est très important.

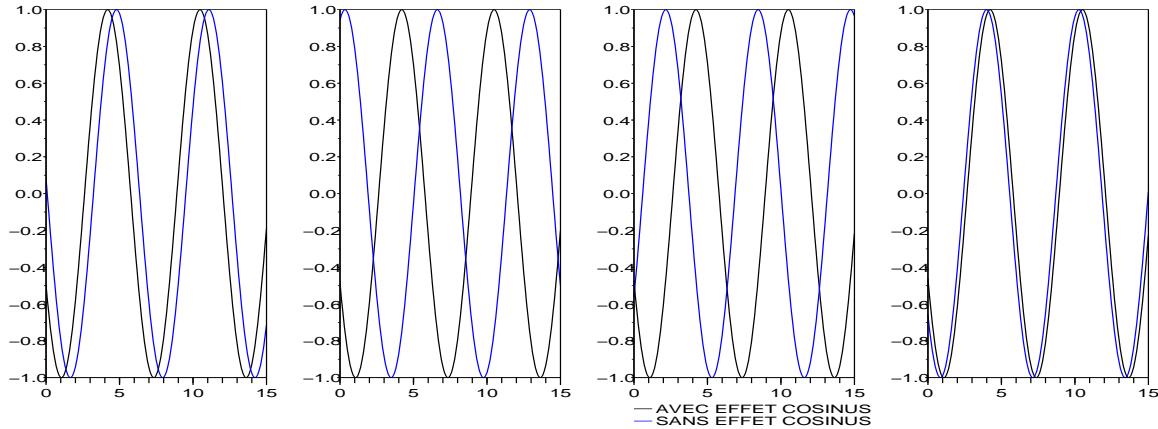


FIG. 1.2 – Onde avec et sans effet cosinus pour une latitude de 30° , aux temps 1s, 4s, 7s et 10s.

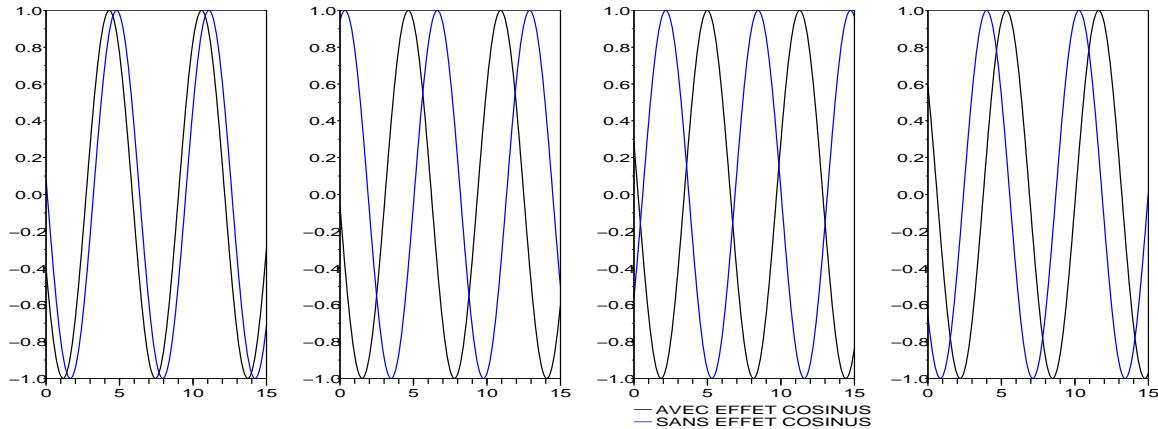


FIG. 1.3 – Onde avec et sans effet cosinus pour une latitude de 45° , aux temps 1s, 4s, 7s et 10s.

1.3.3 Ondes équatoriales.

Comme les nouveaux termes que nous avons obtenus dépendent du *cosinus* de la latitude, nous nous proposons de regarder les ondes équatoriales. Nous nous intéressons plus particulièrement aux ondes de Kelvin et aux ondes mixtes de Rossby-gravité ou ondes de Yanai.

Les ondes de Kelvin constituent une part importante des observations enregistrées dans l'océan équatorial. On prouve qu'elles sont piégées dans le guide d'onde équatorial et que leur vitesse dépend des termes en *cosinus*.

On étudie les flux parallèles à l'équateur, c'est-à-dire avec $u_2 = 0$, et on fait l'approximation

du plan β autour de $\theta_0 = 0$ dans les équations linéarisées (1.36)-(1.37) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\beta x_2 u_1^p &= -\frac{1}{Fr^2} \partial_{x_2} H^p + \varepsilon \frac{1}{2Ro} H^c \partial_{x_2} u_1^p, \\ \partial_t u_1^p + \frac{1}{Fr^2} \partial_{x_1} H^p &= \varepsilon \frac{1}{Ro} H^c \partial_{x_1} u_1^p, \\ \partial_t H^p + H^c \partial_{x_1} u_1^p &= 0.\end{aligned}$$

On définit les variables :

$$q = \frac{c_2}{H^c} H^p + u_1^p \quad \text{et} \quad r = \frac{c_1}{H^c} H^p - u_1^p.$$

Elles satisfont :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{vers l'est}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial t} - c_2 \frac{\partial r}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{vers l'ouest}),$$

où les vitesses sont définies par :

$$c_1 = \sqrt{\frac{H^c}{Fr^2} + \varepsilon^2 \frac{H^{c2}}{(2Ro)^2} - \varepsilon \frac{1}{2Ro} H^c} \quad \text{et} \quad c_2 = \sqrt{\frac{H^c}{Fr^2} + \varepsilon^2 \frac{H^{c2}}{(2Ro)^2} + \varepsilon \frac{1}{2Ro} H^c}.$$

Une combinaison de ces deux ondes donne une solution générale de notre problème.

Cherchons maintenant leur structure en la seconde variable d'espace. Pour les ondes qui vont vers l'est, c'est-à-dire $r \equiv 0$, si on écrit $q = G(x_2)q(x_1 - c_1 t)$ on trouve l'expression de G :

$$G(x_2) = G_0 \exp\left(\frac{-\beta}{c_1 + c_2} x_2^2\right),$$

ce qui signifie que les ondes sont piégées dans le guide d'onde équatorial.

Pour les ondes vers l'ouest ($q \equiv 0$), la solution obtenue n'est pas physique.

Pour conclure, les ondes de Kelvin se propagent uniquement vers l'est à la vitesse c_1 , qui est modifiée par l'effet cosinus (termes en gras). Elles sont non dispersives et contenues dans le guide d'onde équatorial.

Passons aux ondes mixtes de Rossby-gravité ou ondes de Yanai. On écrit u_1^p et H^p en fonction des variables caractéristiques q et r définies ci-dessus. On modifie donc les équations de Saint-Venant linéarisées en :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} + c_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) \frac{\partial u_2^p}{\partial x_2} - \beta x_2 u_2^p &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial t} - c_2 \frac{\partial r}{\partial x_1} + \left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) \frac{\partial u_2^p}{\partial x_2} + \beta x_2 u_2^p &= 0, \\ \frac{\partial u_2^p}{\partial t} + \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \frac{\partial(q + r)}{\partial x_2} + \frac{\beta x_2(c_1 q - c_2 r)}{c_1 + c_2} + \frac{c_1 - c_2}{2(c_1 + c_2)} \frac{\partial(c_1 q - c_2 r)}{\partial x_2} &= 0.\end{aligned}$$

A nouveau, on cherche des solutions pour $r \equiv 0$ ce qui implique

$$\left(\frac{c_1 + c_2}{2}\right) \frac{\partial u_2^p}{\partial x_2} + \beta x_2 u_2^p = 0.$$

On obtient alors une expression de u_2^p : $u_2^p = A(x_1, t) \exp(-\beta x_2^2/(c_1 + c_2))$ et q de la forme $q = B(x_1, t) x_2 \exp(-\beta x_2^2/(c_1 + c_2))$, où A et B sont liés par :

$$\partial_t B + c_1 \partial_{x_1} B = 2\beta A, \quad \partial_t A = -\frac{c_1}{2} B.$$

Finalement, on trouve une expression pour le champ des vitesses :

$$u^p = \begin{pmatrix} -\frac{2\omega x_2}{c_1} \exp\left(\frac{-\beta}{c_1+c_2} x_2^2\right) \sin(kx_1 - \omega t) \\ \exp\left(\frac{-\beta}{c_1+c_2} x_2^2\right) \sin(kx_1 - \omega t) \end{pmatrix},$$

avec la relation de dispersion : $\omega(\omega - kc_1) = \beta c_1$.

Ces ondes sont dispersives, mais, comme dans le cas des ondes de Kelvin, elles sont piégées dans le guide d'onde équatorial.

Nous voyons donc que les nouveaux termes en *cosinus* de l'équation de Saint-Venant visqueuse modifient les ondes de Kelvin et les ondes mixtes de Rossby-gravité : à une latitude moyenne ou à l'équateur, l'effet cosinus ne peut pas être négligé.

Conclusion.

En tenant compte de la force de Coriolis complète, nous avons donc proposé un nouveau modèle pour le système de Saint-Venant visqueux avec un “effet cosinus”. D'un point de vue théorique, nous avons montré que, même si quelques difficultés surviennent dans les calculs, les propriétés d'existence de solutions ne sont pas modifiées par ces termes supplémentaires. En revanche, lorsque nous étudions les ondes pour les fluides tournants, nous observons une modification de leurs vitesses. Il semblerait donc que ces nouveaux termes ne soient pas anodins ; nous poursuivons cette étude au Chapitre 6 en nous intéressant aux équations Quasi-Géostrophiques obtenues à partir de ce modèle, ainsi qu'au Chapitre 9 avec les équations des lacs.

Chapitre 2

Effets des conditions au fond et à la surface.

La nature des conditions aux bords en hydrodynamique a été largement débattue au XIX^e siècle. Beaucoup de grands noms de la dynamique des fluides ont donné leur avis sur ce sujet durant leur carrière, dont BERNOULLI, EULER, COULOMB, DARCY, NAVIER, STOKES, Jusqu'à maintenant, de nombreuses études ont été réalisées en utilisant la condition de non-glisser, qui stipule que les trois composantes de la vitesse du fluide sur la surface solide sont égales aux composantes respectives de la vitesse de la surface. En raison de la cohérence entre les résultats expérimentaux et les théories obtenues en supposant la condition de non-glisser pendant un siècle, cette condition n'a pas été remise en cause. De nos jours, malgré des expériences qui montrent une violation apparente de cette condition, de nombreux ouvrages de dynamique des fluides ne mentionnent pas le fait que cette condition de non-glisser aux bords reste une hypothèse.

Ainsi, dans une première partie, nous nous intéressons aux différentes conditions au fond qui sont couramment utilisées, et à leur influence sur le modèle de Saint-Venant.

Dans une seconde partie, nous nous penchons sur les conditions à la surface en fixant au fond une condition de Navier. Nous proposons ici un modèle qui tient compte de l'évaporation. Cela se traduit par l'ajout d'un terme dans l'équation qui régit l'évolution de la surface libre. Cependant, l'expression de ce terme dépend du cas physique considéré. Nous ne le précisons donc pas ici, mais nous pouvons nous rendre compte qu'il intervient dans la formule de la vitesse. Ainsi, outre les nouveaux termes qui apparaissent dans les équations de la divergence et des moments intégrées, les formules de frottement de fond sont également modifiées.

2.1 Choix des conditions au fond.

En 1823, dans son traité sur le mouvement des fluides *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides* [58], NAVIER a été le premier à introduire la caractérisation du glissement, toujours utilisée de nos jours. Il s'agit d'une relation linéaire, qui peut être formulée comme suit : la composante de la vitesse du fluide tangente à la surface U_{\parallel} est proportionnelle au tenseur des contraintes à la surface. Pour un flux newtonien avec un fond plat, cela s'écrit :

$$U_{\parallel} = u = \ell n \cdot (\nabla U + {}^t \nabla U) \cdot (1 - n \cdot n) = \ell n \cdot \nabla U + \ell n \cdot {}^t \nabla U - (\ell n \cdot \nabla U + \ell n \cdot {}^t \nabla U) \cdot n \cdot n,$$

où n est la normale à la surface dirigée vers le liquide, et ℓ est la distance de glissement.

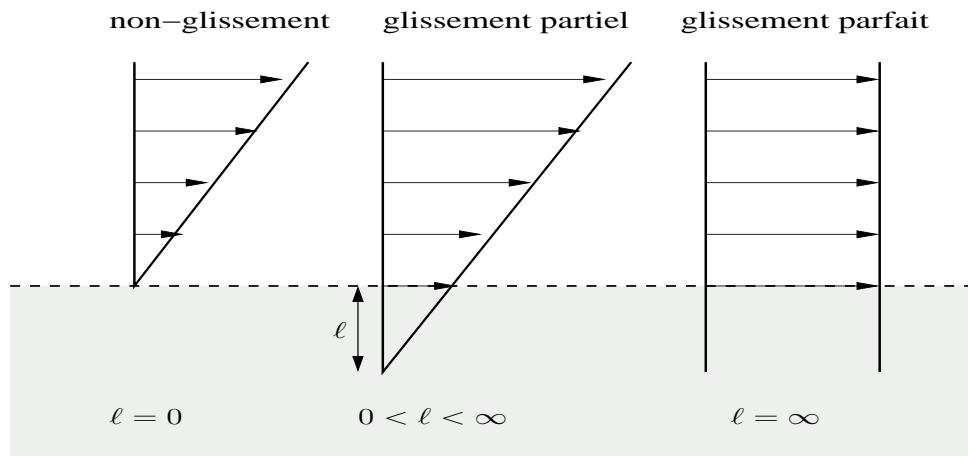


FIG. 2.1 – Glissement de longueur ℓ .

La composante normale à la surface de la vitesse est naturellement nulle, puisque l'on a une surface solide imperméable, donc :

$$w = 0.$$

Dans la suite, nous présentons les cas $\ell = 0$ (non-glisement) et $\ell > 0$ (glissement) plus en détail.

2.1.1 Condition de non-glisement $\ell = 0$.

La condition de non-glisement, largement discutée dans [43], est utilisée par exemple dans [69] par J.-P. VILA qui obtient un système de Saint-Venant sur un plan incliné, ou bien dans [13] où les auteurs étendent ces calculs à un fond variable. Elle est donnée par :

$$u = 0, \quad w = 0.$$

De telles conditions aux bords sont naturelles pour les personnes qui travaillent en mathématiques appliquées par exemple. Comme nous l'avons souligné auparavant, il est important de comprendre l'effet des conditions aux bords sur le processus asymptotique qui donne les modèles de Saint-Venant.

2.1.2 Condition au bord de type Navier $\ell \neq 0$.

En revanche, dans [34], les auteurs étudient le système en eaux peu profondes avec des conditions au fond de type Navier définies par :

$$(\sigma n)_{\tan} = \frac{1}{\ell} u = k u, \quad w = 0,$$

où k est le coefficient de frottement. Ces conditions aux bords sont parfois appelées lois de parois. L'idée générale de ces lois de parois est de modifier la couche limite, en remplaçant la condition classique de non-glissement par une relation plus complexe entre les variables et leurs dérivées. Notons que, depuis quelques années, de nombreux articles de mathématiques appliquées ont été publiés sur ce point, par exemple [40], [1] et plus récemment [21] où une approche unifiée est proposée ainsi que des conditions aux bords plus générales. Nous voyons donc que le choix de ces conditions n'est pas aussi évident que ce que l'on aurait pu penser et qu'il dépend du processus physique que l'on étudie.

2.1.3 Influence de ces conditions au fond sur le modèle de Saint-Venant.

Dans le Chapitre 1, nous avons présenté l'obtention du modèle en eaux peu profondes avec une condition de type Navier. Nous pouvons nous intéresser à ce même modèle mais avec une condition de non-glissement au fond. Ce n'est pas tout à fait ce qui a été étudié dans [69] : dans ce travail, l'auteur considère un écoulement sur un plan incliné, et utilise le repère lié à ce plan. La conséquence principale de ce choix est que le poids se décompose alors sur les deux axes, et change radicalement les expressions des différents ordres de la vitesse. Par exemple, si Φ est l'angle d'inclinaison, le premier ordre de la vitesse est défini par :

$$\partial_z^2 u^0 = -\sin \Phi, \quad \partial_z u^0|_{z=h} = 0, \quad u^0|_{z=b} = 0.$$

Cependant, l'auteur arrive à expliciter tous les termes et obtient un système de type Saint-Venant, mais avec des coefficients inhabituels dus au repère incliné. Enfin, il faut aussi noter que ce résultat, qui dépend de Φ , ne peut pas être utilisé directement pour un fond plat car l'un des coefficients ne peut être obtenu que si l'angle d'inclinaison n'est pas nul.

Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à reprendre les calculs précédents et regarder les modifications apportées par ce changement de condition au fond. En étudiant un peu plus précisément le problème avec condition de non-glissement, nous nous rendons compte que la vitesse est nulle. Nous choisissons donc d'ajouter à ce modèle un terme source f d'ordre $1/\varepsilon$ (on peut le supposer constant en espace et en temps pour simplifier les calculs), c'est-à-dire que nous considérons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + w \partial_z u &= -\nabla_x p + 2\mu \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \mu \partial_z^2 u + \mu \nabla_x(\partial_z w) - 2\Omega \sin \theta u^\perp \\ &\quad - 2\Omega \cos \theta w e_1 - f, \\ \partial_t w + u \cdot \nabla_x w + w \partial_z w &= -\partial_z p + \mu \partial_z(\operatorname{div}_x u) + \mu \Delta_x w + 2\mu \partial_z^2 w + 2\Omega \cos \theta u_1 - g, \\ \operatorname{div}_x u + \partial_z w &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions :

$$\sigma n = a \kappa n, \quad \partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w, \quad \text{en } z = h(t, x),$$

et au fond ($z = 0$) :

$$u = 0, \quad w = 0.$$

Si on pose $f = u_{car}^2 f' / (L_{car} \varepsilon)$, on peut réécrire ces égalités en variables non-dimensionnelles, en enlevant les primes :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + w \partial_z u &= -\nabla_x p + 2\nu \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u + \nu \nabla_x(\partial_z w) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{Ro} u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} w e_1 - \frac{f}{\varepsilon}, \\ \partial_t w + u \cdot \nabla_x w + w \partial_z w &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z p + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z(\operatorname{div}_x u) + \nu \Delta_x w + \frac{2\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 w \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\cos \theta}{Ro} u_1 - \frac{1}{\varepsilon^2 Fr^2}, \\ \operatorname{div}_x u + \partial_z w &= 0, \end{aligned}$$

avec à la surface libre :

$$p \nabla_x h + A \kappa \nabla_x h - 2\nu D_x(u) \nabla_x h + \nu \nabla_x w + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u = 0, \quad (2.1)$$

$$p + A \kappa - 2\nu \partial_z w + \varepsilon^2 \nu \nabla_x w \cdot \nabla_x h + \nu \partial_z u \cdot \nabla_x h = 0, \quad (2.2)$$

$$\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w, \quad (2.3)$$

et au fond :

$$u = 0, \quad w = 0. \quad (2.4)$$

Enfin, l'approximation hydrostatique nous permet de simplifier ces expressions et d'obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + w \partial_z u &= -\nabla_x p + 2\nu \operatorname{div}_x(D_x(u)) + \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u + \nu \nabla_x(\partial_z w) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{Ro} u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} w e_1 - \frac{f}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\partial_z p = \nu \partial_z(\operatorname{div}_x u) + 2\nu \partial_z^2 w - \frac{1}{Fr^2} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div}_x u + \partial_z w = 0. \quad (2.7)$$

Les mêmes calculs que ceux du Chapitre 1 nous donnent les deux premiers ordres de la pression :

$$p(t, x, z) = \frac{1}{Fr^2} (h(t, x) - z) - A \kappa - \nu (\operatorname{div}_x u)_{|z=h(t,x)} - \nu \operatorname{div}_x u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_h^z u_1 + O(\varepsilon^2). \quad (2.8)$$

Avant de passer aux équations de Saint-Venant proprement dites, il nous reste à intégrer l'équation des moments sur la hauteur d'eau :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^h u + \operatorname{div}_x \int_0^h (u \otimes u) + \nabla_x \int_0^h p &= -A \kappa \nabla_x h - \frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z u_{|z=0} - \nu \nabla_x w_{|z=0} \\ &\quad + 2\nu \operatorname{div}_x \int_0^h D_x(u) - \frac{\sin \theta}{Ro} \int_0^h u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_0^h w e_1 - \frac{h}{\varepsilon} f, \end{aligned} \quad (2.9)$$

ainsi que l'équation de divergence nulle :

$$\partial_t h(t, x) + \operatorname{div}_x \int_0^{h(t,x)} u = 0. \quad (2.10)$$

Système de Saint-Venant au premier ordre.

Nous considérons désormais que $\nu = \varepsilon\nu_0$, $A = \varepsilon A_0$, nous réalisons un développement asymptotique des variables ($u = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots$ et de même pour w , h et p) et nous remplaçons tous ces termes dans les égalités (2.1) à (2.10).

Les équations (2.5), (2.1) et (2.4) écrites au premier ordre nous donnent :

$$\partial_z^2 u = \frac{f}{\nu_0} + O(\varepsilon), \quad (\partial_z u)_{|z=h} = O(\varepsilon), \quad u_{|z=0} = O(\varepsilon),$$

donc au premier ordre la vitesse s'écrit :

$$u^0(t, x, z) = \frac{f}{\nu_0} z \left(\frac{z}{2} - h^0(t, x) \right).$$

Nous pouvons alors en déduire les expressions de la vitesse verticale (grâce à l'équation (2.7) et la condition d'imperméabilité au fond) :

$$w^0(t, x, z) = - \int_0^z \operatorname{div}_x u^0(t, x, s) ds = z^2 \frac{f}{2\nu_0} \cdot \nabla_x h^0(t, x),$$

ainsi que le premier ordre de la pression en utilisant (2.8) :

$$p^0(t, x, z) = \frac{1}{Fr^2} (h^0(t, x) - z).$$

Notre but est maintenant de remplacer ces valeurs dans l'équation des moments intégrée (2.9) et d'obtenir une égalité à $O(\varepsilon)$ près. Nous commençons par exprimer l'intégrale de la vitesse sur la hauteur d'eau :

$$\int_0^h u = h\bar{u} = \int_0^{h^0} u^0 + O(\varepsilon) = -\frac{f}{3\nu_0} (h^0)^3 + O(\varepsilon).$$

Cela nous permet de calculer le terme non-linéaire en fonction de la moyenne de la vitesse sur la hauteur d'eau \bar{u} :

$$\int_0^h u \otimes u = \frac{f \otimes f}{\nu_0^2} \int_0^{h^0} s^2 \left(\frac{s}{2} - h^0 \right)^2 + O(\varepsilon) = \frac{f \otimes f}{\nu_0^2} \frac{2}{15} (h^0)^5 + O(\varepsilon) = \frac{6}{5} h^0 \bar{u} \otimes \bar{u} + O(\varepsilon).$$

Le terme de pression, quant à lui, s'écrit :

$$\int_0^h p = \int_0^{h^0} p^0 + O(\varepsilon) = \frac{1}{2Fr^2} (h^0)^2 + O(\varepsilon).$$

Il nous reste deux termes à étudier : $(\nu_0/\varepsilon) \partial_z u_{|z=0}$ et hf/ε . Cependant, pour les approcher à l'ordre ε , il est nécessaire de connaître la vitesse et la hauteur d'eau à $O(\varepsilon^2)$ près. On écrira alors :

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z u_{|z=0} &= \frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z u^0_{|z=0} + \nu_0 \partial_z u^1_{|z=0} + O(\varepsilon) = -\frac{f}{\varepsilon} h^0 + \nu_0 \partial_z u^1_{|z=0} + O(\varepsilon), \\ \frac{hf}{\varepsilon} &= \frac{f}{\varepsilon} h^0 + fh^1 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Il nous faut donc utiliser l'ordre suivant pour espérer obtenir l'équation des moments intégrée au premier ordre et avoir ainsi l'équation de Saint-Venant.

En allant au second ordre, nous obtenons le second ordre de la vitesse :

$$\nu_0 \partial_z^2 (u^0 + \varepsilon u^1) = f + \varepsilon \left(\partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla_x u^0 + w^0 \partial_z u^0 + \nabla_x p^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} u^{0\perp} \right),$$

avec les conditions

$$\nu_0 \partial_z (u^0 + \varepsilon u^1) \Big|_{z=h} = -\varepsilon p^0 \Big|_{z=h} \nabla_x h^0 = O(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad u^1 \Big|_{z=0} = 0.$$

En intégrant entre h et z , on peut trouver l'expression de $\partial_z u^1$:

$$\begin{aligned} \int_h^z \nu_0 \partial_s^2 (u^0 + \varepsilon u^1) \, ds &= \nu_0 \partial_z (u^0 + \varepsilon u^1) \\ &= \int_h^z f \, ds + \varepsilon \int_{h^0}^z \left(\partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla_x u^0 + w^0 \partial_s u^0 + \nabla_x p^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} u^{0\perp} \right) \, ds + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Cela nous donne, en simplifiant la dérivée de u^0 :

$$\begin{aligned} \nu_0 \partial_z u^1 &= \int_{h^0}^z \left(-\frac{f}{\nu_0} s \partial_t h^0 + \frac{f}{\nu_0} s \left(\frac{s}{2} - h^0 \right) \left(-\frac{f}{\nu_0} s \right) \nabla_x h^0 + \frac{s^2}{2\nu_0} f \nabla_x h^0 \frac{f}{\nu_0} (s - h^0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{Fr^2} \nabla_x h^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} s \left(\frac{s}{2} - h^0 \right) \frac{f^\perp}{\nu_0} \right) \, ds + \int_{h^0 + \varepsilon h^1}^{h^0} \frac{f}{\varepsilon} \, ds \\ &= \left(\frac{1}{6\nu_0^2} f^2 h^0 \nabla_x h^0 + \frac{\sin \theta}{6\nu_0 Ro} f^\perp \right) z^3 - \left(\frac{f}{2\nu_0} \partial_t h^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} \frac{f^\perp h^0}{2\nu_0} \right) z^2 + \frac{z}{Fr^2} \nabla_x h^0 \\ &\quad + \frac{f}{2\nu_0} \partial_t h^0 (h^0)^2 - \frac{1}{6\nu_0^2} f^2 (h^0)^4 \nabla_x h^0 - \frac{h^0}{Fr^2} \nabla_x h^0 + \frac{1}{3\nu_0} \frac{\sin \theta}{Ro} f^\perp (h^0)^3 - f h^1. \end{aligned}$$

Nous avons donc la dérivée en z de la vitesse u_1 au fond, qui n'est autre que le coefficient constant de l'expression précédente. On en déduit également u^1 :

$$\begin{aligned} \nu_0 u^1 &= \int_0^z \nu_0 \partial_s u^1(t, x, s) \, ds, \\ u_1 &= \left(\frac{1}{24\nu_0^3} f^2 h^0 \nabla_x h^0 + \frac{\sin \theta}{24\nu_0^2 Ro} f^\perp \right) z^4 - \left(\frac{f}{6\nu_0^2} \partial_t h^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} \frac{f^\perp h^0}{6\nu_0^2} \right) z^3 + \frac{\nabla_x h^0}{2\nu_0 Fr^2} z^2 \\ &\quad + \left(\frac{f}{2\nu_0^2} \partial_t h^0 (h^0)^2 - \frac{1}{6\nu_0^3} f^2 (h^0)^4 \nabla_x h^0 - \frac{h^0 \nabla_x h^0}{\nu_0 Fr^2} + \frac{\sin \theta}{3\nu_0^2 Ro} f^\perp (h^0)^3 - \frac{f h^1}{\nu_0} \right) z. \end{aligned}$$

Nous sommes donc maintenant en mesure d'écrire le système de Saint-Venant au premier ordre :

$$\partial_t h^0 - \frac{f}{\nu_0} (h^0)^2 \cdot \nabla_x h^0 = 0, \tag{2.11}$$

$$\partial_t h^1 - \frac{f}{2\nu_0} \cdot \nabla_x ((h^0)^2 h^1) + \operatorname{div}_x \int_0^{h^0} u^1 = 0, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \partial_t (h^0 \bar{u}) + \frac{6}{5} \operatorname{div}_x (h^0 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{Fr^2} h^0 \nabla_x h^0 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} h^0 \bar{u}^\perp \\ &\quad - \left(\frac{f}{2\nu_0} \partial_t h^0 (h^0)^2 - \frac{1}{6\nu_0^2} f^2 (h^0)^4 \nabla_x h^0 - \frac{h^0}{Fr^2} \nabla_x h^0 + \frac{1}{3\nu_0} \frac{\sin \theta}{Ro} f^\perp (h^0)^3 \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Notons que les termes en ε^{-1} s'annulent :

$$-h^0 f - \nu_0 \partial_z u^0|_{z=0} = -h^0 f - \nu_0 \left(-\frac{h^0 f}{\nu_0} \right) = 0,$$

ainsi que les termes en fh^1 . On peut encore calculer la moyenne de la vitesse au second ordre dans le but de simplifier le membre de droite de l'égalité (2.13) :

$$\begin{aligned} h\bar{u} &= \int_0^{h^0 + \varepsilon h^1} u^0 + \varepsilon \int_0^{h^0} u^1 + O(\varepsilon) \\ &= \frac{f}{\nu_0} \left(-\frac{(h^0)^3}{3} - \varepsilon \frac{(h^0)^2 h^1}{2} \right) - \frac{3\varepsilon}{40\nu_0^3} f^2 (h^0)^6 \nabla_x h^0 + \frac{5\varepsilon}{24\nu_0^2} f \partial_t h^0 (h^0)^4 \\ &\quad + \varepsilon \frac{2}{15} \frac{\sin \theta}{Ro \nu_0^2} f^\perp (h^0)^5 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{(h^0)^3 \nabla_x h^0}{\nu_0 Fr^2} - \varepsilon \frac{f}{\nu_0} \frac{(h^0)^2 h^1}{2} + O(\varepsilon) \\ &= -\frac{f}{\nu_0} \frac{h^3}{3} + \varepsilon h \left(-\frac{3}{40\nu_0^3} f^2 (h^0)^5 \nabla_x h^0 + \frac{5}{24\nu_0^2} f \partial_t h^0 (h^0)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} \frac{\sin \theta}{Ro \nu_0^2} f^\perp (h^0)^4 - \frac{(h^0)^2 \nabla_x h^0}{3\nu_0 Fr^2} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Cela nous permet de réécrire l'équation (2.13) sous la forme :

$$\partial_t(h^0 \bar{u}) + \frac{6}{5} \operatorname{div}_x(h^0 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{Fr^2} h^0 \nabla_x h^0 = -\frac{\sin \theta}{Ro} h^0 \bar{u}^\perp - \frac{fh^0}{\varepsilon} - h^1 f - \frac{3\nu_0 \bar{u}}{\varepsilon h^0} - \tau^1, \quad (2.14)$$

où τ^1 est défini par :

$$\tau^1 = -\frac{1}{8} \frac{f}{\nu_0} \partial_t h^0 (h^0)^2 + \frac{7}{120} \frac{f^2}{\nu_0^2} (h^0)^4 \nabla_x h^0 - \frac{1}{15\nu_0} \frac{\sin \theta}{Ro} f^\perp (h^0)^3 + O(\varepsilon).$$

Système de Saint-Venant au second ordre.

Pour voir les termes visqueux, il nous faut écrire l'équation de Saint-Venant au second ordre. Pour cela, nous calculons les approximations de la vitesse verticale et de la pression à $O(\varepsilon^2)$ près, puis nous les remplaçons dans l'équation des moments intégrée (2.9). On a donc :

$$\begin{aligned} w^1 &= - \int_0^z \operatorname{div}_x u^1 \\ &= -\frac{1}{120\nu_0^3} f^2 \cdot \nabla_x (h^0 \nabla_x h^0) z^5 + \frac{1}{4} \left(\frac{f}{6\nu_0^2} \cdot \partial_t \nabla_x h^0 + \frac{\sin \theta}{Ro} \frac{f^\perp \cdot \nabla_x h^0}{6\nu_0^2} \right) z^4 - \frac{\Delta_x h^0}{6\nu_0 Fr^2} z^3 \\ &\quad - \left(\frac{f}{2\nu_0^2} \nabla_x \left(\partial_t h^0 (h^0)^2 \right) - \frac{1}{6\nu_0^3} f^2 \operatorname{div}_x \left((h^0)^4 \nabla_x h^0 \right) - \frac{\operatorname{div}_x (h^0 \nabla_x h^0)}{\nu_0 Fr^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \theta}{\nu_0^2 Ro} f^\perp (h^0)^2 \cdot \nabla_x h^0 - \frac{f \cdot \nabla_x h^1}{\nu_0} \right) \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

et

$$p^1 = \frac{1}{Fr^2} (h^1 - z) - \varepsilon A_0 \Delta_x h^0 + \varepsilon f \nabla h^0 (h^0 + z) + \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \frac{f_1}{\nu_0} \left(\frac{z^3}{6} - \frac{h^0 z^2}{2} + \frac{(h^0)^3}{3} \right),$$

Nous pouvons ainsi donner le second ordre des différentes variables. Cependant, comme au premier ordre, nous voyons qu'il faut aller à l'ordre suivant (u^2) pour obtenir l'approximation voulue de $\partial_z u|_{z=0}$, c'est-à-dire pour écrire l'équation (2.9) à $O(\varepsilon^2)$ près. Nous ne jugeons pas nécessaire de donner ici la suite de ces calculs. Nous préferons présenter le résultat au premier ordre dans le cas d'une terme source f dépendant des variables horizontales (x_1, x_2) .

Cas d'un terme source non constant.

Nous reprenons donc les calculs précédents mais avec f qui dépend de x . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} u^0(t, x, z) &= \frac{f(x)}{\nu_0} z \left(\frac{z}{2} - h^0(t, x) \right), \\ w^0(t, x, z) &= -\frac{\operatorname{div}_x f(x)}{6\nu_0} z^3 + \frac{h^0(t, x) \operatorname{div}_x f(x)}{2\nu_0} z^2 + \frac{f(x)}{2\nu_0} \cdot \nabla_x h^0(t, x) z^2, \\ p^0(t, x, z) &= \frac{1}{Fr^2} (h^0(t, x) - z). \end{aligned}$$

Cela nous permet de calculer les différents termes intervenant dans l'équation des moments intégrée :

$$\begin{aligned} \int_0^h u = h\bar{u} &= \int_0^{h^0} u^0 + O(\varepsilon) = -\frac{f(x)}{3\nu_0} (h^0)^3 + O(\varepsilon), \\ \int_0^h u \otimes u &= \frac{f(x) \otimes f(x)}{\nu_0^2} \int_0^{h^0} s^2 \left(\frac{s}{2} - h^0 \right)^2 + O(\varepsilon) = \frac{6}{5} h^0 \bar{u} \otimes \bar{u} + O(\varepsilon), \\ \int_0^h p &= \int_0^{h^0} p^0 + O(\varepsilon) = \frac{1}{2Fr^2} (h^0)^2 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Enfin, nous recherchons également l'expression du second ordre de la vitesse, qui nous donne $\partial_z u^1|_{z=0}$ ainsi que la moyenne de la vitesse à $O(\varepsilon^2)$ près :

$$\begin{aligned} u^1(t, x, z) &= \\ &\frac{z^6}{30} \left(\frac{f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{4\nu_0^3} - \frac{f(x) \operatorname{div}_x f(x)}{6\nu_0^3} \right) + \frac{z^5}{20} \left(\frac{2h^0 f(x) \operatorname{div}_x f(x)}{3\nu_0^3} - \frac{h^0 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{\nu_0^3} \right) \\ &+ \frac{z^4}{12} \left(\frac{h^0 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{\nu_0^3} + \frac{(f(x))^2 h^0 \nabla_x h^0}{2\nu_0^3} - \frac{(h^0)^2 f(x) \operatorname{div}_x f(x)}{2\nu_0^3} + \frac{\sin \theta f(x)^\perp}{Ro} \frac{f(x)^\perp}{2\nu_0^2} \right) \\ &+ \frac{z^3}{6} \left(-\frac{f(x) \partial_t h^0}{\nu_0^2} - \frac{\sin \theta f(x)^\perp}{Ro} \frac{f(x)^\perp}{\nu_0^2} h^0 \right) + \frac{z^2}{2} \frac{\nabla_x h^0}{\nu_0 Fr^2} \\ &+ z \left(\frac{(h^0)^5 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{5\nu_0^3} - \frac{2}{15} \frac{(h^0)^5 f(x) \operatorname{div}_x f(x)}{\nu_0^3} - \frac{(h^0)^4 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{3\nu_0^3} \right. \\ &\left. - \frac{(h^0)^4 (f(x))^2 \nabla_x h^0}{6\nu_0^3} + \frac{(h^0)^3 \sin \theta f(x)^\perp}{Ro} \frac{f(x)^\perp}{3\nu_0^2} + \frac{(h^0)^2 f(x) \partial_t h^0}{2\nu_0^2} - \frac{h^0 \nabla_x h^0}{\nu_0 Fr^2} - \frac{f(x) h^1}{\nu_0} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, le système de Saint-Venant au premier ordre avec terme source est donné par :

$$\partial_t h^0 - \frac{f(x)}{\nu_0} (h^0)^2 \cdot \nabla_x h^0 - \frac{\operatorname{div}_x f(x)}{3\nu_0} (h^0)^3 = 0, \quad (2.15)$$

$$\partial_t h^1 - \frac{f}{2\nu_0} \cdot \nabla_x \left((h^0)^2 h^1 \right) - \frac{\operatorname{div}_x f(x)}{2\nu_0} (h^0)^2 h^1 + \operatorname{div}_x \int_0^{h^0} u^1 = 0, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (h^0 \bar{u}) + \frac{6}{5} \operatorname{div}_x (h^0 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{Fr^2} h^0 \nabla_x h^0 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} h^0 \bar{u}^\perp \\ &- \left(\frac{(h^0)^5 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{5\nu_0^2} - \frac{2}{15} \frac{(h^0)^5 f(x) \operatorname{div}_x f(x)}{\nu_0^2} - \frac{(h^0)^4 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{3\nu_0^2} \right. \\ &\left. - \frac{(h^0)^4 (f(x))^2 \nabla_x h^0}{6\nu_0^2} + \frac{(h^0)^3 \sin \theta}{Ro} \frac{f(x)^\perp}{3\nu_0} + \frac{(h^0)^2 f(x) \partial_t h^0}{2\nu_0} - \frac{h^0 \nabla_x h^0}{Fr^2} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Si l'on utilise la moyenne de la vitesse pour simplifier la dernière équation, on obtient :

$$\partial_t (h^0 \bar{u}) + \frac{6}{5} \operatorname{div}_x (h^0 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{Fr^2} h^0 \nabla_x h^0 = -\frac{\sin \theta}{Ro} h^0 \bar{u}^\perp - \frac{f(x) h^0}{\varepsilon} - h^1 f(x) - \frac{3\nu_0 \bar{u}}{\varepsilon h^0} - \tau^1, \quad (2.18)$$

où τ^1 est défini par :

$$\begin{aligned} \tau^1 &= -\frac{1}{8} \frac{f(x)}{\nu_0} \partial_t h^0 (h^0)^2 + \frac{7}{120} \frac{f(x)^2}{\nu_0^2} (h^0)^4 \nabla_x h^0 - \frac{1}{15\nu_0} \frac{\sin \theta}{Ro} f(x)^\perp (h^0)^3 \\ &+ \frac{7}{60} \frac{(h^0)^4 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{\nu_0^2} + \frac{13}{168} \frac{(h^0)^5 f(x) \operatorname{div}_x f(x)}{\nu_0^2} - \frac{11}{140} \frac{(h^0)^5 f(x) \cdot \nabla_x f(x)}{\nu_0^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Lors de l'obtention de ce modèle de Saint-Venant, nous avons donc modifié les conditions au fond : la condition de Navier utilisée au Chapitre 1 a été remplacée par la condition de non-glissement. La principale différence dans les calculs est que, dans le second cas, nous ne pouvons pas simplifier la condition au fond. Bien au contraire, celle-ci nous oblige à aller chercher l'ordre suivant de la vitesse pour qu'elle soit au même ordre que les autres termes. Le système de Saint-Venant obtenu diffère alors nettement de celui obtenu avec la condition de Navier.

2.2 Un modèle avec évaporation en surface.

La prise en compte de l'évaporation a été présentée dans [59] par exemple. Pour obtenir le système de Saint-Venant avec évaporation, il faut tout d'abord expliciter des conditions à la surface qui expriment le changement de phase : une certaine masse de liquide est transformée en vapeur. On montre alors qu'il existe E , fonction complexe de la température, de la pression et des paramètres du fluide, telle que, en variables non-dimensionnelles, la nouvelle condition à la surface libre (qui remplace (1.6)) soit :

$$\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w - E.$$

Cela modifie donc l'équation des moments intégrée (1.14) et l'équation de la divergence (1.15) comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_b^h u + Eu|_{z=h} + \operatorname{div}_x \int_b^h (u \otimes u) + \nabla_x \int_b^h p &= -A \kappa \nabla_x h - \nabla_x b p|_{z=b} - \left(\frac{K}{\varepsilon} u + K_t H u |u| \right)|_{z=b} \\ &+ \nu \nabla_x b (2\partial_z w + \nabla_x b \cdot \partial_z u)|_{z=b} + 2\nu \operatorname{div}_x \int_b^h D_x(u) - \frac{\sin \theta}{Ro} \int_b^h u^\perp - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \int_b^h w e_1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

et

$$\partial_t h(t, x) + \operatorname{div}_x \int_{b(x)}^{h(t, x)} u + E|_{z=h} = 0. \quad (2.20)$$

Passons maintenant aux systèmes de Saint-Venant aux premier et second ordres. Notons que seules ces équations sont modifiées et que nous pouvons conserver, en grande partie, les résultats du Chapitre 1. La différence n'intervient que lorsque l'on remplace tous les termes dans les nouvelles équations intégrées.

2.2.1 Système de Saint-Venant avec évaporation au premier ordre.

Comme précédemment, nous effectuons un développement asymptotique des variables. Nous obtenons également que, au premier ordre, u ne dépend pas de z . Enfin, la formule de p reste inchangée. Nous avons alors le système de Saint-Venant avec évaporation au premier ordre en variables non-dimensionnelles :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_x (H^0 u^0) + E|_{z=h} = 0, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (H^0 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^0 \otimes u^0) + \frac{1}{2 Fr^2} \nabla_x (H^0)^2 &= \\ -\frac{1}{Fr^2} H^0 \nabla_x b^0 - K_0 u^0 - \frac{\sin \theta}{Ro} H^0 u^0 \perp - Eu^0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Notons enfin qu'il est cohérent de ne pas obtenir de conservation d'énergie puisqu'il y a transformation de la matière par changement de phase.

2.2.2 Système de Saint-Venant avec évaporation au second ordre.

Passons maintenant au second ordre : l'équation de la divergence devient

$$\partial_t \mathbf{H}^1 + \operatorname{div}_x (\mathbf{H}^1 \bar{\mathbf{u}}^1) + E|_{z=h} = O(\varepsilon^2). \quad (2.23)$$

Le premier ordre étant modifié, la dérivée seconde de u est donnée par :

$$\frac{\nu}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u = \frac{E - K_0}{H^0} u^0 + O(\varepsilon),$$

ce qui change la vitesse u en

$$u = \mathbf{u}^1|_{z=b} \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} (z - b^0) \left(1 - \frac{z - b^0}{2H^0} \right) + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^z \left(\int_b^s E \right) ds \right) + O(\varepsilon^2);$$

sa moyenne est alors :

$$\bar{u} = \mathbf{u}^1|_{z=b} \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{\nu_0} \frac{H^0}{3} + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^h \left(\int_b^z \left(\int_b^s E \right) ds \right) dz \right) + O(\varepsilon^2),$$

et sa valeur à la surface :

$$u|_{z=h} = \mathbf{u}^1|_{z=b} \left(1 + \varepsilon \frac{K_0}{2\nu_0} H^0 + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^h \left(\int_b^s E \right) ds \right) + O(\varepsilon^2).$$

On peut donc écrire le système de Saint-Venant visqueux non-dimensionnel avec terme d'évaporation :

$$\partial_t(\mathbf{H}^1 \bar{u}) + \operatorname{div}_x(\mathbf{H}^1 \bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla_x(\mathbf{H}^1)^2 = -\tilde{\alpha}_0(H) \bar{u} - \tilde{\alpha}_1(H) \mathbf{H}^1 \bar{u} |\bar{u}| \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & + \varepsilon A_0 \mathbf{H}^1 \nabla_x \Delta_x \mathbf{H}^1 + \varepsilon A_0 \mathbf{H}^1 \nabla_x \Delta_x b + 2\varepsilon \nu_0 \nabla_x(\mathbf{H}^1 \operatorname{div}_x \bar{u}) + 2\varepsilon \nu_0 \operatorname{div}_x(\mathbf{H}^1 D_x \bar{u}) \\ & + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla_x (\bar{u}_1(\mathbf{H}^1)^2) + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} (\mathbf{H}^1)^2 e_1 \operatorname{div}_x \bar{u} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \mathbf{H}^1 e_1 \nabla_x b \cdot \bar{u} \\ & - \frac{\sin \theta}{Ro} \mathbf{H}^1 \bar{u}^\perp - \nabla_x b \left(\frac{\mathbf{H}^1}{Fr^2} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} \bar{u}_1 \mathbf{H}^1 \right) - E \tilde{\alpha}_2(H) \bar{u} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.25)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0(H) &= \frac{K_0}{1 + \frac{\varepsilon K_0}{\nu_0} \frac{\mathbf{H}^1}{3} + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^h \left(\int_b^z \left(\int_b^s E \right) ds \right) dz}, \\ \tilde{\alpha}_1(H) &= \frac{\varepsilon K_{0t}}{\left(1 + \frac{\varepsilon K_0}{\nu_0} \frac{\mathbf{H}^1}{3} + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^h \left(\int_b^z \left(\int_b^s E \right) ds \right) dz \right)^2}, \\ \tilde{\alpha}_2(H) &= \frac{1 + \varepsilon \frac{K_0}{2\nu_0} H^0 + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^h \left(\int_b^s E \right) ds}{1 + \frac{\varepsilon K_0}{\nu_0} \frac{\mathbf{H}^1}{3} + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \int_b^h \left(\int_b^z \left(\int_b^s E \right) ds \right) dz}. \end{aligned}$$

Nous ne pouvons pas simplifier plus ce modèle, il faudra l'adapter en fonction de l'expression de l'évaporation, qui dépend du cas physique considéré.

Conclusion.

Dans un premier temps, nous avons étudié le cas du système de Saint-Venant avec condition de non-glissement au fond : les principales difficultés liées à ce choix sont la nécessité d'ajouter un terme source à l'équation, ainsi que le besoin d'avoir une approximation de la vitesse à un ordre supérieur par rapport au cas avec frottement. Cependant, nous arrivons à écrire le modèle correspondant, modèle bien différent de celui obtenu au Chapitre 1.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux conditions à la surface, en ajoutant de l'évaporation. Le problème que nous rencontrons ici est de savoir comment exprimer ce terme : en effet, il dépend du cas que l'on considère. C'est pour cela que nous ne pouvons pas préciser plus le modèle, l'évaporation devra être spécifiée suivant l'application choisie.

Chapitre 3

Effets du tenseur des contraintes : exemple de la loi d'Oldroyd B.

Beaucoup de fluides non-newtoniens qui sont étudiés en rhéologie ont, en plus d'un comportement visqueux non-linéaire, des propriétés élastiques. Les écoulements de tels liquides, communément appelés fluides viscoélastiques, ont été caractérisés par de nombreux modèles ces cinquante dernières années. Les mathématiciens se sont également penchés sur les problèmes d'existence de solutions de ces modèles.

Notre but, dans ce chapitre, est d'étudier le système de Saint-Venant pour des fluides incompressibles qui suivent une loi d'Oldroyd B.

Dans une première partie, nous définissons précisément la loi d'Oldroyd B. Nous reprenons alors les calculs du Chapitre 1 et nous étudions le système de Saint-Venant visqueux pour un tel type de fluide. Nous prouvons qu'un terme qui dépend du paramètre r , rapport entre l'élasticité et la viscosité, doit être ajouté.

Dans une seconde partie, nous nous intéressons au caractère bien posé du système linéaire correspondant. Pour cela, nous calculons la transformée de Fourier en espace de nos équations : nous nous ramenons ainsi à un problème de valeurs propres. L'étude de la limite de leur partie réelle nous permet de donner la condition pour laquelle le système est linéairement bien posé.

Dans le but de décrire le comportement des fluides viscoélastiques, on a défini la loi d'Oldroyd-B. L'équation constitutive est une interpolation entre un comportement purement visqueux et un comportement purement élastique. On introduit donc un paramètre r compris entre 0 et 1 qui représente le rapport entre l'élasticité et la viscosité : lorsque r est nul, l'équation constitutive est celle de Newton, si r vaut 1, on obtient le modèle de Maxwell (voir [26]). Cette loi de Oldroyd est alors donnée par :

$$\sigma = -p\text{Id} + \tau = -p\text{Id} + 2\mu(1-r)D(U) + \boldsymbol{\sigma},$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie

$$\lambda(\partial_t \boldsymbol{\sigma} + U \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} + g_\alpha(\nabla U, \boldsymbol{\sigma})) + \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{\sigma} = 2\mu r D(U),$$

avec μ , viscosité du fluide, et λ , temps de relaxation, des constantes positives. La fonction \mathbf{F} sera choisie ultérieurement et l'application g_α , pour $\alpha \in [-1, 1]$ satisfait :

$$g_\alpha(\nabla U, \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot W(U) - W(U) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \alpha(\boldsymbol{\sigma} \cdot D(U) + D(U) \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

où $D(U)$ et $W(U)$ sont respectivement les parties symétriques et anti-symétriques du gradient de la vitesse.

3.1 Obtention du modèle.

Dans cette partie, nous reprenons les calculs effectués au Chapitre 1 mais en remplaçant le tenseur des contraintes newtonien par la loi d'Oldroyd. Il s'agit de l'étude proposée dans [9] pour les équations de Reynolds. Nous considérons le cas particulier $g_\alpha = 0$ et $\mathbf{F}(x) = 1$. Nous nous ramenons donc à la loi suivante :

$$\sigma = -p\text{Id} + 2\mu(1-r)D(U) + \boldsymbol{\sigma}, \text{ avec } \lambda(\partial_t \boldsymbol{\sigma} + U \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} = 2\mu r D(U).$$

Par ailleurs, nous négligeons la force de Coriolis et nous supposons que le fond est plat ($h = H$).

3.1.1 Mise sous forme non dimensionnelle des équations de Navier-Stokes.

Les équations de Navier-Stokes avec le tenseur d'Oldroyd explicité ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u + w \partial_z u + \nabla p &= \text{div}(2\mu(1-r)D_x(u)) + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_{xx} + \partial_z(\mu(1-r)(\partial_z u + \nabla w)) \\ &\quad + \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz}, \\ \partial_t w + u \cdot \nabla w + w \partial_z w + \partial_z p &= -g + \text{div}(\mu(1-r)(\partial_z u + \nabla w)) + \nabla \boldsymbol{\sigma}_{xz} \\ &\quad + \partial_z(2\mu(1-r)\partial_z w) + \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{zz}, \\ \text{div} u + \partial_z w &= 0, \end{aligned}$$

avec $\lambda(\partial_t \boldsymbol{\sigma} + U \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} = 2\mu r D(U)$ et $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{xx} & \boldsymbol{\sigma}_{xz} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xz} & \boldsymbol{\sigma}_{zz} \end{pmatrix}$.

Comme précédemment, nous supposons que la condition de Navier est vérifiée au fond, et à la surface nous posons $\sigma n = 0$ en plus de la condition cinématique (il n'y a pas de tension de surface).

Pour passer aux équations non-dimensionnelles, nous utilisons les variables définies au Chapitre 1 ainsi que $\boldsymbol{\sigma} = u_{car}^2 \boldsymbol{\sigma}'$. En enlevant les primes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u + w \partial_z u + \nabla p &= \operatorname{div} (2\nu(1-r)D_x(u)) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{xx} \\ &\quad + \nu(1-r) \left(\frac{\partial_z^2 u}{\varepsilon^2} + \partial_z \nabla w \right) + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 (\partial_t w + u \cdot \nabla w + w \partial_z w) + \partial_z p &= -\frac{1}{Fr^2} + \operatorname{div} (\nu(1-r)(\partial_z u + \varepsilon^2 \nabla w)) + \varepsilon \nabla \boldsymbol{\sigma}_{xz} \\ &\quad + 2\nu(1-r) (\partial_z^2 w) + \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{zz}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} u + \partial_z w = 0, \quad (3.3)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ donné par $\partial_t \boldsymbol{\sigma} + U \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu r}{\lambda} \begin{pmatrix} 2D_x(u) & \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u + \varepsilon \nabla w \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_z^t u + \varepsilon^t \nabla w & 2\partial_z w \end{pmatrix}$.

A la surface libre, nous avons :

$$p \nabla h - 2\nu(1-r) \nabla h D_x(u) + \nu(1-r) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z u + \nabla w \right) - \nabla h \boldsymbol{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_{xz} = 0, \quad (3.4)$$

$$p + \nu(1-r) \nabla h (\partial_z u + \varepsilon^2 \nabla w) - 2\nu(1-r) \partial_z w + \varepsilon \nabla h \boldsymbol{\sigma}_{xz} - \boldsymbol{\sigma}_{zz} = 0, \quad (3.5)$$

$$\partial_t h + u \cdot \nabla h = w, \quad (3.6)$$

et au fond ($z = 0$) :

$$w = 0, \quad (3.7)$$

$$Ku - \nu(1-r) \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_z u + \varepsilon \nabla w \right) - \boldsymbol{\sigma}_{xz} = 0. \quad (3.8)$$

3.1.2 Approximation hydrostatique.

Nous continuons ces calculs en faisant l'approximation hydrostatique. Cela nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u + w \partial_z u + \nabla p &= \operatorname{div} (2\nu(1-r)D_x(u)) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{xx} + \nu(1-r) \left(\frac{\partial_z^2 u}{\varepsilon^2} + \partial_z \nabla w \right) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\partial_z p = -\frac{1}{Fr^2} + \operatorname{div} (\nu(1-r)\partial_z u) + \varepsilon \nabla \boldsymbol{\sigma}_{xz} + 2\nu(1-r) (\partial_z^2 w) + \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{zz}, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{div} u + \partial_z w = 0, \quad (3.11)$$

A la surface libre, la première équation (3.4) se réécrit :

$$\nu(1-r) \partial_z u = -\varepsilon^2 \left(p \nabla h - 2\nu(1-r) \nabla h D_x(u) + \nu(1-r) \nabla w - \nabla h \boldsymbol{\sigma}_{xx} + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_{xz} \right).$$

Cette condition nous sert à simplifier la seconde équation (3.5) :

$$\begin{aligned} p - 2\nu(1-r) \partial_z w &= -\nu(1-r) \nabla h \partial_z u - \varepsilon^2 \nu(1-r) \nabla h \cdot \nabla w - \varepsilon \nabla h \cdot \boldsymbol{\sigma}_{xz} + \boldsymbol{\sigma}_{zz} \\ &= -\varepsilon^2 \nabla h \cdot \left(\nu(1-r) \nabla w + \nu(1-r) \frac{\partial_z u}{\varepsilon^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{xz}}{\varepsilon} \right) + \boldsymbol{\sigma}_{zz} \\ &= -\varepsilon^2 \nabla h (2\nu(1-r) \nabla h D_x(u) - p \nabla h + \nabla h \boldsymbol{\sigma}_{xx}) + \boldsymbol{\sigma}_{zz}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne les premiers ordres de la pression :

$$p - 2\nu(1-r)\partial_z w - \boldsymbol{\sigma}_{zz} = O(\varepsilon^2) \text{ en } z = h. \quad (3.12)$$

La condition (3.6) reste inchangée, tout comme les conditions au fond.

On intègre maintenant l'équation (3.10) entre h et z en utilisant (3.12) ; on trouve :

$$p(t, x, z) = \frac{1}{Fr^2}(h - z) - \nu(1-r)\operatorname{div}u(z) - \nu(1-r)\operatorname{div}u(h) + \boldsymbol{\sigma}_{zz} + \varepsilon \int_h^z \nabla \boldsymbol{\sigma}_{xz}. \quad (3.13)$$

Enfin, on écrit l'équation des moments (3.9) intégrée entre 0 et h :

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_0^h u - \partial_t h \ u|_{z=h} + \operatorname{div} \int_0^h u \otimes u - (u \cdot \nabla h) u|_{z=h} + (uw)|_{z=h} - (uw)|_{z=0} + \nabla \int_0^h p \\ &= \nabla h p|_{z=h} + 2\nu(1-r)\operatorname{div} \int_0^h D_x(u) - 2\nu(1-r)D_x(u)|_{z=h} \cdot \nabla h + \operatorname{div} \int_0^h \boldsymbol{\sigma}_{xx} \\ & \quad - \boldsymbol{\sigma}_{xx}|_{z=h} \cdot \nabla h + \frac{\nu(1-r)}{\varepsilon^2} \partial_z u|_{z=h} - \frac{\nu(1-r)}{\varepsilon^2} \partial_z u|_{z=0} \\ & \quad + \nu(1-r)\nabla w|_{z=h} - \nu(1-r)\nabla w|_{z=0} + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_{xz}|_{z=h} - \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_{xz}|_{z=0}. \end{aligned}$$

Grâce aux conditions à la surface et au fond, on obtient :

$$\partial_t \int_0^h u + \operatorname{div} \int_0^h u \otimes u + \nabla \int_0^h p = -\frac{1}{\varepsilon} Ku|_{z=0} + 2\nu(1-r)\operatorname{div} \int_0^h D_x(u) + \operatorname{div} \int_0^h \boldsymbol{\sigma}_{xx}. \quad (3.14)$$

Nous fixons alors les différents coefficients en fonction de ε pour obtenir le système de Saint-Venant visqueux avec la loi d'Oldroyd.

3.1.3 Système de Saint-Venant.

On considère désormais que $\nu = \varepsilon\nu_0$, $K = \varepsilon K_0$ et $\lambda = \varepsilon\lambda_0$. On développe les variables en fonction de ε et on commence par chercher le système de Saint-Venant au premier ordre.

Système de Saint-Venant au premier ordre.

En réécrivant l'équation (3.9), on obtient la relation suivante sur u^0 :

$$\partial_z^2 u^0 = -\frac{1}{\nu_0(1-r)} \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz}^0 + O(\varepsilon),$$

et avec les conditions aux bords (3.4) et (3.8), on trouve :

$$(\partial_z u^0)|_{z=h} = -\frac{1}{\nu_0(1-r)} \boldsymbol{\sigma}_{xz}^0|_{z=h} + O(\varepsilon), \quad (\partial_z u^0)|_{z=0} = -\frac{1}{\nu_0(1-r)} \boldsymbol{\sigma}_{xz}^0|_{z=0} + O(\varepsilon).$$

Cependant, nous avons des informations supplémentaires grâce à l'équation sur $\boldsymbol{\sigma}$. Celle-ci s'écrit :

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} + U \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu r}{\lambda} \begin{pmatrix} 2D_x(u) & \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u + \varepsilon \nabla w \\ \frac{1}{\varepsilon} \partial_z^2 u + \varepsilon^2 \nabla w & 2\partial_z w \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

et nous donne au premier ordre :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \nu_0 r \begin{pmatrix} 0 & \partial_z u^0 \\ \partial_z^t u^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc le premier ordre de la vitesse qui vérifie :

$$\partial_z^2 u^0 = O(\varepsilon), \quad (\partial_z u^0)_{|z=h} = O(\varepsilon), \quad (\partial_z u^0)_{|z=0} = O(\varepsilon),$$

ce qui signifie que u^0 ne dépend pas de z . En reprenant les équations précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} u(t, x, z) &= u(t, x, 0) + O(\varepsilon), & w(t, x, z) &= -\operatorname{div} u(t, x, 0) + O(\varepsilon), \\ p(t, x, z) &= \frac{1}{Fr^2}(h - z) + O(\varepsilon), & \boldsymbol{\sigma} &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Cela nous donne le système de Saint-Venant en variables non-dimensionnelles au premier ordre :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hu) = O(\varepsilon), \quad (3.16)$$

$$\partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla h^2 = -K_0 u + O(\varepsilon), \quad (3.17)$$

ou bien en variables dimensionnelles :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hu) = 0, \quad (3.18)$$

$$\partial_t(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla h^2 = -ku. \quad (3.19)$$

Pour voir les effets visqueux, il est nécessaire d'aller à l'ordre suivant.

Système de Saint-Venant au second ordre.

On note toujours avec une barre les valeurs moyennées sur la hauteur d'eau. L'équation de la divergence s'écrit :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\bar{u}) = O(\varepsilon^2).$$

Pour obtenir l'équation des moments au second ordre, nous utilisons (3.9) mais à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\nu(1-r)}{\varepsilon^2} \partial_z^2 u &= \partial_t u + u \cdot \nabla u + w \partial_z u + \nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{xx} - \frac{1}{\varepsilon} \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz} + O(\varepsilon) \\ &= \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 - \partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz}^1 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Or l'équation (3.15) nous donne $\partial_z \boldsymbol{\sigma}_{xz}^1 = \nu_0 r \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_z^2 u - \nabla \operatorname{div} u^0 \right) + O(\varepsilon)$ et nous permet de simplifier l'équation des moments comme suit :

$$\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z^2 u = \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{Fr^2} \nabla h + \nu_0 r \nabla \operatorname{div} u + O(\varepsilon).$$

En utilisant le système de Saint-Venant au premier ordre, on obtient :

$$\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z^2 u = -\frac{K_0}{h} u + \nu_0 r \nabla \operatorname{div} u + O(\varepsilon).$$

On intègre alors cette égalité entre 0 et z , grâce à la condition au fond (3.8) :

$$\frac{\nu_0(1-r)}{\varepsilon}(\partial_z u)|_{z=0} = K_0 u|_{z=0} - \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{xz}|_{z=0} + O(\varepsilon) \quad \text{donc} \quad \frac{\nu_0}{\varepsilon}(\partial_z u)|_{z=0} K_0 u|_{z=0} + O(\varepsilon),$$

et on obtient :

$$\frac{\nu_0}{\varepsilon} \partial_z u = K_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) u(t, x, 0) + z \nu_0 r \nabla \operatorname{div} u + O(\varepsilon).$$

On intègre une nouvelle fois pour avoir :

$$\begin{aligned} u(t, x, z) &= \left(1 + \frac{K_0 \varepsilon}{\nu_0} z \left(1 - \frac{z}{2h}\right)\right) u(t, x, 0) - \varepsilon r \int_0^z z \nabla \operatorname{div} u + O(\varepsilon^2) \\ &= \left(1 + \frac{K_0 \varepsilon}{\nu_0} z \left(1 - \frac{z}{2h}\right)\right) u(t, x, 0) - \varepsilon r \frac{z^2}{2} \nabla \operatorname{div} u + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Comme dans le cas newtonien, on vérifie que la moyenne de u^2 est égale au carré de la moyenne de u , ce qui nous permet de réécrire l'équation des moments intégrée au second ordre :

$$\begin{aligned} \partial_t(h\bar{u}) + \operatorname{div}(h\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla h^2 &= -K_0 \frac{\bar{u} + \frac{\varepsilon r}{6} h^2 \nabla \operatorname{div} u}{1 + \frac{K_0 \varepsilon}{3\nu_0} h} + 2\varepsilon \nu_0 (1-r) \nabla(h \operatorname{div} u) \\ &\quad - \nabla \int_0^h \left(\sigma_{zz} + \varepsilon \int_h^z \nabla \sigma_{xz} \right) + 2\varepsilon \nu_0 (1-r) \operatorname{div}(hD(u)) + 2\varepsilon \nu_0 r \operatorname{div}(hD(u)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Or on a l'égalité :

$$\nabla \int_0^h \left(\sigma_{zz} + \varepsilon \int_h^z \nabla \sigma_{xz} \right) = -2\varepsilon \nu_0 r \nabla(h \operatorname{div} u^0) + O(\varepsilon),$$

qui nous donne le système de Saint-Venant au second ordre en variables non-dimensionnelles :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\bar{u}) = 0, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(h\bar{u}) + \operatorname{div}(h\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla h^2 &= -K_0 \frac{\bar{u} + \frac{\varepsilon r}{6} h^2 \nabla \operatorname{div} u}{1 + \frac{K_0 \varepsilon}{3\nu_0} h} \\ &\quad + 2\varepsilon \nu_0 \nabla(h \operatorname{div} u) + 2\varepsilon \nu_0 \operatorname{div}(hD(u)), \end{aligned} \tag{3.21}$$

ou encore en variables dimensionnelles :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(h\bar{u}) = 0, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(h\bar{u}) + \operatorname{div}(h\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{g}{2} \nabla h^2 &= -k \frac{\bar{u} + \frac{r}{6\varepsilon} h^2 \nabla \operatorname{div} u}{1 + \frac{k}{3\mu} h} \\ &\quad + 2\mu \nabla(h \operatorname{div} u) + 2\mu \operatorname{div}(hD(u)). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Le fait de remplacer le tenseur des contraintes newtonien par une loi de Oldroyd ajoute donc le nouveau terme $\frac{k}{1 + \frac{k}{3\mu} h} \frac{r}{6\varepsilon} h^2 \nabla \operatorname{div} u$. Donnons maintenant quelques propriétés mathématiques de ce nouveau système.

3.2 Propriétés mathématiques de ce système.

Dans cette partie, nous nous intéressons au caractère bien posé du système précédent, problème que nous étudions grâce au système linéarisé. Pour cela, nous suivons la démarche proposée dans [61], c'est-à-dire que nous appliquons une transformée de Fourier pour les variables d'espace (notée classiquement par un chapeau). Nous obtenons une relation du type :

$$\partial_t \hat{f}(\xi, t) = -M \hat{f}(\xi, t),$$

où la matrice M dépend de l'état constant autour duquel a été effectuée la linéarisation et du vecteur ξ . L'étude des valeurs propres de cette matrice lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini ou reste suffisamment grand permet de conclure, si leur partie réelle reste strictement positive, que le problème linéarisé est bien posé.

On considère, dans les équations (3.22)-(3.23), une petite perturbation autour de l'état $(h, u) = (h^c, 0)$, où h^c est une constante. On note donc pour ϵ petit, $(h, u) = (h^c + \epsilon h^p, \epsilon u^p)$, et on regarde les équations que l'on obtient à l'ordre ϵ :

$$\begin{aligned} \partial_t h^p + h^c \operatorname{div} u^p &= 0, \\ h^c \partial_t u^p + g h^c \nabla h^p &= -k \frac{u^p + \frac{r}{6\varepsilon} (h^c)^2 \nabla \operatorname{div} u^p}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} + 3\mu h^c \nabla \operatorname{div} u^p + \mu h^c \Delta u^p. \end{aligned}$$

On peut alors définir le vecteur V^p , qui représente la perturbation, par :

$$V^p(t, x) = \begin{pmatrix} h^p(t, x) \\ u^p(t, x) \end{pmatrix}.$$

On effectue une transformée de Fourier en espace des équations de Saint-Venant linéarisées. Cela nous donne le système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{V}^p(\xi, t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -ih^c \xi_1 & -ih^c \xi_2 \\ -ig \xi_1 & M_{22} & \left(3\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c\right) \xi_1 \xi_2 \\ -ig \xi_2 & \left(3\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c\right) \xi_1 \xi_2 & M_{33} \end{pmatrix}}_{M(h^c, \xi)} \hat{V}^p(\xi, t) \\ + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{h^c + \frac{k(h^c)^2}{3\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{h^c + \frac{k(h^c)^2}{3\mu}} \end{pmatrix}}_{G(h^c)} \hat{V}^p(\xi, t) = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients diagonaux M_{ii} sont donnés par :

$$M_{ii} = \mu |\xi|^2 + \left(3\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c\right) (\xi_{i-1})^2.$$

Dans la suite, on suppose que $G(h^c) \equiv 0$: en effet, ce terme ne joue pas un rôle primordial dans cette étude et il peut être rendu aussi petit que nécessaire par un changement d'échelle en temps. Nous nous ramenons donc au système :

$$\partial_t \hat{V}^p(\xi, t) + M(h^c, \xi) \hat{V}^p(\xi, t) = 0.$$

Pour ξ non nul, on définit la matrice N par :

$$M(h^c, \xi) = |\xi|^2 N \left(h^c, \frac{1}{|\xi|^2} \xi \right).$$

Lorsque ξ s'annule, nous pouvons imposer $N(h^c, \infty) := 0$, puisque cela reste cohérent avec les autres valeurs.

Pour savoir si notre système linéarisé est bien posé, nous devons calculer les valeurs propres de la matrice N . Nous posons $\alpha = \xi/|\xi|^2$ et nous écrivons le polynôme caractéristique de la matrice N en fonction de α :

$$P(X, \alpha) = -X^3 + X^2 \left(5\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c \right) + X \left(-4\mu^2 + \mu \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c - gh^c \alpha^2 \right) + gh^c \mu \alpha^2.$$

Nous allons, pour en calculer les racines, faire des hypothèses sur le vecteur α .

3.2.1 Cas où α est le vecteur nul.

Ce cas correspond au cas où ξ tend vers l'infini. Le polynôme caractéristique se réduit à :

$$P(X, 0) = -X^3 + X^2 \left(5\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c \right) + X \left(-4\mu^2 + \mu \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c \right).$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\begin{aligned} \lambda_1(0) &= \mu, \\ \lambda_2(0) &= 4\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c, \\ \lambda_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Les deux valeurs $\lambda_1(0)$ et $\lambda_2(0)$ restent strictement positives (on suppose que $\mu > 0$) si l'on a l'inégalité suivante :

$$r < 24\mu\varepsilon \left(\frac{1}{kh^c} + \frac{1}{3\mu} \right). \quad (3.24)$$

Nous voyons donc, comme nous pouvions le penser de par l'expression de l'équation (3.23), que le nouveau terme en r a tendance à déstabiliser le système.

3.2.2 Cas où α est un vecteur non nul.

Si ξ est grand, α est un petit paramètre : nous nous intéressons alors aux racines $\lambda_1(\alpha)$, $\lambda_2(\alpha)$ et $\lambda_3(\alpha)$ du polynôme $P(X, \alpha)$. Nous vérifions que les deux premières sont égales, au premier ordre, à $\lambda_1(0)$ et $\lambda_2(0)$ respectivement, et le calcul de la troisième nous permettra de connaître le signe de sa partie réelle.

Une des méthodes possibles pour obtenir ces expressions est d'injecter un développement de la valeur propre considérée dans l'expression du polynôme $P(\lambda(\alpha), \alpha)$ et d'étudier les conditions qui permettent d'en annuler les différents ordres en α . Ainsi, on peut écrire :

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1(0) + a \cdot \alpha + O(\alpha^2),$$

ce qui nous donne, en calculant $P(\lambda_1(\alpha), \alpha)$, $a = 0$; on a le même résultat sur la seconde valeur propre. Nous pouvons d'ores et déjà affirmer que :

$$\lambda_1(\alpha) = \mu + O(\alpha^2), \quad \lambda_2(\alpha) = 4\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c + O(\alpha^2),$$

qui sont, pour α petit, deux valeurs strictement positives tant que la condition (3.24) est vérifiée.

Passons à la dernière valeur propre, nulle au premier ordre. On écrit le développement suivant :

$$\lambda_3(\alpha) = b \cdot \alpha + {}^t\alpha \cdot B \cdot \alpha + O(|\alpha|^3),$$

où b est un vecteur et B une matrice symétrique à déterminer. En injectant cette relation dans l'expression de $P(\lambda_3(\alpha), \alpha)$, nous trouvons que b est nul et que l'on doit avoir :

$${}^t\alpha \cdot B \cdot \alpha \left(-4\mu^2 + \mu \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c \right) + gh^c \mu \alpha^2 + O(|\alpha|^3) = 0.$$

On obtient alors l'expression de la matrice B :

$$B = \frac{gh^c}{4\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c} Id,$$

ce qui nous donne une approximation de la troisième valeur propre :

$$\lambda_3(\alpha) = \frac{gh^c}{4\mu - \frac{k}{1 + \frac{kh^c}{3\mu}} \frac{r}{6\varepsilon} h^c} \alpha^2 + O(|\alpha|^3).$$

La condition (3.24) nous assure que les trois valeurs propres sont à partie réelle strictement positive pour α suffisamment petit.

Nous pouvons donc en conclure (voir [61] pour plus de détails) que le problème linéarisé autour de l'état constant $(h^c, 0)$ est bien posé si la condition (3.24) est vérifiée.

Conclusion.

Dans le cadre des fluides viscoélastiques, pour un certain choix de paramètres, nous avons pu écrire le modèle de Saint-Venant. L'obtention de ce système est bien plus complexe que le cas newtonien puisque le tenseur des contraintes est donné par deux équations différentielles couplées. Nous obtenons un terme qui dépend du rapport r entre l'élasticité et la viscosité, et qui vient s'opposer à cette dernière. Ce phénomène est particulièrement mis en évidence lors de l'étude mathématique du problème linéarisé : nous montrons en effet que ce problème est bien posé à condition que r ne soit pas trop grand par rapport à la viscosité.

Chapitre 4

Echelles multiples autour des équations de Saint-Venant.

Ce chapitre concerne les développements multi-échelles sur les équations de Saint-Venant. Les développements multi-échelles sont des développements asymptotiques dans lesquels sont introduites de nouvelles variables, lentes ou rapides. Le but de cette approche est de prendre en compte toute la variabilité de nos fonctions, et cela peut être à l'origine de nouveaux schémas numériques.

Après avoir introduit les développements multi-échelles, nous détaillons plusieurs régimes possibles pour les équations de Saint-Venant avec faible nombre de Froude, régimes qui dépendent du choix de la topographie. Nous montrons aussi qu'il est possible de passer d'un système avec forte variabilité en temps à un système avec variation lente en espace.

Parmi toutes ces alternatives, nous nous penchons sur un développement qui comporte, en plus de la variable classique, une variable lente, et nous donnons les équations vérifiées par les premiers ordres de la vitesse et de la hauteur d'eau. Nous nous intéressons également au cas d'une topographie oscillante : nous montrons que, dans ces conditions, nous sommes amenés à considérer un système faiblement non-linéaire ou bien la version visqueuse des équations de Saint-Venant (avec une viscosité d'ordre 1 ou de l'ordre du nombre de Froude) pour espérer fermer le développement. Ce dernier choix s'inscrit dans la lignée des travaux de W. E [31] et D. SERRE [63], [64], où les auteurs ont analysé l'influence d'une densité initiale oscillante, mais est adapté à une oscillation de fond qui agit comme une force extérieure.

4.1 Introduction aux développements multi-échelles.

Pour commencer, nous définissons le vocabulaire qui va être utilisé tout au long de ce chapitre. Pour cela, nous traçons sur la Figure 4.1 une fonction de la variable d'espace qui pourrait représenter par exemple la topographie.

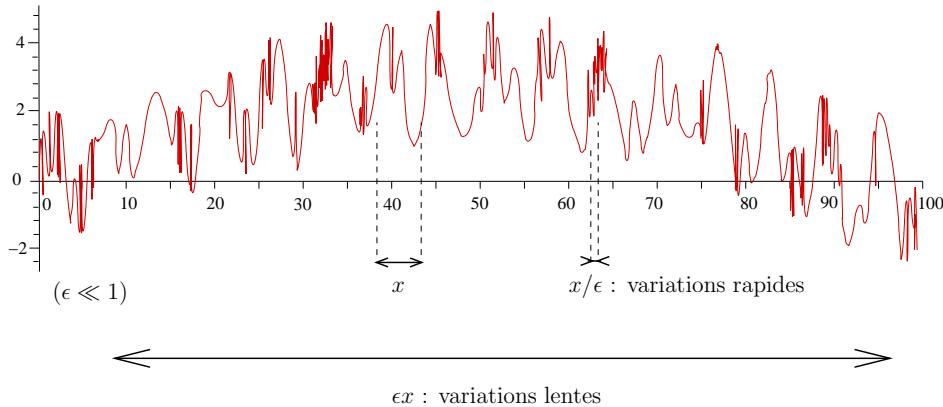


FIG. 4.1 – Représentation des échelles lentes, classiques et rapides.

Nous voyons, sur ce dessin, trois échelles différentes. Tout d'abord, l'allure grossière de la courbe, qui représente les variations lentes : il faut couvrir un grand intervalle d'espace pour se rendre compte que cette fonction n'est pas constante. Ensuite, nous avons l'échelle que nous pouvons considérer comme “classique”, c'est-à-dire que les variations sont visibles pour des valeurs de x de l'ordre de 1. Enfin la troisième échelle décrit les variations rapides de notre courbe.

Notre but est de capter toutes ces échelles, mais avec des variables non-dimensionnelles, de l'ordre de 1. C'est pour cela que nous introduisons deux nouvelles variables, appelées par extension variable rapide et variable lente, qui vont nous permettre de bien prendre en compte cette dépendance. Si ϵ est un petit paramètre, nous définissons donc X par $X = x/\epsilon$, la **variable rapide** : lorsque X varie entre 0 et 1, ce qui correspondrait à x compris entre 0 et ϵ , nous prenons en considération les variations rapides de la fonction. De la même façon, nous posons $\chi = \epsilon x$ la **variable lente**, qui permet de représenter les phénomènes lents, observés pour x variant de 0 à $1/\epsilon$.

Une autre définition dont nous aurons besoin est celle d'une **fonction oscillante** : il s'agit d'une fonction qui dépend, entre autres, de la variable rapide X et donc, lorsqu'on la trace pour x de l'ordre de 1, comporte des oscillations.

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, le fait de considérer des échelles multiples permet de mieux prendre en compte la variabilité totale de la fonction. Un des intérêts de ce type d'approche est de mettre en place de nouveaux schémas numériques basés sur ces différentes variables. C'est ce qui est fait dans [33] ou dans [42] par exemple. C'est également le point de vue qui est adopté dans le Chapitre 7 pour les équations Quasi-Géostrophiques.

4.2 Différents régimes pour les équations de Saint-Venant.

Nous nous intéressons, dans cette partie, aux échelles multiples pour le système de Saint-Venant non-dimensionnel au premier ordre :

$$\begin{aligned}\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{H}{Fr^2} \nabla H &= -\frac{1}{Fr^2} H \nabla b.\end{aligned}$$

On suppose que le nombre de Froude est petit : $Fr = \epsilon \ll 1$.

Différents régimes peuvent être étudiés :

- le fond est représenté par la fonction $b(x)$ et les variables H et u se décomposent sous la forme :

$$(H, u) = \sum_i \epsilon^i (H^i(t, x), u^i(t, x)).$$

Il s'agit du cas classique, sans échelles multiples.

- Si le fond ne dépend que de la variable lente $b(\epsilon x)$, on écrit

$$(H, u) = \sum_i \epsilon^i (H^i(t, \epsilon x), u^i(t, \epsilon x)).$$

Etudions un peu plus précisément ce cas en remplaçant ces expressions dans les équations de Saint-Venant. Pour cela, on note $\chi = \epsilon x$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t H + \epsilon \partial_\chi(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \epsilon \partial_\chi \left(Hu \otimes u + \frac{H^2}{2\epsilon^2} \right) &= -\frac{1}{\epsilon} H \partial_\chi b.\end{aligned}$$

Notons que ce système peut également s'écrire, en divisant les deux égalités par ϵ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon} \partial_T H + \partial_x(Hu) &= 0, \\ \frac{1}{\epsilon} \partial_T(Hu) + \partial_x \left(Hu \otimes u + \frac{H^2}{2\epsilon^2} \right) &= -\frac{1}{\epsilon^2} H \partial_x b,\end{aligned}$$

avec $T = t/\epsilon$, ce qui correspond à un développement des variables donné par :

$$(H, u) = \sum_i \epsilon^i \left(H^i \left(\frac{t}{\epsilon}, x \right), u^i \left(\frac{t}{\epsilon}, x \right) \right),$$

pour le fond $b(x)$.

- Il est possible, toujours pour un fond $b(x)$, de considérer des échelles multiples en temps :

$$(H, u) = \sum_i \epsilon^i \left(H^i \left(\frac{t}{\epsilon}, t, x \right), u^i \left(\frac{t}{\epsilon}, t, x \right) \right),$$

où $T = t/\epsilon$ est la variable rapide en temps. Notons que ce développement permet de retrouver les équations des ondes acoustiques. Il sert aussi à modéliser le phénomène des marées comme dans [3] où est étudiée la dérive d'objets dans l'océan ou bien dans [2], où les auteurs justifient la convergence du modèle lorsque ϵ tend vers 0 par la technique de convergence double échelle, technique utilisée en homogénéisation.

- Pour un fond qui dépend des deux variables d'espace $b(x, \epsilon x)$, il en est de même pour la vitesse et la hauteur d'eau :

$$(H, u) = \sum_i \epsilon^i (H^i(t, x, \epsilon x), u^i(t, x, \epsilon x)).$$

Nous revenons sur ce cas dans la suite.

- Enfin, au lieu de s'intéresser à des variables lentes, il est possible de définir une variable rapide. Ainsi, si le fond s'écrit $b(\frac{x}{\epsilon}, x)$, le développement pour H et u est :

$$(H, u) = \sum_i \epsilon^i (H^i\left(t, \frac{x}{\epsilon}, x\right), u^i\left(t, \frac{x}{\epsilon}, x\right)).$$

Nous détaillons également ce choix ci-dessous.

4.3 Développement multi-échelles en espace avec une variable lente.

Ce choix de variables a été effectué dans [42] dans le but de proposer un nouveau schéma numérique, qui tienne effectivement compte de la condition de compressibilité. Le fond $b(x, \epsilon x)$ dépend à la fois de la variable x et de la variable lente $\chi = \epsilon x$, comme celui présenté sur la Figure 4.2.

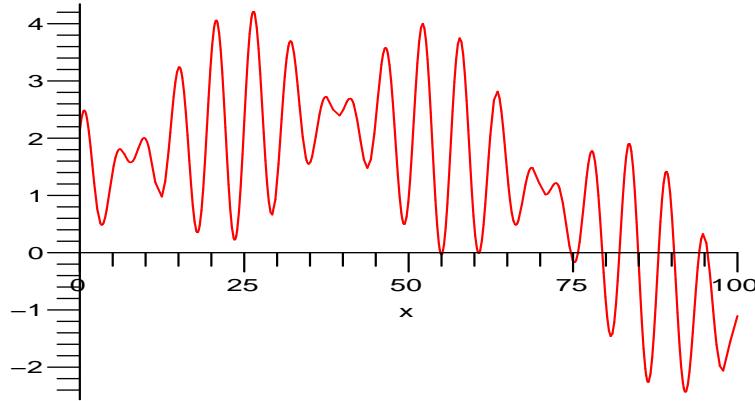


FIG. 4.2 – Exemple de topographie dépendant de la variable lente et de x .

On développe la vitesse comme suit :

$$u(t, x, \chi) = u^0(t, x, \chi) + \epsilon u^1(t, x, \chi) + \dots,$$

ainsi que la hauteur d'eau. Pour (x, χ) dans $\mathbb{T}^2 \times \mathcal{D}$, le système de Saint-Venant devient, comme $Fr = \epsilon$:

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{H}{\epsilon^2} \nabla(H + b) &= 0. \end{aligned}$$

Nous écrivons donc les différents ordres de ces équations :

- à l'ordre ϵ^{-2} , le système se résume à :

$$H^0 \nabla_x (H^0 + b) = 0, \quad (4.1)$$

- à l'ordre ϵ^{-1} , nous obtenons :

$$H^0 \nabla_x H^1 + H^0 \nabla_\chi (H^0 + b) + H^1 \nabla_x (H^0 + b) = 0, \quad (4.2)$$

- à l'ordre suivant ϵ^0 , les équations sont plus complexes :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_x (H^0 u^0) = 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (H^0 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^0 \otimes u^0) + H^0 \nabla_x H^2 + H^1 \nabla_x H^1 + H^2 \nabla_x (H^0 + b) \\ + H^0 \nabla_\chi H^1 + H^1 \nabla_x (H^0 + b) = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

- enfin, à l'ordre ϵ , la première équation s'écrit :

$$\partial_t H^1 + \operatorname{div}_x (H^0 u^1) + \operatorname{div}_x (H^1 u^0) + \operatorname{div}_\chi (H^0 u^0) = 0. \quad (4.5)$$

L'équation (4.1) nous donne que $H^0 + b$ ne dépend pas de x . En intégrant l'équation (4.2) par rapport à x , on trouve $H^0 + b$ indépendant de χ . Enfin, la relation (4.3) intégrée également en x nous donne, comme b ne varie pas au cours du temps, que $H^0 + b$ est une constante C et que $\operatorname{div}_x (H^0 u^0) = 0$.

De plus, avec l'équation (4.2) nous obtenons que H^1 ne dépend pas de x , et les équations (4.4) et (4.5) deviennent :

$$\begin{aligned} \partial_t (H^0 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^0 \otimes u^0) + H^0 \nabla_x H^2 + H^0 \nabla_\chi H^1 = 0, \\ \partial_t H^1 + \operatorname{div}_x (H^0 u^1) + \operatorname{div}_x (H^1 u^0) + \operatorname{div}_\chi (H^0 u^0) = 0. \end{aligned}$$

Notons que si la topographie ne dépend pas de x , en combinant les équations précédentes intégrées en x , nous obtenons bien une équation de type ondes acoustiques sur H^1 :

$$\partial_t^2 H^1 + \operatorname{div}_\chi ((b(\chi) - C) \nabla_\chi H^1) = 0.$$

4.4 Cas où la topographie est une fonction oscillante.

Il s'agit donc de considérer un fond qui dépend de x et de la variable rapide $X = x/\epsilon$, du type de celui tracé sur la Figure 4.3.

Nous développons la vitesse et la hauteur d'eau selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned} u(t, X, x) &= u^0(t, X, x) + \epsilon u^1(t, X, x) + \dots, \\ H(t, X, x) &= H^0(t, X, x) + \epsilon H^1(t, X, x) + \dots, \end{aligned}$$

et nous les remplaçons dans le système de Saint-Venant, pour (X, x) dans $\mathbb{T}^2 \times \mathcal{D}$. Pour commencer nous étudions le système faiblement non-linéaire : nous montrons que la limite obtenue lorsque ϵ tend vers zéro correspond à la limite faiblement non-linéaire de l'équation des lacs avec topographie oscillante. Dans un deuxième temps, nous nous penchons sur l'équation de Saint-Venant avec non-linéarité forte ; vu les relations à chaque ordre, nous proposons d'ajouter des effets visqueux pour compenser les difficultés inhérentes aux termes non-linéaires.

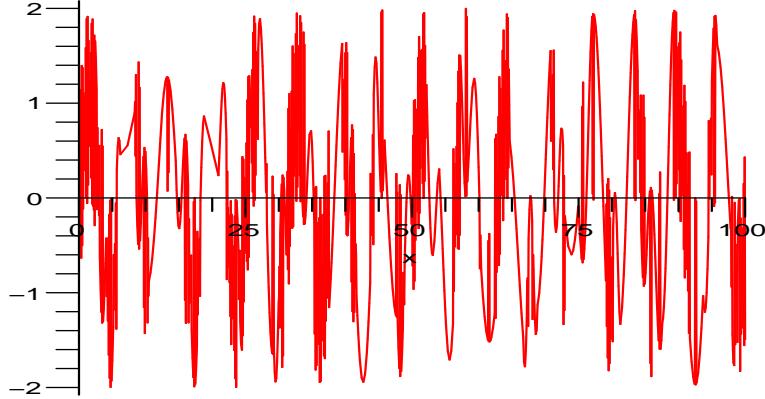


FIG. 4.3 – Exemple de topographie dépendant de la variable rapide et de x .

4.4.1 Système de Saint-Venant faiblement non-linéaire.

Nous considérons tout d'abord le système de Saint-Venant non-linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t H + \epsilon \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \epsilon \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{H}{\epsilon^2} \nabla(H + b) &= 0,\end{aligned}$$

où $b = b(X, x)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^0 .

Nous identifions alors les puissances de ϵ :

- à l'ordre ϵ^{-3} , nous avons :

$$H^0 \nabla_X(H^0 + b) = 0, \quad (4.6)$$

- à l'ordre ϵ^{-2} , les deux échelles interviennent dans le gradient :

$$H^0 \nabla_x(H^0 + b) + H^1 \nabla_X(H^0 + b) + H^0 \nabla_X H^1 = 0, \quad (4.7)$$

- à l'ordre ϵ^{-1} , nous obtenons :

$$H^1 \nabla_x(H^0 + b) + H^0 \nabla_x H^1 + H^2 \nabla_X(H^0 + b) + H^1 \nabla_X H^1 + H^0 \nabla_X H^2 = 0, \quad (4.8)$$

- à l'ordre ϵ^0 , nous voyons apparaître les dérivées en temps ainsi que la première égalité (conservation de la hauteur d'eau) :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_X(H^0 u^0) = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}\partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^0 \otimes u^0) + H^2 \nabla_x(H^0 + b) + H^1 \nabla_x H^1 \\ + H^0 \nabla_x H^2 + H^3 \nabla_X(H^0 + b) + H^2 \nabla_X H^1 + H^1 \nabla_X H^2 + H^0 \nabla_X H^3 = 0,\end{aligned} \quad (4.10)$$

- enfin, à l'ordre ϵ^1 , nous ne donnons que l'égalité obtenue à partir de l'équation sur la hauteur d'eau :

$$\partial_t H^1 + \operatorname{div}_x(H^0 u^0) + \operatorname{div}_X(H^1 u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^1) = 0. \quad (4.11)$$

La relation (4.6) nous permet d'affirmer qu'au premier ordre, la hauteur d'eau s'écrit sous la forme : $H^0(t, X, x) = -b(X, x) + c(t, x)$. Le second terme de (4.7) disparaît donc et, en moyennant en X , on trouve que $H^0(t, X, x) + b(X, x)$ ne dépend pas de x . De la même façon avec l'équation (4.9) que l'on peut réécrire $\partial_t(H^0 + b) + \operatorname{div}_X(H^0 u^0) = 0$, en moyennant en variable rapide, on obtient que la fonction c ne dépend pas non plus du temps : il s'agit donc d'une constante en temps et en espace, calculée à partir de la valeur de H^0 à l'instant initial. Ainsi, nous savons que le premier ordre de la hauteur d'eau est $H^0(X, x) = -b(X, x) + C$, où $C = b + H^0|_{t=0}$.

En reprenant l'équation (4.7), comme $H^0 + b$ est une constante, nous obtenons $\nabla_X H^1 = 0$. Nous utilisons à nouveau les autres équations pour voir ce que cela implique : la relation (4.8) intégrée en X nous donne que H^1 ne dépend pas de x , donc le second ordre de la hauteur d'eau ne dépend pas des variables d'espace. Enfin, en moyennant l'équation (4.11) en variables spatiales, on a H^1 qui ne dépend pas du temps, donc on peut supposer que $H^1 = H^1|_{t=0} = 0$. Pour commencer à donner des propriétés sur l'ordre suivant, nous reprenons l'équation (4.8) en simplifiant presque tous les termes puisque $H^0 + b$ est une constante et H^1 est nul ; on trouve $\nabla_X H^2 = 0$.

Nous pouvons récapituler ces résultats ainsi que l'expression des équations (4.9) à (4.11) sous la forme d'un système :

$$\operatorname{div}_X(H^0 u^0) = 0, \quad (4.12)$$

$$\partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^0 \otimes u^0) + H^0 \nabla_x H^2 + H^0 \nabla_X H^3 = 0, \quad (4.13)$$

$$\operatorname{div}_x(H^0 u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^1) = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla_X H^2 = 0, \quad (4.15)$$

avec $H^0(X, x) = -b(X, x) + C$.

Il est possible de calculer l'énergie associée, en multipliant l'équation (4.13) par u^0 et en l'intégrant en x et en X . On obtient, en intégrant par parties :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int H^0 |u^0|^2 - \int \int (H^2 \operatorname{div}_x(H^0 u^0) dx dX + H^3 \operatorname{div}_X(H^0 u^0)) dx dX = 0.$$

Le dernier terme est nul (d'après (4.12)) et le second se réécrit, grâce à l'équation (4.14) sous la forme $H^2 \operatorname{div}_X(H^0 u^1)$. Une intégration par parties nous permet d'affirmer que ce terme est nul également, à cause de (4.15). Nous avons donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int H^0 |u^0|^2 dx dX = 0.$$

Le système (4.12)-(4.15) correspond à la limite faible nombre de Froude dans les équations de Saint-Venant faiblement non-linéaires. Nous pouvons remarquer qu'il s'agit du même système que celui obtenu dans [19] en considérant deux petits paramètres distincts : le nombre de Froude et le paramètre η qui représente à la fois le coefficient du terme non-linéaire et le lien entre les variables d'espace $X = x/\eta$. Dans cet article, les auteurs considèrent l'équation des lacs, limite formelle des équations de Saint-Venant pour un nombre de Froude petit. Ils étudient alors la limite faiblement non-linéaire de cette équation (lorsque η tend vers zéro) et prouvent la convergence vers le modèle limite par la méthode de double échelle, utilisée par exemple dans [48] pour des problèmes d'homogénéisation. La limite réalisée ici correspond au cas $Fr = \eta$ et montre donc qu'il est possible de mener l'asymptotique directement à partir des équations de Saint-Venant en liant le nombre de Froude à la variabilité du fond.

4.4.2 Système de Saint-Venant non linéaire.

Nous regardons maintenant ce qu'il se passe lorsque l'on a une non-linéarité forte, soit :

$$\begin{aligned}\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{H}{\epsilon^2} \nabla(H + b) &= 0,\end{aligned}$$

avec $b = b(x, X)$.

Nous développons nos variables selon le même schéma que dans le cas faiblement non-linéaire, et nous identifions les puissances de ϵ :

- à l'ordre ϵ^{-3} , nous obtenons la relation :

$$H^0 \nabla_X(H^0 + b) = 0, \quad (4.16)$$

- à l'ordre ϵ^{-2} , nous avons :

$$H^0 \nabla_x(H^0 + b) + H^1 \nabla_X(H^0 + b) + H^0 \nabla_X H^1 = 0, \quad (4.17)$$

- à l'ordre ϵ^{-1} , la première équation apporte également une contribution :

$$\operatorname{div}_X(H^0 u^0) = 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_X(H^0 u^0 \otimes u^0) + H^1 \nabla_x(H^0 + b) + H^0 \nabla_x H^1 + H^2 \nabla_X(H^0 + b) \\ + H^1 \nabla_X H^1 + H^0 \nabla_X H^2 = 0,\end{aligned} \quad (4.19)$$

- à l'ordre ϵ^0 , les équations s'écrivent :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_x(H^0 u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^1) + \operatorname{div}_X(H^1 u^0) = 0, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}\partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}_x(H^0 u^0 \otimes u^0) + \operatorname{div}_X(H^1 u^0 \otimes u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^1 \otimes u^0) \\ + \operatorname{div}_X(H^0 u^0 \otimes u^1) + H^2 \nabla_x(H^0 + b) + H^1 \nabla_x H^1 + H^0 \nabla_x H^2 \\ + H^3 \nabla_X(H^0 + b) + H^2 \nabla_X H^1 + H^1 \nabla_X H^2 + H^0 \nabla_X H^3 = 0,\end{aligned} \quad (4.21)$$

- et enfin à l'ordre ϵ ,

$$\begin{aligned}\partial_t H^1 + \operatorname{div}_X(H^0 u^2) + \operatorname{div}_X(H^1 u^1) + \operatorname{div}_X(H^2 u^0) \\ + \operatorname{div}_x(H^1 u^0) + \operatorname{div}_x(H^0 u^1) = 0.\end{aligned} \quad (4.22)$$

Comme dans le cas faiblement non-linéaire, nous pouvons en déduire que $H^0 + b$ est une constante. Cependant, les autres équations ne nous permettent pas de fermer le système : il y a toujours besoin de l'ordre suivant Rappelons que le modèle de Saint-Venant peut s'écrire sous une forme visqueuse, forme que nous avons d'ailleurs présentée au Chapitre 1. Nous montrons ci-dessous que la prise en compte d'une viscosité, même négligeable, permet d'obtenir un système fermé dans le cadre d'un développement asymptotique.

4.4.3 Système de Saint-Venant avec viscosité d'ordre 1.

Nous étudions maintenant le système avec termes non-linéaires, mais auquel nous ajoutons les effets de la viscosité. Nous avons donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{H}{\epsilon^2} \nabla(H + b) - 2\nu \operatorname{div}(HD(u)) - 2\nu \nabla(H \operatorname{div} u) &= 0,\end{aligned}$$

où le fond b est toujours une fonction de x et de X .

Les différents ordres en ϵ sont donnés par :

- à l'ordre ϵ^{-3} :

$$H^0 \nabla_X (H^0 + b) = 0, \quad (4.23)$$

- à l'ordre ϵ^{-2} , l'échelle classique s'ajoute à l'échelle rapide :

$$\begin{aligned} H^0 \nabla_x (H^0 + b) + H^1 \nabla_X (H^0 + b) + H^0 \nabla_X H^1 \\ - 2\nu \operatorname{div}_X (H^0 D_X(u^0)) - 2\nu \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_X u^0) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

- à l'ordre ϵ^{-1} , nous obtenons les deux équations :

$$\operatorname{div}_X (H^0 u^0) = 0, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_X (H^0 u^0 \otimes u^0) + H^1 \nabla_x (H^0 + b) + H^0 \nabla_x H^1 + H^2 \nabla_X (H^0 + b) + H^1 \nabla_X H^1 \\ + H^0 \nabla_X H^2 - 2\nu \operatorname{div}_x (H^0 D_X(u^0)) - 2\nu \nabla_x (H^0 \operatorname{div}_X u^0) - 2\nu \operatorname{div}_X (H^0 D_x(u^0)) \\ - 2\nu \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_x u^0) - 2\nu \operatorname{div}_X (H^1 D_X(u^0)) - 2\nu \nabla_X (H^1 \operatorname{div}_X u^0) \\ - 2\nu \operatorname{div}_X (H^0 D_X(u^1)) - 2\nu \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_X u^1) = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

- à l'ordre ϵ^0 , les deux équations font apparaître les deux échelles :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_x (H^0 u^0) + \operatorname{div}_X (H^0 u^1) + \operatorname{div}_X (H^1 u^0) = 0, \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (H^0 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^0 \otimes u^0) + \operatorname{div}_X (H^1 u^0 \otimes u^0) + \operatorname{div}_X (H^0 u^1 \otimes u^0) \\ + \operatorname{div}_X (H^0 u^0 \otimes u^1) + H^2 \nabla_x (H^0 + b) + H^1 \nabla_X H^1 + H^0 \nabla_X H^2 + H^3 \nabla_X (H^0 + b) \\ + H^2 \nabla_X H^1 + H^1 \nabla_X H^2 + H^0 \nabla_X H^3 - 2\nu \operatorname{div}_x (H^0 D_x(u^0)) - 2\nu \nabla_x (H^0 \operatorname{div}_x u^0) \\ - 2\nu \operatorname{div}_x (H^1 D_X(u^0)) - 2\nu \nabla_x (H^1 \operatorname{div}_X u^0) - 2\nu \operatorname{div}_x (H^0 D_X(u^1)) - 2\nu \nabla_x (H^0 \operatorname{div}_X u^1) \\ - 2\nu \operatorname{div}_X (H^1 D_x(u^0)) - 2\nu \nabla_X (H^1 \operatorname{div}_x u^0) - 2\nu \operatorname{div}_X (H^0 D_x(u^1)) - 2\nu \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_x u^1) \\ - 2\nu \operatorname{div}_X (H^2 D_X(u^0)) - 2\nu \nabla_X (H^2 \operatorname{div}_X u^0) - 2\nu \operatorname{div}_X (H^1 D_X(u^1)) - 2\nu \nabla_X (H^1 \operatorname{div}_X u^1) \\ - 2\nu \operatorname{div}_X (H^0 D_X(u^2)) - 2\nu \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_X u^2) = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

- enfin, à l'ordre ϵ^1 , nous n'écrivons pas l'égalité obtenue à partir de l'équation des moments :

$$\begin{aligned} \partial_t H^1 + \operatorname{div}_X (H^0 u^2) + \operatorname{div}_X (H^1 u^1) + \operatorname{div}_X (H^2 u^0) \\ + \operatorname{div}_x (H^1 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^1) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'équation (4.23) nous permet d'affirmer que $H^0 + b$ ne dépend pas de la variable rapide. En intégrant ensuite en X l'équation (4.24) multipliée par u^0 , comme $\operatorname{div}_X (H^0 u^0) = 0$, on obtient :

$$\int \left(u^0 H^0 \nabla_x (H^0 + b) + 2\nu H^0 |D_X(u^0)|^2 + 2\nu H^0 |\operatorname{div}_X(u^0)|^2 \right) dX = 0.$$

En utilisant l'équation (4.27) intégrée en X puis multipliée par $H^0 + b$ et intégrée en x , nous aboutissons à :

$$\frac{d}{dt} \int \int |H^0 + b|^2 dx dX + \int \int \left(4\nu H^0 |D_X(u^0)|^2 + 4\nu H^0 |\operatorname{div}_X(u^0)|^2 \right) dx dX = 0.$$

Or en intégrant deux fois l'équation (4.27) on trouve que la moyenne en x et X de $\partial_t H^0$ ou $\partial_t(H^0 + b)$ est nulle, ce qui nous donne que u^0 ne dépend pas de X .

Nous pouvons alors utiliser cette propriété dans l'équation (4.24) pour montrer, par une intégration, que $H^0 + b$ ne dépend pas non plus de x : $H^0(X, x) = -b(X, x) + C$, où C est une constante, donnée par les conditions initiales. Enfin, toujours à partir de cette même égalité, nous obtenons que H^1 ne dépend pas de X .

De plus, la relation (4.27) nous donne :

$$\operatorname{div}_x(H^0 u^0) + \operatorname{div}_X(H^0 u^1) = 0.$$

On a la dynamique de u^0 en intégrant en X l'équation (4.28) :

$$\begin{aligned} \partial_t(\overline{H^0} u^0) + \operatorname{div}_x(\overline{H^0} u^0 \otimes u^0) + H^1 \nabla_x H^1 + \overline{H^0 \nabla_x H^2} + \overline{H^0 \nabla_X H^3} \\ - 2\nu \operatorname{div}_x(\overline{H^0} D_x(u^0)) - 2\nu \operatorname{div}_x(\overline{H^0} D_X(u^1)) - 2\nu \nabla_x(\overline{H^0} \operatorname{div}_x u^0) - 2\nu \nabla_x(\overline{H^0} \operatorname{div}_X u^1) = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où la barre représente la moyenne en X .

Par ailleurs, les variables u^1 et H^1 sont liées par les équations suivantes, obtenues en simplifiant les relations (4.26) et (4.29) :

$$\begin{aligned} H^0 \nabla_x H^1 + H^0 \nabla_X H^2 - 2\nu \operatorname{div}_X(H^0 D_x(u^0)) - 2\nu \nabla_X(H^0 \operatorname{div}_x u^0) \\ - 2\nu \operatorname{div}_X(H^0 D_X(u^1)) - 2\nu \nabla_X(H^0 \operatorname{div}_X u^1) = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\partial_t H^1 + \operatorname{div}_X(H^0 u^2) + \operatorname{div}_X(H^1 u^1) + \operatorname{div}_X(H^2 u^0) + \operatorname{div}_x(H^1 u^0) + \operatorname{div}_x(H^0 u^1) = 0. \quad (4.32)$$

Nous obtenons ici, sur un problème d'oscillation de fond, un résultat du même type que ceux de [31], [63], [64] et [38] pour une densité initiale fortement oscillante. Au premier ordre, la vitesse n'oscille pas alors que la hauteur est une fonction oscillante.

Nous pouvons nous intéresser aux propriétés énergétiques de ce système : nous ajoutons l'équation (4.30) multipliée par u^0 et intégrée par rapport à x et l'équation (4.31) multipliée par u^1 et intégrée par rapport aux deux variables d'espace. L'équation (4.32) ainsi que les relations sur la divergence du produit Hu nous permettent de simplifier cette somme et d'obtenir l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int \left(H^0 |u^0|^2 + (H^1)^2 \right) dx dX \\ + 2\nu \int \int \left(|D_x(u^0) + D_X(u^1)|^2 + |\operatorname{div}_x u^0 + \operatorname{div}_X u^1|^2 \right) dx dX = 0. \end{aligned}$$

4.4.4 Cas d'une viscosité de l'ordre du nombre de Froude.

Enfin, nous étudions le cas où la viscosité est du même ordre que le nombre de Froude :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{H}{\epsilon^2} \nabla(H + b) - 2\nu_0 \epsilon \operatorname{div}(HD(u)) - 2\nu_0 \epsilon \nabla(H \operatorname{div} u) = 0, \end{aligned}$$

avec b fonction de x et de X .

Les différentes puissances en ϵ s'écrivent :

- à l'ordre ϵ^{-3} :

$$H^0 \nabla_X (H^0 + b) = 0, \quad (4.33)$$

- à l'ordre ϵ^{-2} , nous n'avons pas encore de termes visqueux :

$$H^0 \nabla_x (H^0 + b) + H^1 \nabla_X (H^0 + b) + H^0 \nabla_X H^1 = 0, \quad (4.34)$$

- à l'ordre ϵ^{-1} , les deux équations deviennent :

$$\operatorname{div}_X (H^0 u^0) = 0, \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_X (H^0 u^0 \otimes u^0) + H^1 \nabla_x (H^0 + b) + H^0 \nabla_x H^1 + H^2 \nabla_X (H^0 + b) + H^1 \nabla_X H^1 \\ + H^0 \nabla_X H^2 - 2\nu_0 \operatorname{div}_X (H^0 D_X (u^0)) - 2\nu_0 \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_X u^0) = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

- à l'ordre ϵ^0 , nous obtenons :

$$\partial_t H^0 + \operatorname{div}_x (H^0 u^0) + \operatorname{div}_X (H^0 u^1) + \operatorname{div}_X (H^1 u^0) = 0, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (H^0 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^0 \otimes u^0) + \operatorname{div}_X (H^1 u^0 \otimes u^0) + \operatorname{div}_X (H^0 u^1 \otimes u^0) \\ + \operatorname{div}_X (H^0 u^0 \otimes u^1) + H^2 \nabla_x (H^0 + b) + H^1 \nabla_X H^1 + H^0 \nabla_x H^2 + H^3 \nabla_X (H^0 + b) \\ + H^2 \nabla_X H^1 + H^1 \nabla_X H^2 + H^0 \nabla_X H^3 - 2\nu_0 \operatorname{div}_x (H^0 D_X (u^0)) - 2\nu_0 \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_X u^0) \\ - 2\nu_0 \operatorname{div}_X (H^0 D_x (u^0)) - 2\nu_0 \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_x u^0) - 2\nu_0 \operatorname{div}_X (H^1 D_X (u^0)) \\ - 2\nu_0 \nabla_X (H^1 \operatorname{div}_X u^0) - 2\nu_0 \operatorname{div}_X (H^0 D_X (u^1)) - 2\nu_0 \nabla_X (H^0 \operatorname{div}_X u^1) = 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

- et à l'ordre ϵ^1 , l'équation de conservation de la hauteur d'eau nous donne :

$$\begin{aligned} \partial_t H^1 + \operatorname{div}_X (H^0 u^2) + \operatorname{div}_X (H^1 u^1) + \operatorname{div}_X (H^2 u^0) \\ + \operatorname{div}_x (H^1 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^1) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Comme dans le cas faiblement non-linéaire, nous obtenons $H^0 + b = C$ constante et H^1 ne dépend pas de X . En combinant alors les équations à l'ordre ϵ^{-1} , puis en intégrant en x et en X , nous obtenons que u^0 ne dépend pas de X , propriété liée à la présence de la viscosité. Nous sommes donc, ici encore, en mesure de donner la dynamique de la vitesse, grâce aux termes visqueux :

$$\partial_t (\overline{H^0} u^0) + \operatorname{div}_x (\overline{H^0} u^0 \otimes u^0) + H^1 \nabla_x H^1 + \overline{H^0 \nabla_x H^2} + \overline{H^0 \nabla_X H^3} = 0,$$

où la barre symbolise la moyenne en X .

De plus, H^1 est donné par l'équation (4.39) :

$$\partial_t H^1 + \operatorname{div}_X (H^0 u^2) + \operatorname{div}_X (H^1 u^1) + \operatorname{div}_X (H^2 u^0) + \operatorname{div}_x (H^1 u^0) + \operatorname{div}_x (H^0 u^1) = 0.$$

Nous pouvons alors calculer l'énergie associée en multipliant l'équation sur u^0 par u^0 . Comme l'équation (4.36) s'écrit :

$$\nabla_x H^1 + \nabla_X H^2 = 0,$$

nous trouvons que :

$$\int \int u^0 H^1 \nabla_x H^1 dx dX = \int \int H^2 \operatorname{div}_X (H^1 u^0) dx dX = 0,$$

et, en utilisant l'équation sur H^1 , nous montrons que :

$$\int \int u^0 H^0 \nabla_x H^2 dx dX = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int (H^1)^2 dx dX.$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int (H^0 (u^0)^2 + (H^1)^2) dx dX = 0.$$

Nous voyons donc que dans le cas non-linéaire, nous n'avons pu conclure que lorsque nous avions une faible non-linéarité ou bien lorsque nous avions considéré les équations avec viscosité.

Notons enfin qu'une justification mathématique de ces asymptotiques est en cours.

Conclusion.

Nous avons présenté ici une méthode qui permet de prendre en compte la variabilité des fonctions que l'on étudie, en introduisant de nouvelles variables. Nous avons appliqué cette analyse multi-échelles aux équations de Saint-Venant, pour plusieurs types de topographie. Si le cas d'un fond ne dépendant pas de la variable rapide ne pose pas de problème particulier, le cas d'une topographie oscillante est plus délicat : il nous faut soit considérer un système faiblement non-linéaire, soit prendre en compte la viscosité pour arriver à fermer nos systèmes. Cette méthode sera reprise au Chapitre 7 pour nous permettre d'écrire un schéma numérique résolvant les équations Quasi-Géostrophiques.

Chapitre 5

Propriétés de modèles de type Saint-Venant.

Contrairement aux chapitres précédents où le but était en partie d'obtenir de nouveaux modèles, nous nous intéressons ici à des systèmes qui existent déjà dans la littérature ou qui en sont proches, et nous en donnons des propriétés mathématiques. Pour cela, comme pour les équations de Saint-Venant présentées au Chapitre 1, nous utilisons des estimations *a priori* obtenues à partir de l'énergie et de l'entropie BD.

Dans une première partie, nous présentons un modèle de sédimentation, composé d'un système de Saint-Venant visqueux et d'une équation avec diffusion qui décrit l'évolution du fond. Grâce aux méthodes citées auparavant, nous démontrons alors un résultat de stabilité pour un tel système. Nous présentons également des tests numériques simulant l'évolution d'une dune de sable dans un canal, avec et sans termes visqueux. Ces expériences nous montrent que l'angle d'étalement de la dune est légèrement modifié par la viscosité.

La seconde partie est consacrée à l'étude du système de Bingham compressible. Les fluides de Bingham entrent dans la catégorie des fluides à seuil : ils ne se déforment que lorsque la contrainte exercée est suffisamment importante. Nous commençons par considérer les équations de Navier-Stokes pour un fluide de Bingham incompressible. Nous montrons alors que, pour un domaine dont la hauteur caractéristique est faible devant la longueur caractéristique, ce système peut être réduit à un système de type Bingham compressible à viscosités dégénérées. La question qui se pose alors est de savoir si les différentes étapes mises en place lors de l'étude mathématique des équations de Saint-Venant compressibles usuelles peuvent s'adapter à ce cas. Le première point, que nous montrons ici, est d'établir une égalité d'énergie et une inégalité d'entropie qui permettent d'obtenir de nouvelles estimations.

La partie concernant la sédimentation est effectuée en collaboration avec E. D. FERNÁNDEZ-NIETO et J. de D. ZABSONRÉ. Elle a été soumise sous le titre *An energetically consistent viscous sedimentation model*, J. de D. ZABSONRÉ, C. LUCAS, E. D. FERNÁNDEZ-NIETO. L'étude du système de Bingham fait partie d'un programme de travail sur le sujet avec D. BRESCH, E. D. FERNÁNDEZ-NIETO, I. IONESCU, P. NOBLE et J. de D. ZABSONRÉ.

5.1 Un modèle de Saint-Venant couplé à une formule de sédiméntation.

La concentration des activités humaines à proximité des fleuves et des rivières nécessite de se pencher sur les problèmes posés par les crues. Les inondations en sont l'expression la plus marquante ; elles sont pourtant indissociables des modifications de la forme du lit qui entraînent, en outre, d'autres désagréments sur lesquels nous ne revenons pas ici. Il est donc important de bien prévoir ces variations pour éviter des catastrophes naturelles. De nombreux modèles physiques et mathématiques sont proposés dans la littérature pour prédire l'évolution du lit des rivières. Le modèle mathématique le plus couramment utilisé est le modèle de Saint-Venant couplé à une équation pour le transport des sédiments comme suit :

$$\partial_t H + \operatorname{div} q = 0, \quad (5.1)$$

$$\partial_t q + \operatorname{div} \left(\frac{q \otimes q}{H} \right) + \frac{1}{Fr^2} H \nabla (H + b) = 0, \quad (5.2)$$

$$\partial_t b + \alpha \operatorname{div} (q_b(H, q)) = 0, \quad (5.3)$$

où b est l'épaisseur de la partie variable du lit, α est donné par $\alpha = 1/(1 - \alpha_0)$ avec α_0 la porosité de la couche de sédiments, et q_b désigne le charriage. Celui-ci dépend de la hauteur H du fluide et du débit d'eau $q = Hu$, où u représente la vitesse (voir Figure 5.1).

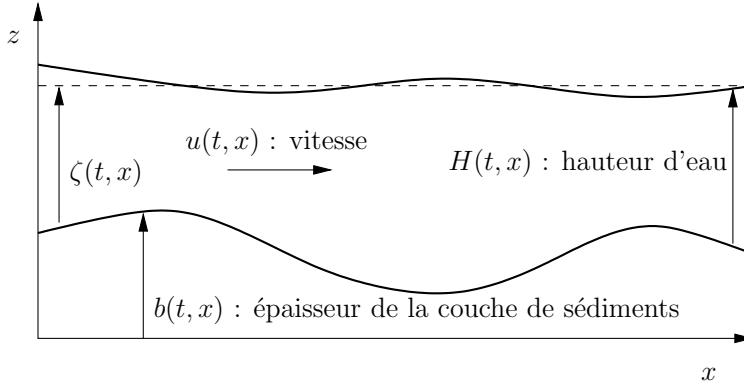


FIG. 5.1 – Lit d'un cours d'eau avec phénomène de sédiméntation.

En ce qui concerne le charriage q_b , il peut être calculé par plusieurs formules : l'équation de Grass (voir [36]), l'équation de Meyer-Peter et Muller (voir [57]), ou bien encore les formules de Fernández Luque et Van Beek, de Van Rijn, ou de Nielsen par exemple (cf. [32]). Le modèle de sédiments le plus basique est celui de Grass, où le mouvement des sédiments et du fluide commencent au même moment. Dans ce cas, le charriage est donné par :

$$q_b(H, q) = A_g \frac{q}{H} \left| \frac{q}{H} \right|^{m_g-1}, \quad 1 \leq m_g \leq 4,$$

où la constante A_g englobe les effets dus à la taille des grains et à la viscosité cinématique, et, en général, est déterminée à partir de données expérimentales.

Cependant, ce modèle ne fait pas intervenir les termes visqueux du système de Saint-Venant. Une première étude a été menée dans [68] sur un modèle de Saint-Venant avec viscosité couplé

à une équation de type Grass pour l'évolution des sédiments. Ce système est donné par :

$$\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \quad (5.4)$$

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{Fr^2} \nabla(H + b) - \nu \Delta u = f, \quad (5.5)$$

$$\partial_t \zeta - \operatorname{div}(\zeta u) = 0, \quad (5.6)$$

avec ζ définie par $\zeta(t, x) = |\mathcal{D}|^{-1} \int_{\mathcal{D}} (H(t, x) + b(t, x)) - b(t, x)$ et u nulle sur les bords du domaine \mathcal{D} . Il n'est cependant pas possible de trouver une énergie dans ce cas. En effet, en intégrant en espace l'équation (5.5) multipliée par u , en utilisant également les équations (5.4) et (5.6), les auteurs obtiennent, pour tout M strictement positif, l'inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |u|^2 + g \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (H \ln H - H) + g \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\zeta \ln \zeta - \zeta) + \nu \|u\|_{(H_0^1(\mathcal{D}))^2}^2 \\ \leq \frac{1}{2M} \|f\|_{(H^{-1}(\mathcal{D}))^2}^2 + \frac{M}{2} \|u\|_{(H_0^1(\mathcal{D}))^2}^2 + \frac{C}{2} \|u\|_{(H_0^1(\mathcal{D}))^2}^2 \|u\|_{(L^2(\mathcal{D}))^2}^2. \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire de supposer que les données sont suffisamment petites pour que le terme $2\nu - M - C\|u\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)}$ reste strictement positif.

Nous proposons ici une autre approche qui consiste à coupler un modèle de Saint-Venant visqueux :

$$\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \quad (5.7)$$

$$\partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{1}{Fr^2} H \nabla(H + b) - A_v \operatorname{div}(HD(u)) = 0, \quad (5.8)$$

et une équation avec diffusion pour les sédiments :

$$\partial_t b + A_v \operatorname{div}(H|u|^m u) - \frac{A_v}{2} \Delta b = 0, \text{ avec } 0 < m < \frac{1}{2}, \quad (5.9)$$

dans un domaine borné \mathcal{D} avec des conditions aux bords périodiques. Dans ces équations, A_v est une constante strictement positive qui désigne la viscosité.

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$H|_{t=0} = H_0 \geq 0, \quad b|_{t=0} = b_0, \quad Hu|_{t=0} = q_0, \quad (5.10)$$

et vérifient :

$$H_0 \in L^2(\mathcal{D}), \quad b_0 \in L^2(\mathcal{D}), \quad \frac{q_0}{H_0} \in L^1(\mathcal{D}), \quad \nabla \sqrt{H_0} \in (L^2(\mathcal{D}))^2.$$

5.1.1 Inégalités d'énergie et estimations *a priori*.

Dans cette partie, nous démontrons deux inégalités d'énergie qui nous permettent de donner des estimations *a priori*.

Proposition 5.1. *Pour (H, u, b) solution du modèle (5.7)-(5.9), on peut établir l'inégalité d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|u|^2 + \frac{1}{2Fr^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |b + H|^2 + \frac{A_v}{m+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|u|^{m+2} + \frac{A_v}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} \nabla H \cdot \nabla b \\ + \frac{A_v}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla b|^2 + \frac{A_v}{4} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla u + {}^t \nabla u|^2 + A_v^2 \frac{1-2m}{4} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla u + {}^t \nabla u|^2 |u|^m \leq 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Preuve.

On multiplie l'équation (5.8) par u , et on intègre sur \mathcal{D} . Cela nous donne, en utilisant (5.7) :

$$\int_{\mathcal{D}} H \partial_t u \cdot u + \int_{\mathcal{D}} (Hu \cdot \nabla) u \cdot u + \frac{1}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} H \nabla(H + b) \cdot u - A_v \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(HD(u)) \cdot u = 0.$$

Simplifions maintenant chaque terme :

- $\int_{\mathcal{D}} H \partial_t u \cdot u + \int_{\mathcal{D}} (Hu \cdot \nabla) u \cdot u = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^2,$
- $\int_{\mathcal{D}} H \nabla(H + b) \cdot u = \int_{\mathcal{D}} (H + b) \partial_t H = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H^2 + \int_{\mathcal{D}} b \partial_t H,$
- $\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(HD(u)) \cdot u = - \int_{\mathcal{D}} HD(u) : \nabla u = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u + {}^t \nabla u|^2.$

En remplaçant tous ces termes, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^2 + \frac{1}{2Fr^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H^2 + \frac{1}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} b \partial_t H + \frac{A_v}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u + {}^t \nabla u|^2 = 0. \quad (5.12)$$

Contrairement au cas étudié au Chapitre 1, nous ne pouvons pas faire d'hypothèse sur la régularité du fond b : les différentes relations d'énergie doivent nous permettre de donner des propriétés sur b . C'est pour cela que nous poursuivons les calculs.

On multiplie l'équation (5.8) par $|u|^m u$ et on intègre sur \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} H \partial_t u \cdot |u|^m u + \int_{\mathcal{D}} (Hu \cdot \nabla) u \cdot |u|^m u + \frac{1}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} H \nabla(H + b) \cdot |u|^m u \\ - A_v \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(HD(u)) \cdot |u|^m u = 0. \end{aligned}$$

A nouveau, on regarde les termes séparément :

- $\int_{\mathcal{D}} H \partial_t u \cdot |u|^m u + \int_{\mathcal{D}} (Hu \cdot \nabla) u \cdot |u|^m u = \frac{1}{m+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^{m+2},$
- $\frac{1}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} H \nabla(H + b) \cdot |u|^m u = -\frac{1}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} (H + b) \operatorname{div}(H|u|^m u).$

On utilise alors l'équation (5.9) pour écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} H \nabla(H + b) \cdot |u|^m u &= -\frac{1}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} (H + b) \Delta b + \frac{1}{A_v Fr^2} \int_{\mathcal{D}} (H + b) \partial_t b \\ &= \frac{1}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} \nabla H \cdot \nabla b + \frac{1}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla b|^2 + \frac{1}{A_v Fr^2} \int_{\mathcal{D}} H \partial_t b + \frac{1}{2A_v Fr^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} b^2, \end{aligned}$$

$$\bullet \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(HD(u)) \cdot |u|^m u = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u + {}^t \nabla u|^2 |u|^m - m \int_{\mathcal{D}} (HD(u) u \cdot \nabla) u \cdot u |u|^{m-2},$$

$$\text{et } \left| \int_{\mathcal{D}} (HD(u) u \cdot \nabla) u \cdot u |u|^{m-2} \right| \leq 2 \int_{\mathcal{D}} H |D(u)|^2 |u|^m.$$

En rassemblant tous ces résultats, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|u|^{m+2} + \frac{1}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} \nabla H \cdot \nabla b + \frac{1}{2Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla b|^2 + \frac{1}{A_v Fr^2} \int_{\mathcal{D}} H \partial_t b \\ + \frac{1}{2A_v Fr^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} b^2 + A_v \frac{1-2m}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u + {}^t \nabla u|^2 |u|^m \leq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

On multiplie maintenant l'équation (5.13) par A_v et on y ajoute l'égalité (5.12) : on trouve l'inégalité annoncée.

□

Cependant, nous ne connaissons toujours pas le signe du terme $\int_{\mathcal{D}} \nabla H \cdot \nabla b$. Pour avoir plus d'informations, étudions l'entropie BD.

Proposition 5.2. *Pour (H, u, b) solution du modèle (5.7)-(5.9), on montre la relation suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u + A_v \nabla \ln H|^2 + \frac{1}{Fr^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |b + H|^2 + \frac{2A_v}{m+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^{m+2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^2 \\ + \frac{A_v}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla(H + b)|^2 + \frac{A_v}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u + {}^t \nabla u|^2 + \frac{A_v}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u - {}^t \nabla u|^2 \\ + A_v^2 \frac{1-2m}{4} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla u + {}^t \nabla u|^2 |u|^m \leq 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Tout comme au Chapitre 1, la démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Si (H, u, b) est une solution du modèle (5.7)-(5.9), on a l'égalité :*

$$\begin{aligned} \frac{A_v^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |\nabla \ln H|^2 + \frac{A_v}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla H|^2 \\ = -A_v \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} u \cdot \nabla H + A_v \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : {}^t \nabla u - \frac{A_v}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} \nabla H \cdot \nabla b. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Preuve.

Ce résultat n'est qu'une réécriture du lemme 1.5, avec $2\nu = A_v$, $\tilde{\alpha}_0(H) = 0$, $\tilde{\alpha}_1(H) = 0$, $A = 0$ et sans force de Coriolis.

□

Preuve de la proposition 5.2.

L'équation (5.15) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u + A_v \nabla \ln H|^2 + \frac{A_v}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla H|^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^2 + A_v \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : {}^t \nabla u - \frac{A_v}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} \nabla H \cdot \nabla b. \end{aligned}$$

On ajoute à cette égalité l'inégalité d'énergie multipliée par 2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|u + A_v \nabla \ln H|^2 + \frac{1}{Fr^2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |b + H|^2 + \frac{2A_v}{m+2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|u|^{m+2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H|u|^2 \\ + \frac{A_v}{Fr^2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla(H+b)|^2 + \frac{A_v}{2} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla u + {}^t \nabla u|^2 + A_v^2 \frac{1-2m}{4} \int_{\mathcal{D}} H|\nabla u + {}^t \nabla u|^2 |u|^m \\ \leq A_v \int_{\mathcal{D}} H \nabla u : {}^t \nabla u, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. \square

Nous savons désormais que notre système est dissipatif. De plus, nous pouvons donner des estimations *a priori* :

Corollaire 5.4. *Si (H, u, b) est solution du modèle (5.7)-(5.9), alors, grâce à la proposition 5.2, nous avons :*

$$\begin{aligned} \|\sqrt{H}u\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^2)} &\leq c \in \mathbb{R}_+, & \|\nabla \sqrt{H}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^2)} &\leq c, \\ \|b + H\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{D}))} &\leq c, & \|\sqrt{H}|u|^{(m+2)/2}\|_{L^\infty(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^2)} &\leq c, \\ \|\nabla(H+b)\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^2)} &\leq c, & \|\sqrt{H} \nabla u\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^4)} &\leq c, \\ \|\sqrt{H}D(u)|u|^{m/2}\|_{L^2(0,T;(L^2(\mathcal{D}))^4)} &\leq c. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.1.2 Théorème de convergence.

Résultat de convergence.

Définition 5.5. *On dit qu'un triplet (H, u, b) est une solution faible du système (5.7)-(5.9) sur $(0, T) \times \mathcal{D}$ avec les conditions initiales (5.10) si :*

- le système (5.7)-(5.9) est satisfait au sens des distributions, dans $(\mathcal{D}'((0, T) \times \mathcal{D}))^4$,
- les conditions initiales (5.10) sont satisfaites dans $\mathcal{D}'(\mathcal{D})$,
- les inégalités (5.11), (5.14) sont satisfaites pour presque tout t positif, ainsi que les inégalités (5.16).

Théorème 5.6. *Soit $(H_k, u_k, b_k)_{k \geq 1}$ une suite de solutions faibles du système (5.7)-(5.9) qui satisfait les inégalités (5.11), (5.14) et dont les conditions initiales sont données par :*

$$H_k|_{t=0} = H_0^k \geq 0, \quad b_k|_{t=0} = b_0^k, \quad H_k u_k|_{t=0} = q_0^k,$$

avec

$$\int_{\mathcal{D}} H_0^k \frac{|u_0^k|^2}{2} + \frac{|H_0^k + b_0^k|^2}{2} + H_0^k \frac{|u_0^k|^{m+2}}{m+2} < C, \quad \int_{\mathcal{D}} \left| \nabla \sqrt{H_0^k} \right|^2 < C \text{ et } \int_{\mathcal{D}} |H_0^k| < C,$$

et qui vérifient $H_0^k \rightarrow H_0$, $b_0^k \rightarrow b_0$ et $q_0^k \rightarrow q_0$ dans $L^1(\mathcal{D})$.

Alors, quitte à extraire une sous-suite, (H_k, u_k, b_k) converge fortement vers une solution faible de (5.7)-(5.9) qui satisfait les inégalités (5.11), (5.14).

Ce résultat est démontré par la suite, en quatre étapes. Nous prouvons, grâce aux estimations précédentes, la convergence des différents termes qui interviennent dans l'équation.

Première étape : convergence des suites $(\sqrt{H_k})_{k \geq 1}$, $(H_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$.

Nous donnons tout d'abord les espaces dans lesquels $(\sqrt{H_k})_k$ est bornée. Si l'on intègre l'équation de la masse, on a directement $(\sqrt{H_k})_k$ dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$. Comme le Corollaire 5.4 nous donne que $\|\nabla \sqrt{H}\|_{L^\infty(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)} \leq c$, on obtient :

$$(\sqrt{H_k})_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; H^1(\mathcal{D})). \quad (5.17)$$

De plus, toujours en utilisant l'équation de la masse, on a l'égalité suivante :

$$\partial_t \sqrt{H_k} = \frac{1}{2} \sqrt{H_k} \operatorname{div} u_k - \operatorname{div} \left(\sqrt{H_k} u_k \right),$$

qui nous donne que $(\partial_t \sqrt{H_k})_k$ est bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$.

Ainsi, grâce au lemme de Aubin-Simon (voir [14] par exemple), on peut extraire une sous-suite, toujours notée $(H_k)_{k \geq 1}$ telle que $\sqrt{H_k}$ converge fortement vers un certain élément \sqrt{H} dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\mathcal{D}))$.

Passons maintenant à l'étude de $(H_k)_k$. D'après l'affirmation (5.17) et les injections de Sobolev, on sait que, pour tout p fini, $(\sqrt{H_k})_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^p(\mathcal{D}))$. Dans la suite, on supposera que $p \geq 4$ pour simplifier nos expressions et assurer que $(H_k)_k$ est dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$.

L'égalité $\nabla H_k = 2\sqrt{H_k} \nabla \sqrt{H_k}$ nous permet de borner $(\nabla H_k)_k$ dans $L^\infty(0, T; (L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))^2)$ et par conséquent $(H_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; W^{1,2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$.

De plus, nous avons des informations sur la dérivée en temps de H_k : en effet, l'équation de la masse s'écrit : $\partial_t H_k = -\operatorname{div}(H_k u_k)$. En décomposant le produit $H_k u_k$ sous la forme $H_k u_k = \sqrt{H_k} \sqrt{H_k} u_k$, nous obtenons $(H_k u_k)_k$ dans $L^\infty(0, T; (L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))^2)$ et donc $(\partial_t H_k)_k$ dans $L^\infty(0, T; W^{-1,2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$.

En utilisant à nouveau le lemme de Aubin-Simon, nous avons :

$$H_k \rightarrow H \text{ dans } \mathcal{C}^0(0, T; L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D})).$$

Enfin, regardons le terme de fond $(b_k)_k$: avec le Corollaire 5.4 et la borne de $(\sqrt{H_k})_k$ dans $L^\infty(0, T; L^p(\mathcal{D}))$, nous savons que $(b_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$. De même, nous avons $(\nabla b_k)_k$ bornée dans $L^2(0, T; (L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))^2)$, ce qui nous donne :

$$(b_k)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; W^{1,2p/(2+p)}(\mathcal{D})).$$

Pour la dérivée en temps de b_k , nous repartons de l'équation (5.9). Nous venons de montrer que $(\Delta b_k)_k$ est dans $L^\infty(0, T; W^{-1,2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$. Passons maintenant au terme en divergence :

$$H_k |u_k|^m u_k = H_k^{(1-m)/2} \left(H_k^{1/2} |u_k| \right)^m H_k^{1/2} u_k, \quad (5.18)$$

où • $\left(H_k^{(1-m)/2} \right)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^{p/(1-m)}(\mathcal{D}))$,
• $\left(\left(H_k^{1/2} |u_k| \right)^m \right)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^{2/m}(\mathcal{D}))$,
• $\left(H_k^{1/2} u_k \right)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)$,

soit $(H_k|u_k|^m u_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; (L^{2p/(2-2m+mp+p)}(\mathcal{D}))^2)$. Puisque $0 < m < 1/2$ et que l'on a supposé $p \geq 4$, on aboutit à : $(H_k|u_k|^m u_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^{4p/(2+3p)}(\mathcal{D}))$. Ainsi, comme dans notre cas $4p/(2+3p) \leq 2p/(2+2p)$, on obtient :

$$(\partial_t b_k)_k \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; W^{-1,4p/(2+3p)}(\mathcal{D})).$$

Comme $W^{1,2p/(2+p)}(\mathcal{D}) \subset \subset L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}) \subset W^{-1,4p/(2+3p)}(\mathcal{D})$, le lemme de Aubin-Simon nous permet d'affirmer que b_k converge fortement vers b dans $L^2(0, T; L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$. A noter que l'on peut également démontrer la continuité en temps avec un résultat plus faible en espace.

Seconde étape : convergence du débit $(q_k)_{k \geq 1} = (H_k u_k)_{k \geq 1}$.

A l'étape précédente, nous avons déjà démontré que la suite $(H_k u_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; (L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))^2)$ où p est un entier supérieur à 4.

En écrivant le gradient comme suit :

$$\nabla(H_k u_k) = 2\sqrt{H_k} u_k \nabla \sqrt{H_k} + \sqrt{H_k} \sqrt{H_k} \nabla u_k,$$

comme le premier terme est dans $L^\infty(0, T; L^1(\mathcal{D}))$ et le second dans $L^2(0, T; L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$, on a :

$$(H_k u_k)_k \text{ bornée dans } L^2(0, T; W^{1,1}(\mathcal{D})).$$

De plus, l'équation des moments (5.8) nous permet d'exprimer la dérivée en temps du débit :

$$\partial_t(H_k u_k) = -\operatorname{div}(H_k u_k \otimes u_k) - \frac{1}{Fr^2} H_k \nabla(H_k + b_k) + A_v \operatorname{div}(H_k D(u_k)).$$

On étudie alors chaque terme :

- $\operatorname{div}(H_k u_k \otimes u_k) = \operatorname{div}(\sqrt{H_k} u_k \otimes \sqrt{H_k} u_k)$ qui est dans $L^\infty(0, T; W^{-1,1}(\mathcal{D}))$,
- $H_k \nabla(H_k + b_k)$ est dans $L^2(0, T; L^{2p/(4+p)}(\mathcal{D})) \subset L^2(0, T; W^{-1,2p/(4+p)}(\mathcal{D}))$,
- en remarquant que

$$H_k \nabla u_k = \nabla(H_k u_k) - u_k \otimes \nabla H_k = \nabla \left(\sqrt{H_k} \sqrt{H_k} u_k \right) - 2\sqrt{H_k} u_k \nabla \sqrt{H_k}, \quad (5.19)$$

on sait que le premier terme est dans $L^\infty(0, T; W^{-1,2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$ et que le second est dans $L^\infty(0, T; L^1(\mathcal{D}))$; on a donc $H_k D(u_k)$ borné dans $L^2(0, T; W^{-1,2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$.

Enfin, on note que ces trois termes sont tous inclus dans $L^2(0, T; W^{-2,2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$, ce qui signifie que $\partial_t(H_k u_k)$ est également dans cet espace, et ce pour tout $k \geq 1$.

Alors, en appliquant le lemme de Aubin-Simon, on obtient :

$$(H_k u_k)_k \text{ converge fortement vers } q \text{ dans } L^2(0, T; L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D})).$$

Troisième étape : convergence de $(\sqrt{H_k} u_k)_{k \geq 1}$.

Le produit $\sqrt{H_k} u_k$ n'est rien d'autre que le rapport $q_k / \sqrt{H_k}$. Nous voulons, sur ce terme également, démontrer une convergence forte. Par rapport à [56], la borne sur $\sqrt{H_k} u_k^{(m+2)/2}$ simplifie nos calculs.

Avant de passer à la convergence proprement dite, développons quelques propriétés du débit

limite. Nous savons que $(q_k/\sqrt{H_k})_k$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$, donc le lemme de Fatou s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \liminf \frac{q_k^2}{H_k} \leq \liminf \int_{\mathcal{D}} \frac{q_k^2}{H_k} < +\infty.$$

En particulier $q(t, x)$ est nul pour presque tout x où $H(t, x)$ s'annule. On peut alors définir la vitesse limite en prenant $u(t, x) = q(t, x)/H(t, x)$ lorsque $H(t, x) \neq 0$ et $u(t, x) = 0$ sinon. On a donc un lien entre les limites $q(t, x) = H(t, x)u(t, x)$ ainsi que :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{q^2}{H} = \int_{\mathcal{D}} H|u|^2 < +\infty.$$

De plus, nous pouvons à nouveau utiliser le lemme de Fatou pour écrire :

$$\int_{\mathcal{D}} H|u|^{m+2} \leq \int_{\mathcal{D}} \liminf H_k|u_k|^{m+2} \leq \liminf \int_{\mathcal{D}} H_k|u_k|^{m+2},$$

qui nous donne que $\sqrt{H}|u|^{(m+2)/2}$ est dans $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$.

Puisque $(q_k)_k$ et $(H_k)_k$ convergent presque partout, lorsque H est non nul, la suite des $\sqrt{H_k}u_k = q_k/\sqrt{H_k}$ converge presque partout vers $\sqrt{H}u = q/\sqrt{H}$. De plus, pour tout M strictement positif, $(\sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| \leq M})_k$ converge presque partout vers $\sqrt{H}u \mathbf{1}_{|u| \leq M}$, toujours lorsque H ne s'annule pas. Si H s'annule, on peut écrire que $\sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| \leq M} \leq M\sqrt{H_k}$ et donc on a convergence vers 0. Ainsi, on obtient presque partout la convergence de $(\sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| \leq M})_k$.

Enfin, nous nous intéressons à la norme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} \left| \sqrt{H_k}u_k - \sqrt{H}u \right|^2 \\ & \leq \int_{\mathcal{D}} \left(\left| \sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| \leq M} - \sqrt{H}u \mathbf{1}_{|u| \leq M} \right| + \left| \sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| > M} \right| + \left| \sqrt{H}u \mathbf{1}_{|u| > M} \right| \right)^2 \\ & \leq 3 \int_{\mathcal{D}} \left| \sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| \leq M} - \sqrt{H}u \mathbf{1}_{|u| \leq M} \right|^2 + 3 \int_{\mathcal{D}} \left| \sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| > M} \right|^2 + 3 \int_{\mathcal{D}} \left| \sqrt{H}u \mathbf{1}_{|u| > M} \right|^2. \end{aligned}$$

Puisque $(\sqrt{H_k})_k$ est dans $L^\infty(0, T; L^p(\mathcal{D}))$, $(\sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| \leq M})_k$ est bornée dans ce même espace. Donc, comme nous l'avons vu précédemment, la première intégrale tend vers 0. Regardons les deux autres termes :

$$\int_{\mathcal{D}} \left| \sqrt{H_k}u_k \mathbf{1}_{|u_k| > M} \right|^2 \leq \frac{1}{M^m} \int_{\mathcal{D}} H_k|u_k|^{m+2} \leq \frac{c}{M^m},$$

$$\int_{\mathcal{D}} \left| \sqrt{H}u \mathbf{1}_{|u| > M} \right|^2 \leq \frac{1}{M^m} \int_{\mathcal{D}} H|u|^{m+2} \leq \frac{c'}{M^m},$$

pour tout $M > 0$. Lorsque M tend vers l'infini, nos deux intégrales tendent vers 0. Donc

$(\sqrt{H_k}u_k)_k$ converge fortement vers $\sqrt{H}u$ dans $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$.

Quatrième étape : convergence des termes de diffusion, de pression et de charriage.

En ce qui concerne le terme de diffusion, $(\nabla(H_k u_k))_k$ converge vers $\nabla(Hu)$ au sens des distributions, dans $(\mathcal{D}'((0, T) \times \mathcal{D}))^4$. Comme la suite $(\nabla\sqrt{H_k})_k$ converge faiblement dans $L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)$ et $(\sqrt{H_k} u_k)_k$ converge fortement dans ce même espace, alors $(u_k \otimes \nabla H_k)_k$ converge faiblement dans $L^1(0, T; (L^1(\mathcal{D}))^4)$. Donc, en utilisant le développement (5.19) du produit $H_k \nabla u_k$ présenté à la seconde étape, on a $(H_k \nabla u_k)_k$ qui converge vers $H \nabla u$ dans $(\mathcal{D}'((0, T) \times \mathcal{D}))^4$. Cela nous donne la convergence du terme de diffusion complet.

D'après le Corollaire 5.4, on sait que $(\nabla(H_k + b_k))_k$ converge faiblement vers $\nabla(H + b)$ dans $L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)$. De plus, $(H_k)_k$ converge fortement dans $\mathcal{C}^0(0, T; L^{2p/(2+p)}(\mathcal{D}))$, donc le produit converge faiblement vers $H \nabla(H + b)$ dans $L^2(0, T; (L^{p/(1+p)}(\mathcal{D}))^2)$.

Enfin, il reste le terme de charriage : $(H_k^{(1-m)/2})_k$ converge fortement vers $H^{(1-m)/2}$ dans l'espace $\mathcal{C}^0(0, T; L^{4p/((2+p)(1-m))}(\mathcal{D}))$ et la suite $(\sqrt{H_k} u_k)_k$ converge fortement vers $\sqrt{H} u$ dans $L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2)$. De plus, $(H_k^{m/2} |u_k|^m)_k$ converge fortement vers $H^{m/2} |u|^m$ dans l'espace $L^{2/m}(0, T; L^{2/m}(\mathcal{D}))$. En utilisant l'équation (5.18), on obtient que $(H_k |u_k|^m u_k)_k$ converge fortement vers $H |u|^m u$ dans $L^{2/(m+1)}(0, T; (L^{4p/(2+3p-2m+pm)}(\mathcal{D}))^2)$.

Cela termine la preuve du Théorème 5.6.

5.1.3 Résultats numériques.

Des tests numériques pour mettre en évidence les effets visqueux ont été effectués en collaboration avec E. D. FERNÁNDEZ-NIETO qui possédait un code volumes finis pour simuler la dynamique sédimentaire en l'absence de viscosité. Il s'agit d'étudier l'évolution d'une dune de sable de forme conique dans un canal rempli d'eau. La couche de sédiments s'étale progressivement à partir de cet état initial avec un certain angle. Cet angle peut être calculé dans le cas non visqueux suivant les travaux de DE VRIEND [70], sous l'hypothèse que l'interaction entre le fluide et la couche de sédiments soit faible. Dans cet article, l'auteur donne une formule analytique pour l'angle d'étalement en fonction du type de transport solide. Plus précisément, on considère l'équation de transport :

$$\partial_t b + \partial_{x_1} S_1 + \partial_{x_2} S_2 = 0,$$

où les termes S_i sont définis par :

$$S_1 = \frac{u_1}{u_{tot}} S_{tot}, \quad S_2 = \frac{u_2}{u_{tot}} S_{tot}, \quad \text{avec } u_{tot} = |u|.$$

Si l'on note ϕ l'angle d'étalement, DE VRIEND déduit la relation suivante :

$$\tan \phi = \frac{3\sqrt{3}T_u}{3T_u - 8T_H},$$

où

$$T_u = \frac{u_{tot}}{S_{tot}} \frac{\partial S_{tot}}{\partial u_{tot}} - 1 \text{ et } T_H = \frac{H}{S_{tot}} \frac{\partial S_{tot}}{\partial H} - 1.$$

Pour le modèle (5.7)-(5.9) étudié ici, sans viscosité, l'équation d'évolution des sédiments devient :

$$\partial_t b + \partial_{x_1} (A_v H |u|^m u_1) + \partial_{x_2} (A_v H |u|^m u_2) = 0.$$

Nous avons donc les égalités :

$$S_{tot} = A_v H u_{tot}^{m+1}, \quad T_u = \frac{u_{tot}}{S_{tot}} A_v H (m+1) u_{tot}^m - 1 = m \quad \text{et} \quad T_H = \frac{H}{S_{tot}} A_v u_{tot}^{m+1} - 1 = 0.$$

Finalement, on trouve que, pour ce modèle, l'angle d'étalement est indépendant du paramètre m :

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \phi = 30^\circ \text{ pour tout } m.$$

En regardant d'un peu plus près toutes ces expressions, on se rend compte que l'angle d'étalement est indépendant de la valeur de m parce que S_{tot} dépend de H . Au contraire, si S_{tot} était indépendant de H , on aurait $\partial_H S_{tot} = 0$ et $T_H = -1$, ce qui nous donnerait :

$$\tan \phi = \frac{3\sqrt{3}m}{9\sqrt{3}m + 8}.$$

Dans notre modèle, si l'on omet la dépendance en H , on obtient la formule suivante :

$$S_{tot} = A_v |u|^{m+1}$$

ce qui est exactement le modèle de Grass. Mais ici, la dépendance en H est indispensable pour la démonstration de l'existence de solutions.

| m | 0.25 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 10^2 | 10^3 | 10^{16} |
|--------|--------------|---------------|---------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|------------|
| ϕ | 7.22° | 16.99° | 21.78° | 24° | 25.28° | 26.11° | 27.93° | 29.78° | 29.97° | 30° |

TAB. 5.1 – Valeurs de ϕ en fonction de m pour le modèle de Grass.

Nous présentons dans la Table 5.1 les différentes valeurs de l'angle ϕ en fonction des valeurs de m pour le modèle de Grass. On observe que l'angle d'étalement pour ce modèle tend vers 30° , c'est-à-dire la même valeur que celle que nous avons avec dépendance en H . Cependant, la valeur de m généralement utilisée dans le modèle de Grass est $m = 2$ (voir [39] par exemple).

Paramètres utilisés.

On considère les équations (5.7)-(5.9) avec $m = 0.25$. On utilise le schéma numérique pour les systèmes hyperboliques non-conservatifs en deux dimensions introduit dans [32] qui repose sur une méthode de volumes finis. Comme nous l'avons indiqué au début de cette étude, le coefficient A_v peut être exprimé en fonction de la porosité de la couche de sédiments :

$$A_v = \frac{1}{1 - \alpha_0} \widetilde{A}_v.$$

Nous fixons nos deux paramètres : la porosité $\alpha_0 = 0.4$ (en général, elle est comprise entre 0.2 et 0.4) et $\widetilde{A}_v = 0.001$ ou 0.01. Dans le premier cas ($\widetilde{A}_v = 0.001$), ce qui correspond à une interaction très faible entre le fluide et les sédiments, on fait évoluer le modèle jusqu'au temps $t_1 = 360\,000$ s. La seconde valeur de \widetilde{A}_v , qui peut être vue comme la limite d'une interaction faible, est associée au temps final $t_2 = 36\,000$ s.

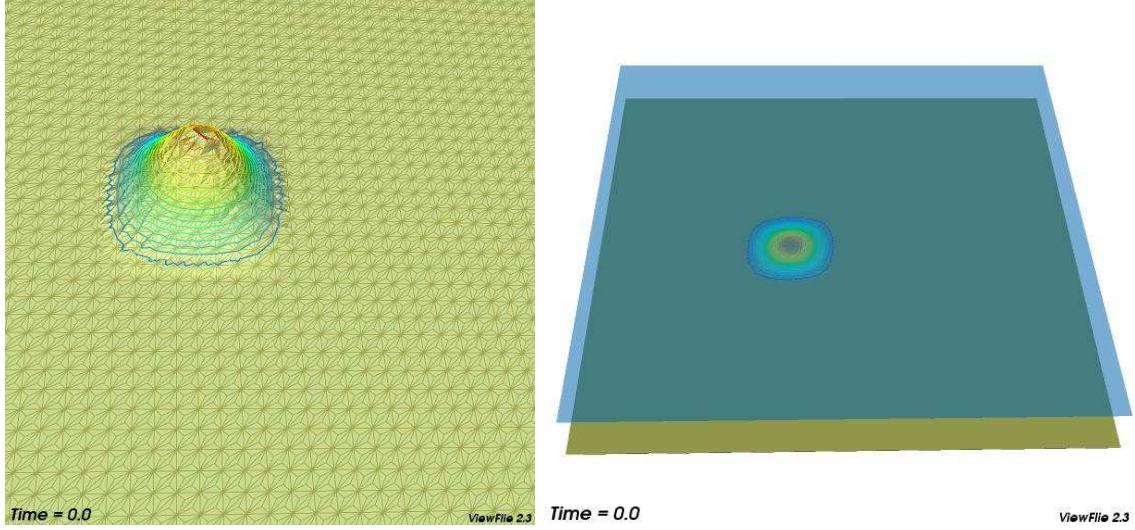


FIG. 5.2 – Zoom sur la dune de sédiments avec le maillage utilisé (à gauche) et la surface de l'eau (à droite) à l'instant initial.

Le schéma numérique repose sur une formulation volumes finis explicite, dont la condition CFL est égale à 0.8. Le maillage est un maillage volumes finis à 7600 éléments (voir Figure 5.2). On impose un débit $q = (10, 0)$ et une épaisseur de sédiments $b = 0.1$ sur le bord $x_1 = 0$ et une condition libre en $x_1 = 1000$. Sur les murs latéraux, on impose la condition de glissement $q \cdot n = 0$. Les conditions initiales sont les suivantes (voir Figure 5.2) :

$$H(0, x_1, x_2) = 10.1 - b(0, x_1, x_2), \quad q_{x_1}(0, x_1, x_2) = 10, \quad q_{x_2}(0, x_1, x_2) = 0,$$

ainsi qu'une couche de sédiments correspondant à une dune de sable de forme conique :

$$b(0, x_1, x_2) = \begin{cases} 0.1 + \sin^2\left(\frac{\pi(x_1 - 300)}{200}\right) \sin^2\left(\frac{\pi(x_2 - 400)}{200}\right) & \text{si } 300 \leq x_1 \leq 500, \\ 0.1 & \text{si } 400 \leq x_2 \leq 600, \\ \text{sinon.} & \end{cases}$$

Résultats obtenus.

Tout d'abord, pour avoir une idée de l'allure de la couche de sédiments à l'instant final, nous présentons, Figure 5.3, la dune ainsi que la surface de l'eau à la fin d'une des simulations. Les figures suivantes représentent les courbes de niveau à l'instant initial, à l'instant final t_1 (respectivement t_2) ainsi qu'à l'instant $t_1/2$ (respectivement $t_2/2$) superposées sur un même graphique. Cette superposition permet d'observer l'angle d'étalement de la dune. Nous ajoutons sur les dessins une ligne continue qui correspond à un angle de 30° et une ligne discontinue qui représente un angle de 21.78° (modèle de Grass avec $m = 2$).

Remarque 5.7. *Le fait de ne pas obtenir une symétrie parfaite est dû au maillage utilisé, voir [32].*

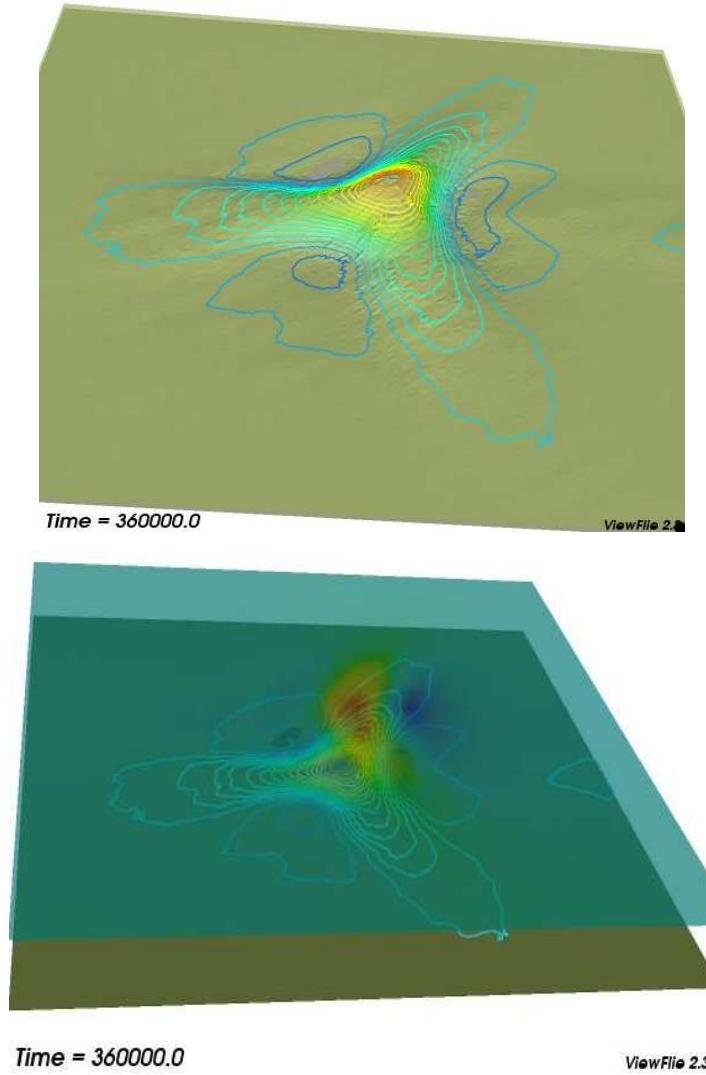


FIG. 5.3 – Allure de la dune de sédiments (en haut) et de la surface de l'eau (en bas) à l'instant final.

Sur la Figure 5.4, la valeur de \widetilde{A}_v est fixée à 0.001. Le dessin de gauche résulte du modèle sans termes visqueux, alors qu'à droite la viscosité est prise en compte.

La Figure 5.5 présente les mêmes résultats mais pour $\widetilde{A}_v = 0.01$.

Nous voyons que lorsque $\widetilde{A}_v = 0.001$ (l'interaction est alors plus faible que si $\widetilde{A}_v = 0.01$) la solution analytique correspondant à l'angle d'étalement de 30° est mieux capturée dans le cas non visqueux. Cela souligne l'importance de l'hypothèse que l'interaction soit faible dans les calculs de DE VRIEND.

Une comparaison entre les solutions visqueuses et non visqueuses nous permet d'affirmer, pour les deux choix de \widetilde{A}_v , que l'angle d'étalement est légèrement plus petit en présence de viscosité.

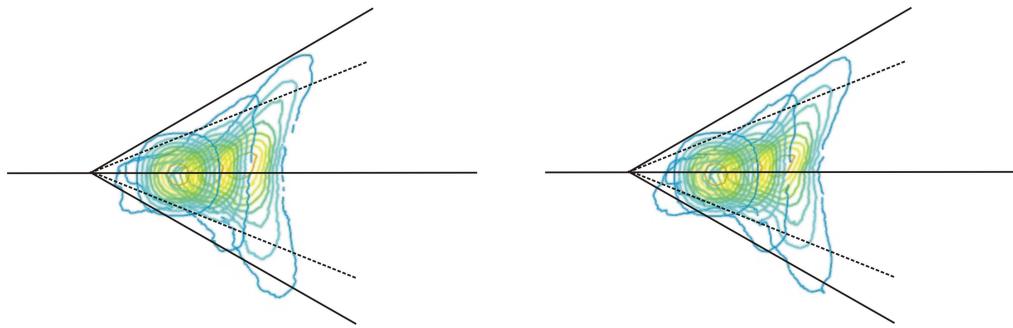


FIG. 5.4 – Angle d’étalement pour $\widetilde{A}_v = 0.001$, sans viscosité (à gauche) et avec termes visqueux (à droite).

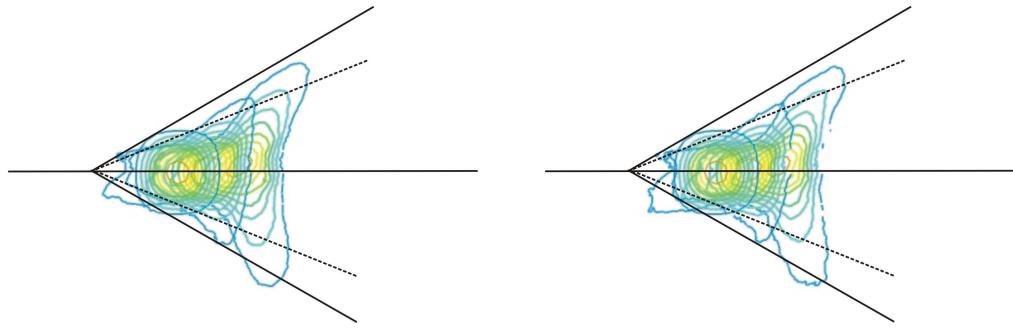


FIG. 5.5 – Angle d’étalement pour $\widetilde{A}_v = 0.01$, sans viscosité (à gauche) et avec termes visqueux (à droite).

Revenons enfin au modèle de Grass : pour $m = 2$, l’angle ϕ vaut 21.78° . Rappelons que la différence entre notre modèle et le modèle de Grass est la dépendance en H dans l’équation d’évolution des sédiments. On peut remarquer que cet angle de 21.78° correspond à l’angle d’étalement d’une des courbes de niveau de notre modèle. Notons également que cet angle est mieux capturé pour une valeur de \widetilde{A}_v petite. Nous voyons donc que les résultats du modèle de Grass avec différentes valeurs de m sont donnés par les différentes courbes de niveau de notre modèle.

5.2 Fluides de Bingham.

5.2.1 Présentation du modèle.

Certains fluides, comme les encres d'imprimerie ou la neige au cours des avalanches (voir par exemple [10], [4]), sont des matériaux complexes qui ont expérimentalement un comportement de fluide visqueux en écoulement de cisaillement, mais dont la fonction de cisaillement τ est non nulle à l'origine. La loi la plus simple décrivant l'allure de la fonction de cisaillement pour ce type de milieu a été proposée par Bingham. Elle nous permet d'écrire la loi constitutive sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma = -p\text{Id} + \tau &= -p\text{Id} + 2\mu D(U) + GB \frac{D(U)}{|D(U)|} & \text{si } |D(U)| \neq 0, \\ |\tau| &\leq GB & \text{si } |D(U)| = 0, \end{aligned} \quad (5.20)$$

où G est le taux de plasticité, GB le seuil de contrainte et $D(U)$ représente le tenseur des déformations. On rappelle que $U = (u_1, u_2, w)$ est la vitesse du fluide.

On peut interpréter cette loi comme suit :

- lorsque $|D(U)|$ s'annule, ce qui signifie que le fluide n'est pas déformé, nous ne pouvons pas déterminer les contraintes subies par le fluide. Nous pouvons seulement affirmer que le seuil n'est pas atteint,
- quand $|D(U)|$ n'est pas nul, c'est-à-dire lorsque le fluide est déformé, nous sommes alors en mesure de trouver les contraintes exercées en utilisant une relation linéaire qui dépend du taux de déformation.

Puisque τ reste indéterminé quand $|D(U)|$ est nul, nous sommes amenés à exprimer $D(U)$ en fonction de τ . Si $|D(U)| \neq 0$, on obtient :

$$|\tau| = 2\mu|D(U)| + GB > GB.$$

Nous pouvons utiliser cette formule pour écrire :

$$\begin{cases} D(U) = \left(1 - \frac{GB}{|\tau|}\right) \frac{\tau}{2\mu} & \text{si } |\tau| > GB, \\ D(U) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces deux équations font apparaître sous une autre forme l'effet de seuil :

- tant que $|\tau|$ reste plus petit que GB , le fluide n'est pas déformé,
- lorsque $|\tau|$ devient plus grand que GB , le fluide est déformé, $|D(U)| \neq 0$.

Formulation variationnelle.

A partir de ces équations, nous pouvons obtenir la formulation variationnelle largement utilisée pour l'étude des fluides de Bingham (voir [30] et [27]). Pour cela, on note \mathcal{D}_t le domaine $\mathcal{D} \times [0, h(t, x)] \subset \mathbb{R}^3$. En multipliant la divergence de τ par $U - V$, où V est une fonction test, on trouve :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \text{div } \tau \cdot (U - V) = \int_{\mathcal{D}_t} \tau_{ij} \partial_j (V_i - U_i).$$

Puisque nous avons deux expressions différentes de τ suivant le signe de $|\tau| - GB$, nous considérons séparément ces deux cas. Commençons par le cas $|\tau| > GB$; en remplaçant τ par

sa formule, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div} \tau \cdot (U - V) &= \int_{\mathcal{D}_t} \left(2\mu + \frac{GB}{|D(U)|} \right) D_{ij}(U) D_{ij}(V - U) \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} 2\mu D_{ij}(U) D_{ij}(V - U) + GB \int_{\mathcal{D}_t} \frac{D_{ij}(U) D_{ij}(V)}{|D(U)|} - \int_{\mathcal{D}_t} GB |D(U)|.\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$D_{ij}(U) D_{ij}(V) \leq |D(U)| |D(V)|,$$

et on obtient :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div} \tau \cdot (U - V) \leq \int_{\mathcal{D}_t} 2\mu D_{ij}(U) D_{ij}(V - U) + GB \int_{\mathcal{D}_t} (|D(V)| - |D(U)|). \quad (5.21)$$

Pour $|\tau| \leq GB$, contrairement au cas précédent, nous n'avons pas d'expression explicite pour τ_{ij} . Montrons cependant que l'inégalité (5.21) reste valable. Nous savons que $|D(U)| = 0$, donc :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div} \tau \cdot (U - V) = \int_{\mathcal{D}_t} \tau_{ij} D_{ij}(V - U) = \int_{\mathcal{D}_t} \tau_{ij} D_{ij}(V).$$

A nouveau, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir le résultat suivant :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div} \tau \cdot (U - V) \leq \int_{\mathcal{D}_t} |\tau| |D(V)| \leq GB \int_{\mathcal{D}_t} |D(V)|.$$

En considérant la relation $D(U) = 0$ si $|\tau| \leq GB$ nous voyons que l'inégalité (5.21) est valable pour toutes les valeurs de τ .

Nous revenons maintenant à l'équation des moments de Navier-Stokes non homogène :

$$\rho (\partial_t U + U \cdot \nabla U) = \operatorname{div} \sigma + \rho f,$$

où ρ est la densité. Nous pouvons multiplier cette équation par $U - V$ et, grâce à l'équation (5.21), on trouve la formule variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}_t} \rho (\partial_t U + U \cdot \nabla U) \cdot (V - U) + \int_{\mathcal{D}_t} 2\mu D_{ij}(U) D_{ij}(V - U) + GB \int_{\mathcal{D}_t} (|D(V)| - |D(U)|) \\ \geq \int_{\mathcal{D}_t} \rho f \cdot (V - U) - \int_{\mathcal{D}_t} \nabla p \cdot (V - U).\end{aligned}$$

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}_t} \rho (\partial_t U + U \cdot \nabla U) \cdot (V - U) + \int_{\mathcal{D}_t} 2\mu D_{ij}(U) D_{ij}(V - U) + GB \int_{\mathcal{D}_t} (|D(V)| - |D(U)|) \\ \geq \int_{\mathcal{D}_t} \rho f \cdot (V - U) - \int_{\mathcal{D}_t} \nabla p \cdot (V - U),\end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\int_{\mathcal{D}_t} q \operatorname{div} U = 0, \quad \forall q \in L^2(\mathcal{D}_t). \quad (5.23)$$

Système de Saint-Venant dans un cas simple.

Le système pour un domaine de faible profondeur s'obtient à partir des inéquations variationnelles par un choix particulier de fonctions tests. Nous en exposons ici les grandes lignes pour ensuite nous intéresser aux propriétés d'énergie.

Nous considérons donc les équations (5.22)-(5.23) avec les conditions au fond et à la surface suivantes :

$$(\sigma n)_{\tan} = -kU_{\tan} \text{ et } U \cdot n = 0 \text{ au fond, et } \sigma n = 0 \text{ à la surface } h(t, x), \quad (5.24)$$

et la condition cinématique $\partial_t h + u \cdot \nabla_x h = w$.

Remarque 5.8. *Dans ce modèle, nous avons imposé une condition de Navier au fond ; l'étude du cas avec non-glissement (voir Chapitre 2) est en cours, tout comme l'adaptation de la condition de Navier à une viscosité d'ordre ε (voir Chapitre 1).*

Nous supposons, pour simplifier les résultats, que $k = 0$, que la densité est constante, égale à 1 par exemple, et que la viscosité μ est une constante strictement positive d'ordre 1. En choisissant, dans (5.23), une fonction q ne dépendant que des variables horizontales, c'est-à-dire $q \in L^2(\mathcal{D})$, on peut faire apparaître la moyenne sur la hauteur du fluide :

$$0 = \int_{\mathcal{D}_t} q \operatorname{div} U = \int_{\mathcal{D}} q(x) \left(\int_0^{h(t, x)} \operatorname{div}_x u(t, x, z) dz + w(t, x, h(t, x)) \right) dx,$$

puis simplifier cette écriture avec la formule de Leibniz et la condition cinématique :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{D}} q \left(\operatorname{div}_x \int_0^{h(t, x)} u(t, x, z) dz - u(t, x, h(t, x)) \cdot \nabla_x h + w(t, x, h(t, x)) \right) dx \\ &= \int_{\mathcal{D}} q \left(\partial_t h + \operatorname{div}_x \int_0^{h(t, x)} u(t, x, z) dz \right) dx = \int_{\mathcal{D}} q (\partial_t h + \operatorname{div}_x (h \bar{u})) dx. \end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons définir les variables non-dimensionnelles comme au Chapitre 1 ; en enlevant les primes, cette équation nous donne :

$$\partial_t h + \operatorname{div}_x (h \bar{u}) = 0. \quad (5.25)$$

Passons maintenant à l'équation des moments : la mise sous forme non-dimensionnelle nécessite de définir des fonctions test différentes dans la direction horizontale et sur la verticale : on pose $V = (\Psi_h, \varepsilon \Psi_v)$. On suppose que le nombre de Froude est d'ordre 1 et on effectue un développement asymptotique de nos variables en fonction du rapport des échelles caractéristiques ε . Le premier ordre s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \int_0^1 \frac{\partial_z u^0 \cdot \partial_z (\Psi_h - u^0)}{(h^0)^2} = 0,$$

ce qui nous permet d'affirmer, grâce aux conditions au fond et à la surface, que u^0 ne dépend pas de la variable verticale. Le second ordre nous donne d'une part une relation sur le premier ordre de la hauteur du fluide

$$\partial_t h^0 + \operatorname{div}_x (h^0 u^0) = 0, \quad (5.26)$$

et d'autre part, si $\Psi_v = -zh^0 \operatorname{div}_x \Psi_h$, l'inégalité

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} h^0 (\partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla_x u^0) \cdot (\Psi_h - u^0) + \int_{\mathcal{D}} 2\nu h^0 D_x(u^0) : D_x(\Psi_h - u^0) \\ & + \int_{\mathcal{D}} GB h^0 \left(\sqrt{|D_x(\Psi_h)|^2 + (\operatorname{div}_x \Psi_h)^2} - \sqrt{|D_x(u^0)|^2 + (\operatorname{div}_x u^0)^2} \right) \\ & + \int_{\mathcal{D}} 2\nu h^0 \operatorname{div}_x u^0 (\operatorname{div}_x \Psi_h - \operatorname{div}_x u^0) \geq \int_{\mathcal{D}} h^0 \overline{f_h^0} \cdot (\Psi_h - u^0) + \int_{\mathcal{D}} (h^0)^2 \overline{z f_v^0} (\operatorname{div}_x \Psi_h - \operatorname{div}_x u^0), \end{aligned} \quad (5.27)$$

où l'on a supposé que f se décompose en f_h d'ordre 1 (partie horizontale) et f_v d'ordre ε (sur la verticale), et où la barre représente la moyenne pour z variant entre 0 et 1.

Le système (5.26)-(5.27) constitue le système de Bingham compressible en eaux peu profondes.

Remarque 5.9. *Nous utilisons ici le terme “compressible” par analogie entre (5.26) et l'équation vérifiée habituellement par la densité.*

Remarque 5.10. *Si l'on suppose que le fluide est à l'équilibre, c'est-à-dire que $u^0 = 0$, $w^0 = 0$ et h^0 ne dépend pas du temps, et que l'on choisit $\Psi_h = v^0 = 0$ et $\Psi_v = -zh^0 \tilde{\Psi}$, il est possible de simplifier l'équation du second ordre en une inégalité sur la pression. Dans le cas où B est nul, on retrouve alors la pression standard pour les fluides newtoniens, soit $g(h)^2/2$.*

5.2.2 Propriétés énergétiques.

Le système de Bingham a été étudié dans le cas incompressible en deux dimensions par V. V. SHELUKHIN dans [65], où l'auteur montre l'existence et l'unicité de solutions globales périodiques pour le problème non homogène. L'article [27] concerne les dimensions supérieures, toujours en incompressible mais il est restreint aux systèmes homogènes et en présente des simulations numériques. I. BASOV s'est intéressé au cas compressible en une dimension avec viscosités constantes : il a tout d'abord prouvé l'existence d'une zone rigide horizontale dans [7], puis, avec V. V. SHELUKHIN dans [8], il a obtenu l'existence d'une solution forte, toujours en dimension un.

Nous nous proposons dans cette partie de donner quelques propriétés énergétiques du système suivant :

$$\partial_t h + \operatorname{div}(hu) = 0, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} h (\partial_t u + u \cdot \nabla u) \cdot (\Psi - u) + \int_{\mathcal{D}} 2\mu(h) D(u) : D(\Psi - u) + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h) \operatorname{div} u (\operatorname{div} \Psi - \operatorname{div} u) \\ & + \int_{\mathcal{D}} g(h) \left(\sqrt{|D(\Psi)|^2 + (\operatorname{div} \Psi)^2} - \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \right) \\ & \geq \int_{\mathcal{D}} h f \cdot (\Psi - u) - \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot (\Psi - u). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Il s'agit d'une généralisation du système de Bingham compressible (5.26)-(5.27) à des viscosités μ et Λ variables. La pression p est définie par $p(h) = ah^\gamma$ et on pose $\pi(h) = p(h)/(\gamma - 1)$. On suppose que f représente la capillarité et s'écrit $f = \varsigma \nabla(\mu'(h)\Delta(h))$ où ς est le coefficient de tension de surface strictement positif. Dans la suite, on note ϑ la fonction définie par $h\vartheta'(h) = 2\mu'(h)$.

Nous commençons par montrer l'égalité d'énergie qui est classiquement obtenue sur ce type de modèles :

Proposition 5.11. *L'égalité d'énergie associée au système de Bingham (5.28)-(5.29) est donnée par :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h)|D(u)|^2 + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h)(\operatorname{div} u)^2 + \int_{\mathcal{D}} g(h)\sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \\ + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) = 0. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons ensuite à l'inégalité d'entropie que nous pouvons écrire en remplaçant la fonction test Ψ par $u - \nabla \vartheta$. Nous prouvons la proposition suivante :

Proposition 5.12. *L'inégalité d'entropie pour le système de Bingham (5.28)-(5.29) s'écrit, pour tout C tel que $0 < C < 2\sqrt{2}\varsigma\mu'(h)$:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u + \nabla \vartheta|^2 + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mu(h)|\nabla u - {}^t \nabla u|^2 \\ + (2 - \sqrt{2}) \int_{\mathcal{D}} g(h)\sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} + 2 \int_{\mathcal{D}} \frac{p'(h)\mu'(h)}{h} |\nabla h|^2 \\ + \int_{\mathcal{D}} \left(2\varsigma\mu'(h) - \frac{C}{\sqrt{2}} \right) |\Delta \mu(h)|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}C} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} g(h) \frac{|\nabla \vartheta|^2}{\mu'(h)}. \end{aligned}$$

Cette étape de recherche d'estimations d'énergie sur la vitesse, la hauteur et la dérivée d'une fonction de la hauteur semble nécessaire si l'on désire montrer le caractère bien posé du système. Le modèle de Bingham faible profondeur est en effet bien plus compliqué que le modèle de Saint-Venant "standard" où les deux types d'énergie sont fortement utilisés.

Egalité d'énergie.

Tout d'abord, nous montrons l'égalité d'énergie, en considérant successivement dans (5.29) les cas $\Psi = 0$ et $\Psi = 2u$. Nous obtenons les deux relations :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{D}} h(\partial_t u + u \cdot \nabla u) \cdot u - \int_{\mathcal{D}} 2\mu(h)|D(u)|^2 - \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h)(\operatorname{div} u)^2 \\ - \int_{\mathcal{D}} g(h)\sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \geq - \int_{\mathcal{D}} h f \cdot u + \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot u, \\ \int_{\mathcal{D}} h(\partial_t u + u \cdot \nabla u) \cdot u + \int_{\mathcal{D}} 2\mu(h)|D(u)|^2 + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h)(\operatorname{div} u)^2 \\ + \int_{\mathcal{D}} g(h)\sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \geq \int_{\mathcal{D}} h f \cdot u - \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot u, \end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux membres. L'équation (5.28) nous permet de simplifier le premier terme :

$$\int_{\mathcal{D}} h(\partial_t u + u \cdot \nabla u) \cdot u = \int_{\mathcal{D}} h \partial_t u \cdot u - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(hu)|u|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u|^2.$$

Nous pouvons également remplacer les expressions de la capillarité et de la pression :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} h f \cdot u &= \varsigma \int_{\mathcal{D}} h \nabla(\mu'(h)\Delta(h)) \cdot u = \varsigma \int_{\mathcal{D}} \partial_t h \mu'(h)\Delta(h) = -\frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2, \\ \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot u &= \gamma a \int_{\mathcal{D}} h^{\gamma-1} \nabla h \cdot u = \gamma a \int_{\mathcal{D}} \nabla \left(\frac{h^{\gamma-1}}{\gamma-1} \right) \cdot (hu) = \gamma a \int_{\mathcal{D}} \frac{h^{\gamma-1}}{\gamma-1} \partial_t h \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} p(h) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h), \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h)|D(u)|^2 + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h)(\operatorname{div} u)^2 + \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \\ + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Inégalité d'entropie.

Pour avoir plus d'information, comme précédemment, nous écrivons une inégalité d'entropie pour le système de Bingham compressible. Nous commençons par développer l'expression suivante grâce à l'équation (5.28) :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u + \nabla \vartheta|^2 = \int_{\mathcal{D}} h(u + \nabla \vartheta) \cdot \partial_t(u + \nabla \vartheta) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \partial_t h|u + \nabla \vartheta|^2 \\ &= \int_{\mathcal{D}} h \partial_t u \cdot (u + \nabla \vartheta) + \int_{\mathcal{D}} h \partial_t \nabla \vartheta \cdot (u + \nabla \vartheta) - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(hu)|u + \nabla \vartheta|^2 \\ &= \int_{\mathcal{D}} h \partial_t u \cdot (u + \nabla \vartheta) + \int_{\mathcal{D}} h \partial_t \nabla \vartheta \cdot (u + \nabla \vartheta) + \int_{\mathcal{D}} (h(u \cdot \nabla)u) \cdot (u + \nabla \vartheta) \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}} (h(u \cdot \nabla) \nabla \vartheta) \cdot (u + \nabla \vartheta) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u|^2 + \int_{\mathcal{D}} h \partial_t u \cdot \nabla \vartheta + \int_{\mathcal{D}} h \partial_t \nabla \vartheta \cdot (u + \nabla \vartheta) + \int_{\mathcal{D}} (h(u \cdot \nabla)u) \cdot \nabla \vartheta \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}} (h(u \cdot \nabla) \nabla \vartheta) \cdot (u + \nabla \vartheta). \end{aligned}$$

On multiplie ensuite l'équation (5.28) par ϑ' et on en prend le gradient :

$$\partial_t \nabla \vartheta + (u \cdot \nabla) \nabla \vartheta + {}^t \nabla u \nabla \vartheta + \nabla(h \vartheta'(h) \operatorname{div} u) = 0.$$

Cette relation nous permet de réécrire I sous la forme :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u|^2 + \int_{\mathcal{D}} h \partial_t u \cdot \nabla \vartheta + \int_{\mathcal{D}} (h(u \cdot \nabla)u) \cdot \nabla \vartheta \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}} h ({}^t \nabla u \nabla \vartheta) \cdot (u + \nabla \vartheta) - \int_{\mathcal{D}} h \nabla(h \vartheta'(h) \operatorname{div} u) \cdot (u + \nabla \vartheta). \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité d'énergie (5.30), nous obtenons la relation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u + \nabla \vartheta|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h)|D(u)|^2 + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h)(\operatorname{div} u)^2 + \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \\ + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) - \int_{\mathcal{D}} h \partial_t u \cdot \nabla \vartheta - \int_{\mathcal{D}} (h(u \cdot \nabla)u) \cdot \nabla \vartheta \\ + \int_{\mathcal{D}} h ({}^t \nabla u \nabla \vartheta) \cdot (u + \nabla \vartheta) + \int_{\mathcal{D}} h \nabla(h \vartheta'(h) \operatorname{div} u) \cdot (u + \nabla \vartheta) = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Par ailleurs, considérons, dans l'équation (5.29), le cas $\Psi = u - \nabla\vartheta$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{D}} h (\partial_t u + u \cdot \nabla u) \cdot \nabla\vartheta - 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) D(u) : D(\nabla\vartheta) - \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h) \operatorname{div} u (\operatorname{div} \nabla\vartheta) \\ & \quad + \int_{\mathcal{D}} g(h) \left(\sqrt{|D(u - \nabla\vartheta)|^2 + (\operatorname{div}(u - \nabla\vartheta))^2} - \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \right) \quad (5.32) \\ & \geq - \int_{\mathcal{D}} h f \cdot \nabla\vartheta + \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla\vartheta. \end{aligned}$$

En combinant les équations (5.31) et (5.32), on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h |u + \nabla\vartheta|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) |D(u)|^2 + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h) (\operatorname{div} u)^2 + \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \\ & \quad + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) D(u) : D(\nabla\vartheta) + \int_{\mathcal{D}} \Lambda(h) \operatorname{div} u (\Delta\vartheta) + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) \\ & \quad + \int_{\mathcal{D}} h ({}^t \nabla u \nabla\vartheta) \cdot (u + \nabla\vartheta) + \int_{\mathcal{D}} h \nabla (h \vartheta'(h) \operatorname{div} u) \cdot (u + \nabla\vartheta) \quad (5.33) \\ & \quad - \int_{\mathcal{D}} g(h) \left(\sqrt{|D(u - \nabla\vartheta)|^2 + (\operatorname{div}(u - \nabla\vartheta))^2} - \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \right) \\ & \leq \int_{\mathcal{D}} h f \cdot \nabla\vartheta - \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla\vartheta. \end{aligned}$$

Nous pouvons étudier séparément les différents termes pour simplifier cette inégalité. Tout d'abord, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} h ({}^t \nabla u \nabla\vartheta) \cdot (u + \nabla\vartheta) &= \int_{\mathcal{D}} h ((u \cdot \nabla) u) \cdot \nabla\vartheta + \int_{\mathcal{D}} h ((\nabla\vartheta \cdot \nabla) u) \cdot \nabla\vartheta \\ &= 2 \int_{\mathcal{D}} (u \cdot \nabla u) \cdot \nabla \mu(h) + 2 \int_{\mathcal{D}} ((\nabla\vartheta \cdot \nabla) u) \cdot \nabla \mu(h) \\ &= -2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) {}^t \nabla u : \nabla u - 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) u \cdot \nabla \operatorname{div} u + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) \Delta\vartheta \operatorname{div} u \\ & \quad + 2 \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} u \nabla\vartheta \cdot \nabla \mu(h) - 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) \nabla u : \nabla \nabla\vartheta, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathcal{D}} h \nabla (h \vartheta'(h) \operatorname{div} u) \cdot (u + \nabla\vartheta) = 2 \int_{\mathcal{D}} h \nabla (\mu'(h) \operatorname{div} u) \cdot (u + \nabla\vartheta) \\ &= -2 \int_{\mathcal{D}} h \mu'(h) |\operatorname{div} u|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) |\operatorname{div} u|^2 + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) u \cdot \nabla \operatorname{div} u \\ & \quad - 2 \int_{\mathcal{D}} h \mu'(h) \operatorname{div} u \Delta\vartheta - 2 \int_{\mathcal{D}} \nabla \mu(h) \nabla \vartheta \operatorname{div} u. \end{aligned}$$

Notons également que :

$$2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) D(u) : D(\nabla\vartheta) = 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) \nabla u : \nabla \nabla\vartheta.$$

En remplaçant toutes ces égalités dans la relation (5.33), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u + \nabla \vartheta|^2 + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) + 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h) |D(u)|^2 \\ & + 2 \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} - \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u - \nabla \vartheta)|^2 + (\operatorname{div}(u - \nabla \vartheta))^2} \\ & + \int_{\mathcal{D}} (\Lambda(h) + 2(\mu(h) - h\mu'(h))) (|\operatorname{div} u|^2 + \operatorname{div} u \Delta \vartheta) - 2 \int_{\mathcal{D}} \mu(h)^t \nabla u : \nabla u \\ & + \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla \vartheta \leq \int_{\mathcal{D}} h f \cdot \nabla \vartheta. \end{aligned}$$

En prenant $\Lambda = 2(h\mu'(h) - \mu(h))$ et en remarquant que

$$\int_{\mathcal{D}} \mu(h) |D(u)|^2 - \int_{\mathcal{D}} \mu(h)^t \nabla u : \nabla u = \int_{\mathcal{D}} \mu(h) \frac{|\nabla u - {}^t \nabla u|^2}{4},$$

on arrive à l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h|u + \nabla \vartheta|^2 + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mu(h) |\nabla u - {}^t \nabla u|^2 \\ & + 2 \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} - \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u - \nabla \vartheta)|^2 + (\operatorname{div}(u - \nabla \vartheta))^2} \quad (5.34) \\ & + \int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla \vartheta \leq \int_{\mathcal{D}} h f \cdot \nabla \vartheta. \end{aligned}$$

Le terme de pression peut être réécrit sous la forme :

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla p \cdot \nabla \vartheta = 2 \int_{\mathcal{D}} \frac{p'(h) \mu'(h)}{h} |\nabla h|^2,$$

et le terme de capillarité comme suit :

$$\int_{\mathcal{D}} h f \cdot \nabla \vartheta = \varsigma \int_{\mathcal{D}} h \nabla (\mu'(h) \Delta \mu(h)) \cdot \nabla \vartheta = -2\varsigma \int_{\mathcal{D}} \mu'(h) |\Delta \mu(h)|^2.$$

Il reste à exprimer la racine :

$$\begin{aligned} \sqrt{|D(u - \nabla \vartheta)|^2 + (\operatorname{div}(u - \nabla \vartheta))^2} & \leq \sqrt{2} \sqrt{|D(u)|^2 + |D(\nabla \vartheta)|^2 + (\operatorname{div} u)^2 + (\operatorname{div} \nabla \vartheta)^2} \\ & \leq \sqrt{2} \left(\sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} + \sqrt{|D(\nabla \vartheta)|^2 + (\operatorname{div} \nabla \vartheta)^2} \right). \end{aligned}$$

Le terme ne dépendant que de la vitesse est absorbé à gauche. Il nous faut donc étudier le terme lié à ϑ :

$$\begin{aligned} \sqrt{|D(\nabla \vartheta)|^2 + (\operatorname{div} \nabla \vartheta)^2} & \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 (\partial_i \partial_j \vartheta)^2} \leq \sqrt{6} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial_i \partial_j \mu}{h} - \frac{\partial_i \mu \partial_j \mu}{h^2 \mu'(h)} \right)^2} \\ & \leq \sqrt{6} \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial_i \partial_j \mu}{h} \right)^2} + \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial_i \mu \partial_j \mu}{h^2 \mu'(h)} \right)^2} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\sum_{i,j=1}^2 (\partial_i \mu \partial_j \mu)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^2 (\partial_i \mu)^4 + (\partial_j \mu)^4 \right) = 2 \sum_{i=1}^2 (\partial_i \mu)^4 = \left(\sqrt{2} \sum_{i=1}^2 (\partial_i \mu)^2 \right)^2,$$

on majore facilement la seconde racine :

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial_i \mu \partial_j \mu}{h^2 \mu'(h)} \right)^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{|\nabla \vartheta|^2}{\mu'(h)}.$$

En ce qui concerne l'autre racine carrée, nous pouvons écrire :

$$\int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial_i \partial_j \mu}{h} \right)^2} = \int_{\mathcal{D}} g(h) \left| \frac{\nabla \nabla \mu}{h} \right| \leq \sqrt{\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2} \sqrt{\int_{\mathcal{D}} |\nabla \nabla \mu|^2},$$

et donc, pour toute constante C strictement positive, l'inégalité de Young nous donne :

$$\int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial_i \partial_j \mu}{h} \right)^2} \leq \frac{1}{2C} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 + \frac{C}{2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \nabla \mu|^2 \leq \frac{1}{2C} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 + \frac{C}{2} \int_{\mathcal{D}} |\Delta \mu|^2.$$

Nous sommes maintenant en mesure de remplacer tous ces termes dans l'inégalité (5.34) pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h |u + \nabla \vartheta|^2 + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mu(h) |\nabla u - {}^t \nabla u|^2 \\ & + (2 - \sqrt{2}) \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} + 2 \int_{\mathcal{D}} \frac{p'(h) \mu'(h)}{h} |\nabla h|^2 \\ & + \int_{\mathcal{D}} \left(2\varsigma \mu'(h) - \frac{C}{\sqrt{2}} \right) |\Delta \mu(h)|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}C} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} g(h) \frac{|\nabla \vartheta|^2}{\mu'(h)}, \quad \forall C > 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

On peut également écrire cette relation sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} h |u + \nabla \vartheta|^2 + \frac{\varsigma}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\nabla \mu(h)|^2 + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \pi(h) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mu(h) |\nabla u - {}^t \nabla u|^2 \\ & + (2 - \sqrt{2}) \int_{\mathcal{D}} g(h) \sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2} \int_{\mathcal{D}} \frac{h p'(h) - g(h)}{2 \mu'(h)} |\nabla \vartheta|^2 \\ & + \int_{\mathcal{D}} \left(2\varsigma \mu'(h) - \frac{C}{\sqrt{2}} \right) |\Delta \mu(h)|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}C} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2, \quad \forall C > 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

On choisit de prendre C strictement positif et inférieur à $2\sqrt{2}\varsigma\mu'(h)$ pour que le coefficient de $\Delta \mu$ reste positif.

Estimations *a priori*.

L'égalité d'énergie (5.30) nous permet d'affirmer que :

- $\sqrt{h}u$, $|\nabla\mu(h)|$ et $\sqrt{\pi(h)}$ sont dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$,
- $\sqrt{\mu(h)}|D(u)|$ et $\sqrt{\Lambda(h)}\operatorname{div} u$ sont dans $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$,
- $g(h)\sqrt{|D(u)|^2 + (\operatorname{div} u)^2}$ est dans $L^1(0, T; L^1(\mathcal{D}))$.

Nous pouvons définir les conditions que la fonction g doit vérifier pour que l'inégalité d'entropie (5.35) ou (5.36) donne de meilleures bornes. Tout d'abord, concernant les termes en $\nabla\vartheta$, nous imposons :

- $g(h) \leq hp'(h)$ si l'on considère l'équation (5.36),
- $g(h) \leq 2h\mu'(h)$ si l'on veut appliquer le lemme de Gronwall à l'équation (5.35).

Il reste à étudier le terme :

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2.$$

Une première idée est d'appliquer le lemme de Gronwall et d'imposer

$$\left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 \leq \sqrt{2}C\pi(h).$$

Une autre méthode pour surmonter cette difficulté est d'exprimer ce terme sous la forme d'un gradient de g , grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 &\leq 2 \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} - \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \frac{g(h)}{h} \right)^2 + \frac{2}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 \\ &\leq \tilde{C} \int_{\mathcal{D}} \left| \nabla \left(\frac{g(h)}{h} \right) \right|^2 + \frac{2}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2, \end{aligned}$$

où $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{D})$ est une constante positive qui ne dépend que du domaine \mathcal{D} . Si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\frac{\tilde{C}}{\sqrt{2}C} \left| \nabla \left(\frac{g(h)}{h} \right) \right| \leq \frac{\varsigma}{2} |\nabla\mu(h)|$,
- $\left| \nabla \left(\frac{g(h)}{h} \right) \right| \leq |\nabla\vartheta|$ et $\frac{hp'(h) - g(h)}{2\mu'(h)} - \frac{\tilde{C}}{\sqrt{2}C} \geq 0$,

alors le gradient nous permettra d'appliquer le lemme de Gronwall. Il faudra aussi que :

$$\frac{2}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{g(h)}{h} \right)^2 \leq C \int_{\mathcal{D}} \pi(h),$$

pour conclure quant à l'existence de bornes uniformes.

Finalement, si nous sommes dans l'un des deux cas que nous venons de présenter, notre nouvelle inégalité nous permet d'affirmer que :

$\sqrt{h}(u + \nabla\vartheta)$ est dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ et $\sqrt{\mu(h)}|\nabla u - {}^t\nabla\mu|$ est dans $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$.

En combinant ces résultats avec ceux obtenus grâce à l'énergie classique, nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt{h} \nabla \vartheta \text{ ou } h^{-1/2} \nabla \mu \text{ est dans } L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})), \\ \sqrt{\mu(h)} |\nabla u| \text{ est dans } L^2(0, T; L^2(\mathcal{D})). \end{aligned}$$

Les inégalités précédentes montrent le caractère énergétiquement consistant du modèle. Une étude du caractère bien posé du système sur la base de ces estimations est en cours.

Conclusion.

Dans une première partie, nous nous sommes intéressés à un modèle de sédimentation avec viscosité. Ce modèle étant un couplage entre les équations de Saint-Venant visqueuses et une équation d'évolution pour le fond, nous avons utilisé le système de Saint-Venant obtenu au Chapitre 1 et une équation avec diffusion pour la couche de sédiments. Ces choix nous ont permis d'écrire des inégalités d'énergie et de donner un théorème de stabilité. Nous avons ensuite programmé ce modèle et comparé, dans le cas d'une dune de sable dans un canal, les résultats obtenus avec et sans viscosité, ainsi que ceux donnés par le modèle de Grass, fréquemment utilisé.

Dans une seconde partie, nous avons étudié le modèle de Bingham pour les fluides à seuil. Ce cas est nettement plus complexe que les précédents puisque, d'une part, il s'écrit sous la forme d'une inégalité, et que, d'autre part, les viscosités sont dégénérées. Nous sommes parvenus à écrire une nouvelle inégalité d'entropie qui nous donne de nouvelles estimations *a priori*, étapes nécessaires pour espérer montrer l'existence de solutions.

Deuxième partie

Équations Quasi-Géostrophiques

et

équation des lacs.

Chapitre 6

Modèle de Saint-Venant Quasi-Géostrophique en deux dimensions.

Nous développons ici le cas des équations de Saint-Venant Quasi-Géostrophiques en dimension deux. Ces équations sont utilisées dans la modélisation de la circulation océanique ou atmosphérique à moyenne latitude. Elles s'obtiennent à partir des équations de Saint-Venant, présentées au Chapitre 1, en supposant que les nombres de Rossby et de Froude sont petits. Nous voyons donc apparaître de nouveaux termes liés au *cosinus* de la force de Coriolis.

Nous étudions ensuite les propriétés mathématiques de ces équations. En particulier, nous donnons des estimations *a priori* qui nous permettent de conclure quant au caractère globalement bien posé du système dans des espaces de Sobolev adéquats.

Enfin, dans une dernière partie, nous nous intéressons aux résultats numériques que nous avons obtenus autour de ces équations. Nous présentons d'abord la méthodologie qui a été utilisée lors de la programmation, puis nous donnons des résultats pour certains cas proches de la réalité. Nous pouvons ainsi nous rendre compte de l'importance de l'effet cosinus.

La partie numérique de ce chapitre a été réalisée en collaboration avec A. ROUSSEAU et a donné lieu à un article, C. LUCAS, A. ROUSSEAU, *New developments and cosine effect in the viscous Shallow Water and Quasi-Geostrophic Equations*, soumis.

6.1 Obtention des équations de Saint-Venant Quasi-Géostrophiques en deux dimensions.

On présente ici l'obtention des équations de Saint-Venant Quasi-Géostrophiques dimensionnelles avec variation de latitude (pour avoir l'effet dû au plan β) à partir des équations de Saint-Venant visqueuses avec les nouveaux termes en *cosinus* de la latitude. Le but sera ensuite de résoudre numériquement ces équations et de voir l'influence de ce nouveau terme.

On considère les équations de Saint-Venant avec latitude variable, sans termes de trainée turbulente (voir Chapitre 1) :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla H^2 &= -2\Omega \sin \theta H u^\perp + \Omega \cos \theta e_1 H^2 \operatorname{div} u + \Omega \nabla(\cos \theta H^2 u_1) \\ &\quad - \alpha_0(H) u + 2\mu \operatorname{div}(HD(u)) + 2\mu \nabla(H \operatorname{div} u) + a H \nabla \Delta H \\ &\quad + a H \nabla \Delta b - g H \nabla b - 2\Omega \cos \theta H e_1 \nabla b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla b, \end{aligned}$$

avec $\alpha_0(H) = k / \left(1 + \frac{kH}{3\mu}\right)$. Dans ces relations, H désigne la hauteur d'eau, k est le coefficient de frottement au fond, a représente le coefficient de tension de surface, et μ la viscosité du fluide.

On les réécrit en variables non-dimensionnelles, en utilisant les mêmes échelles que lors de l'obtention du modèle de Saint-Venant. L'expression utilisée pour le nombre de Rossby importe peu puisque la dernière étape sera de revenir aux variables dimensionnelles. Enfin, comme la latitude θ est variable, suivant l'approximation du plan β , on remplace $2\Omega \sin \theta$ par $2\Omega \sin \theta_0 + \beta x_2$ et $2\Omega \cos \theta$ par $2\Omega \cos \theta_0 - \beta \tan \theta_0 x_2$ dans les équations précédentes (voir [60]) et on passe aux équations sans dimension en posant $\beta' = \beta L_{car}^2 / U_{car}$. On obtient, en omettant les primes :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{1}{Fr^2} H \nabla H &= -\frac{\sin \theta_0}{Ro} H u^\perp - \beta x_2 H u^\perp + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2 Ro} e_1 H^2 \operatorname{div} u \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \beta \tan \theta_0 x_2 e_1 H^2 \operatorname{div} u + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2 Ro} \nabla(H^2 u_1) - \frac{\varepsilon}{2} \beta \tan \theta_0 \nabla(x_2 H^2 u_1) \\ &\quad - \tilde{\alpha}_0(H) u + 2\nu \operatorname{div}(HD(u)) + 2\nu \nabla(H \operatorname{div} u) + A H \nabla \Delta H + A H \nabla \Delta b \\ &\quad - \frac{1}{Fr^2} H \nabla b - \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{Ro} H e_1 \nabla b \cdot u + \varepsilon \beta \tan \theta_0 x_2 H e_1 \nabla b \cdot u \\ &\quad + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{Ro} u_1 H \nabla b - \varepsilon \beta \tan \theta_0 x_2 u_1 H \nabla b. \end{aligned}$$

On pose $Ro = \eta$, et donc $Fr^2 = F\eta^2$ avec $F = (2L_{car}\Omega)^2/(gH_{car})$, $\eta \ll 1$, et ε fixé. On écrit le développement asymptotique suivant : $u = u^0 + \eta u^1 + \dots$, $H = 1 + F\eta H^1 + \dots$; on note également $b = \eta \tilde{b}$.

On doit donc étudier les équations suivantes :

$$\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{1}{F\eta^2} H \nabla H &= -\frac{\sin \theta_0}{\eta} H u^\perp - \beta x_2 H u^\perp + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2\eta} e_1 H^2 \operatorname{div} u \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \beta \tan \theta_0 x_2 e_1 H^2 \operatorname{div} u + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2\eta} \nabla(H^2 u_1) - \frac{\varepsilon}{2} \beta \tan \theta_0 \nabla(x_2 H^2 u_1) \quad (6.2) \\ &\quad - \tilde{\alpha}_0(H) u + 2\nu \operatorname{div}(HD(u)) + 2\nu \nabla(H \operatorname{div} u) + A H \nabla \Delta H + A H \nabla \Delta b \\ &\quad - \frac{1}{F\eta^2} H \nabla b - \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{\eta} H e_1 \nabla b \cdot u + \varepsilon \beta \tan \theta_0 x_2 H e_1 \nabla b \cdot u \\ &\quad + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{\eta} u_1 H \nabla b - \varepsilon \beta \tan \theta_0 x_2 u_1 H \nabla b + H \tilde{f}. \end{aligned}$$

L'équation (6.1) donne au premier ordre :

$$\operatorname{div} u^0 = 0,$$

et au second ordre :

$$F \partial_t H^1 + \operatorname{div} u^1 + F \operatorname{div}(H^1 u^0) = 0,$$

ce qui se réécrit, puisque u^0 est à divergence nulle,

$$\partial_t H^1 + \frac{1}{F} \operatorname{div} u^1 + \nabla H^1 \cdot u^0 = 0.$$

De la même façon, on développe l'équation (6.2) et on trouve au premier ordre :

$$\nabla H^1 + \sin \theta_0 u^{0\perp} - \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2} \nabla u_1^0 + \frac{1}{F} \nabla \tilde{b} = 0.$$

On utilise le fait que u^0 est à divergence nulle pour réécrire $\nabla u_1^0 = \partial_{x_2} u^{0\perp}$, donc :

$$\nabla H^1 + \left(\sin \theta_0 - \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2} \partial_{x_2} \right) u^{0\perp} + \frac{1}{F} \nabla \tilde{b} = 0. \quad (6.3)$$

Au second ordre, en simplifiant les termes en $\operatorname{div} u^0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + F H^1 \nabla H^1 + F \nabla H^2 &= -\tilde{\alpha}_0(1) u^0 + 2\nu \operatorname{div}(D(u^0)) - \sin \theta_0 u^{1\perp} \\ &\quad - \sin \theta_0 F H^1 u^{0\perp} - \beta x_2 u^{0\perp} + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2} \nabla u_1^1 + \varepsilon F \cos \theta_0 \nabla(u_1^0 H^1) - \frac{\varepsilon F}{2} \beta \tan \theta_0 \nabla(x_2 u_1^0 H^1) \\ &\quad + \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2} e_1 \operatorname{div} u^1 - H^1 \nabla \tilde{b} - \varepsilon \cos \theta_0 e_1 \nabla \tilde{b} \cdot u^0 + \varepsilon \cos \theta_0 u_1^0 \nabla \tilde{b} + \tilde{f}. \end{aligned}$$

On en prend le *curl* ($-\partial_{x_2}$ de la première composante + ∂_{x_1} de la seconde) :

$$\begin{aligned} (\partial_t + u^0 \cdot \nabla)(\operatorname{curl} u^0) &= -\tilde{\alpha}_0(1) \operatorname{curl} u^0 + \nu \Delta(\operatorname{curl} u^0) + \sin \theta_0 F (\partial_t H^1 + u^0 \cdot \nabla H^1) \\ &\quad - \sin \theta_0 F u^0 \cdot \nabla H^1 - \beta u_2^0 + \frac{\varepsilon F \cos \theta_0}{2} \partial_{x_2} (\partial_t H^1 + u^0 \cdot \nabla H^1) - \nabla^\perp H^1 \cdot \nabla \tilde{b} \\ &\quad + \varepsilon \cos \theta_0 \partial_{x_2} (u^0 \cdot \nabla \tilde{b}) + \varepsilon \cos \theta_0 \nabla^\perp u_1^0 \cdot \nabla \tilde{b} + \operatorname{curl} \tilde{f}. \end{aligned}$$

On vérifie que, avec l'expression de ∇H^1 ci-dessus (équation (6.3)), on a :

$$u^0 \cdot \nabla H^1 - \frac{\varepsilon}{2 \tan \theta_0} (\partial_{x_2} u^0) \cdot \nabla H^1 + \frac{1}{F} \nabla^\perp H^1 \cdot \nabla \tilde{b} = 0,$$

et, en utilisant à nouveau $\nabla u_1^0 = \partial_{x_2} u^0 \perp$,

$$(\partial_{x_2} u^0) \cdot \nabla \tilde{b} + \nabla^\perp u_1^0 \cdot \nabla \tilde{b} = 0.$$

On pose ψ telle que $u^0 = \nabla^\perp \psi$, donc $H^1 = \left(\sin \theta_0 - \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2} \partial_{x_2} \right) \psi - \frac{\tilde{b}}{F}$, $D_t = (\partial_t + u^0 \cdot \nabla)$ et on aboutit à :

$$\begin{aligned} D_t \left(\left(\partial_{x_1}^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon^2 F \cos^2 \theta_0}{4} \right) \partial_{x_2}^2 \right) \psi - \sin \theta_0 F \psi + \left(\sin \theta_0 - \frac{\varepsilon \cos \theta_0}{2} \partial_{x_2} \right) \tilde{b} + \beta x_2 \right) \\ = -\tilde{\alpha}_0(1) \Delta \psi + \nu \Delta^2 \psi + \operatorname{curl} \tilde{f}. \quad (6.4) \end{aligned}$$

L'équation (6.4) est l'équation Quasi-Géostrophique obtenue à partir du système de Saint-Venant visqueux au second ordre avec topographie variable. Cette équation est en variables non-dimensionnelles ; revenons maintenant aux variables dimensionnelles. On obtient :

$$\begin{aligned} D_t \left(\left(\partial_{x_1}^2 + (1 + \delta^2) \partial_{x_2}^2 \right) \psi - \frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{g H_{car}} \psi + \left(1 - \frac{H_{car}}{2 \tan \theta_0} \partial_{x_2} \right) \frac{2\Omega \sin \theta_0}{H_{car}} b + \beta x_2 \right) \\ = -\frac{1}{\varepsilon L_{car}} \alpha_0(H_{car}) \Delta \psi + \mu \Delta^2 \psi + \operatorname{curl} f, \quad (6.5) \end{aligned}$$

avec $D_t = (\partial_t + u^0 \cdot \nabla)$, $H_{car} = \varepsilon L_{car}$ et $\delta = \Omega \sqrt{H_{car}/g} \cos \theta_0$, ainsi que $u^0 = \nabla^\perp \psi$.

A cette équation, nous devons ajouter des conditions aux bords. Tout d'abord, comme notre domaine \mathcal{D} a des bords imperméables, nous avons : $\psi = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$. Nous considérons également la condition de glissement $\Delta \psi = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$. Dans le cas d'un rectangle, cas que nous étudions par la suite, ces conditions se traduisent facilement en termes de vitesse, puisque $u^0 = \nabla^\perp \psi$.

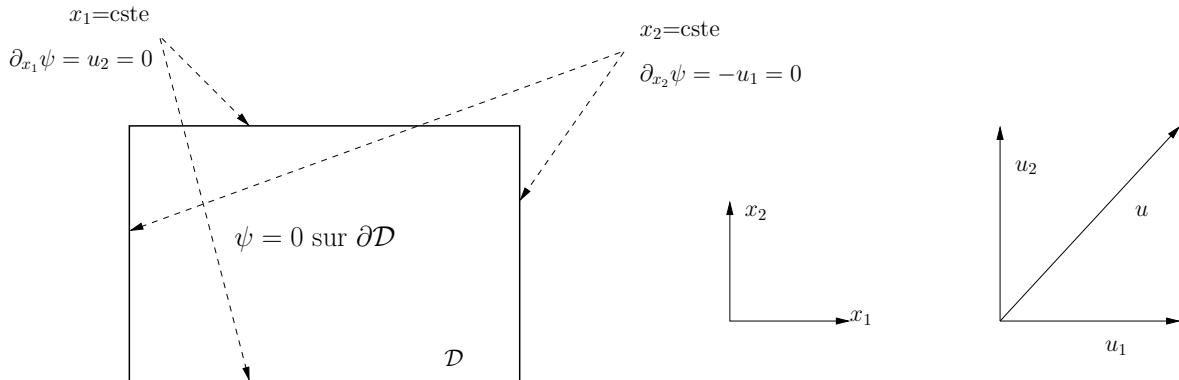


FIG. 6.1 – Condition $\psi = 0$ sur les bords d'un domaine rectangulaire exprimée en termes de vitesses.

Sur chaque bord, nous obtenons que la vitesse normale est nulle (voir Figure 6.1) : cela exprime l'imperméabilité des bords. La seconde condition nous donne des informations sur

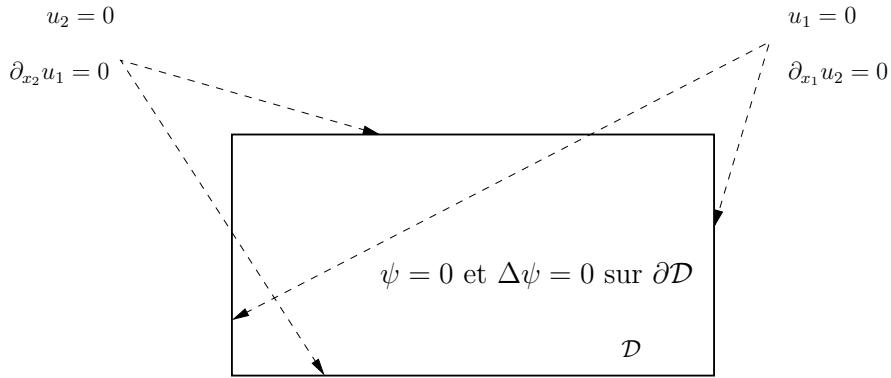


FIG. 6.2 – Conditions $\psi = 0$ et $\Delta\psi = 0$ sur les bords d'un domaine rectangulaire exprimées en termes de vitesses.

les dérivées de la vitesse (voir Figure 6.2). Comme nous avons la condition d'imperméabilité, le laplacien sur ψ se transforme en une seule condition sur l'une des deux composantes de la vitesse. Nous retrouvons alors l'expression du glissement.

Notre but est maintenant de représenter la solution de l'équation (6.5) pour voir l'effet des nouveaux termes en *cosinus* (liés au coefficient δ ainsi qu'à la dérivée de la topographie).

6.2 Commentaires et propriétés mathématiques.

Avant de passer à la partie numérique, nous pouvons donner des propriétés de l'équation (6.5). Nous faisons tout d'abord quelques remarques sur la forme de cette équation, puis nous nous intéressons à la démonstration d'un résultat d'existence globale et d'unicité de solutions fortes.

6.2.1 Un premier commentaire.

En étudiant l'équation (6.5), nous voyons que nous serons amenés à résoudre un opérateur qui n'est pas exactement celui de l'équation de Helmholtz. Cependant, on se rend compte que trouver ψ telle que

$$\psi(x_1, x_2) = \left(\Delta + \delta^2 \partial_{x_2}^2 - \frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{g H_{car}} \text{Id} \right)^{-1} \phi(x_1, x_2)$$

est équivalent, en utilisant un changement d'échelle, à résoudre

$$\Psi(x_1, x_2) = \left(\Delta - \frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{g H_{car}} \text{Id} \right)^{-1} \phi(x_1, \sqrt{1 + \delta^2} x_2) \text{ avec } \psi(x_1, x_2) = \Psi \left(x_1, \frac{x_2}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right).$$

Notre opérateur n'est donc pas fondamentalement différent de celui obtenu pour δ nul. Cependant, en regardant le second opérateur (celui sur le fond b), on remarque que ce changement d'échelle ne permet pas de se ramener au cas sans effet cosinus.

Nous verrons à la Section 6.3 que nous pouvons adapter une méthode de résolution du laplacien à notre problème anisotrope.

6.2.2 Un second commentaire.

Notons dès à présent que l'effet cosinus a deux contributions dans l'équation Quasi-Geostrophique : le premier effet, que nous pouvons appeler l'effet δ , est le terme qui introduit une dissymétrie dans le laplacien. Le second effet est lié à la dérivée de la topographie dans la direction nord-sud. Ainsi, en fonction du choix du domaine, nous pourrons observer l'effet δ uniquement, ou bien l'effet cosinus complet.

6.2.3 Propriétés mathématiques.

Dans cette partie, nous allons démontrer un résultat d'existence de solutions de l'équation (6.5) dans un domaine rectangulaire \mathcal{D} . Pour cela, nous commençons par donner des estimations *a priori*. Celles-ci nous permettent ensuite de passer à la limite dans tous les termes.

Pour obtenir les différentes estimations *a priori* dont nous avons besoin, nous devons réaliser successivement deux séries de calculs : nous multiplions l'équation (6.5) respectivement par ψ et par $\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi$ et nous l'intégrons sur \mathcal{D} . Dans les intégrations par parties, les termes intégrés s'annulent grâce aux conditions aux bords $\psi = 0$ et $\Delta\psi = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$. Commençons par simplifier les notations en écrivant l'équation (6.5) sous la forme :

$$(\partial_t + u^0 \cdot \nabla) ((\partial_{x_1}^2 + (1 + \delta^2) \partial_{x_2}^2) \psi - C_H \psi + B + \beta x_2) = -\alpha \Delta\psi + \mu \Delta^2\psi + \operatorname{curl} f,$$

ou encore en utilisant la définition du jacobien $J(f, g) = \partial_{x_1} f \partial_{x_2} g - \partial_{x_2} f \partial_{x_1} g$:

$$\begin{aligned} \partial_t ((\Delta + \delta^2 \partial_{x_2}^2) \psi - C_H \psi) + J(\psi, (\Delta + \delta^2 \partial_{x_2}^2) \psi - C_H \psi + B + \beta x_2) \\ = -\alpha \Delta\psi + \mu \Delta^2\psi + \operatorname{curl} f, \end{aligned} \quad (6.6)$$

où B est une fonction de (x_1, x_2) qui représente le terme de topographie.

La multiplication de l'équation (6.6) par ψ donne :

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_t ((\Delta\psi + \delta^2 \partial_{x_2}^2\psi - C_H\psi) \cdot \psi) = \alpha \int_{\mathcal{D}} (\nabla\psi)^2 + \mu \int_{\mathcal{D}} (\Delta\psi)^2 + \int_{\mathcal{D}} \operatorname{curl} f \cdot \psi,$$

grâce aux conditions aux bords et aux propriétés du jacobien. En effectuant des intégrations par parties sur les termes de gauche, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \delta^2 \|\partial_{x_2}\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + C_H \|\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) + 2\alpha \int_{\mathcal{D}} (\nabla\psi)^2 \\ + 2\mu \int_{\mathcal{D}} (\Delta\psi)^2 \leq 2 \left| \int_{\mathcal{D}} \operatorname{curl} f \cdot \psi \right| \leq \frac{C^2}{2\alpha} \|\operatorname{curl} f\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \alpha \|\nabla\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \delta^2 \|\partial_{x_2}\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + C_H \|\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) + \alpha \|\nabla\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \\ + 2\mu \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \leq \frac{C^2}{\alpha} \|\operatorname{curl} f\|_{L^2(\mathcal{D})}^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors les premières estimations *a priori* :

$$\begin{aligned}\nabla\psi &\in L^\infty(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2), \quad \psi \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})), \\ \Delta\psi &\in L^2(0, T; L^2(\mathcal{D})).\end{aligned}\quad (6.7)$$

De la même façon, multiplions l'équation (6.6) par $\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2$; nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \partial_t (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi - C_H\psi) (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi) + \int_{\mathcal{D}} J(\psi, \beta x_2 + B) (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi) = \\ -\alpha \int_{\mathcal{D}} \Delta\psi (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi) + \mu \int_{\mathcal{D}} \Delta^2\psi (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi) + \int_{\mathcal{D}} \text{curl}f (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi).\end{aligned}\quad (6.8)$$

Nous pouvons simplifier les différents termes qui interviennent dans cette expression, ainsi :

$$\int_{\mathcal{D}} (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi)^2 = \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\delta^2\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + 2\delta^2 \int_{\mathcal{D}} \Delta\psi \partial_{x_2}^2\psi \quad (6.9)$$

$$= \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\delta^2\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + 2\delta^2 \|\nabla \partial_{x_2}\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2, \quad (6.10)$$

puisque les conditions aux bords annulent les termes intégrés. Nous avons également :

$$2 \int_{\mathcal{D}} \Delta\psi \partial_{x_2}^2\psi \leq 2\|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}, \quad (6.11)$$

$$\|\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \leq \|\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_{x_1}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 = \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2, \quad (6.12)$$

ce qui implique

$$\int_{\mathcal{D}} (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi)^2 \leq (1 + 2\delta^2) \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \delta^4 \|\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \leq (1 + \delta^2)^2 \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2. \quad (6.13)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \Delta^2\psi (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi) &= - \int_{\mathcal{D}} (\nabla \Delta\psi)^2 + \delta^2 \int_{\mathcal{D}} \Delta^2\psi \partial_{x_2}^2\psi \\ &= - \int_{\mathcal{D}} (\nabla \Delta\psi)^2 - \delta^2 \int_{\mathcal{D}} (\nabla \partial_{x_2}^2\psi)^2 - \delta^2 \int_{\mathcal{D}} (\nabla \partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi)^2.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Enfin, le terme avec le jacobien s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} J(\psi, \beta x_2 + B) (\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi) \leq C(\beta + \|\nabla B\|_{L^\infty(\mathcal{D})}) \|\nabla \psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}. \quad (6.15)$$

On peut alors remplacer les inégalités (6.9) à (6.15) dans la formule (6.8) et intégrer les termes de gauche pour faire apparaître les dérivées des normes :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\|\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + C_H\delta^2 \|\partial_{x_2}\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + C_H \|\nabla \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) \\ + 2\mu \|\nabla \Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + 2\mu\delta^2 \left(\|\nabla \partial_{x_2}^2\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\nabla \partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) \leq 2g(t).\end{aligned}$$

La fonction g est définie par :

$$g(t) = C(\beta + \|\nabla B\|_{L^\infty(\mathcal{D})}) \|\nabla \psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})} + \alpha \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\text{curl}f\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\Delta\psi\|_{L^2(\mathcal{D})},$$

donc g est dans $L^1(0, T)$ d'après les premiers résultats donnés par (6.7), ce qui nous permet d'écrire les nouvelles estimations *a priori* :

$$\begin{aligned}\Delta\psi &\in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})), & \partial_{x_2}^2\psi &\in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})), \\ \nabla\Delta\psi &\in L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2), & \nabla\partial_{x_2}^2\psi &\in L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2), \\ \nabla\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi &\in L^2(0, T; (L^2(\mathcal{D}))^2).\end{aligned}$$

La démonstration de l'existence de solutions pour l'équation (6.6) utilise la méthode de Galerkin. Nous obtenons alors classiquement (voir par exemple [11] et [22]) l'existence de solutions ψ_m du problème approché correspondant à (6.6). Restent les passages à la limite sur la dimension du sous-espace de $L^2(\mathcal{D})$ considéré.

Les estimations *a priori* obtenues ci-dessus restent valables pour ψ_m . D'après ces résultats, nous avons également :

$$\begin{aligned}(\Delta\psi_m)_m &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D})) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D})), \\ (\psi_m)_m &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^3(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})) \cap \mathcal{C}([0, T]; H^2(\mathcal{D})),\end{aligned}$$

mais aussi :

$$\begin{aligned}(\partial_t(\Delta\psi_m + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi_m - C_H\psi_m))_m &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D})), \\ (\partial_t\psi_m)_m &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D})), \\ \text{et donc } (\partial_t(\Delta\psi_m + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi_m))_m &\text{ est bornée dans } L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

On peut alors extraire des sous-suites qui convergent :

$$\begin{aligned}\psi_m &\rightharpoonup \psi \text{ dans } L^2(0, T; H^3(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})), \\ \partial_t\psi_m &\rightharpoonup \partial_t\psi \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\mathcal{D})), \\ \text{donc } \psi_m &\rightharpoonup \psi \text{ dans } \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^3(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\Delta\psi_m &\rightharpoonup \Delta\psi \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D})), \\ \partial_t(\Delta\psi_m + \delta^2\partial_{x_2}\psi_m) &\rightharpoonup \partial_t(\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}\psi) \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D})), \\ \text{et donc } \Delta\psi_m &\rightharpoonup \Delta\psi \text{ dans } \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

On montre aussi que $\int_{\mathcal{D}} J(\psi_m, \Delta\psi_m + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi_m)u \rightarrow \int_{\mathcal{D}} J(\psi, \Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi)u$, pour tout u dans $L^2(0, T; W^{1,4}(\mathcal{D}))$.

Donc on peut passer à la limite :

$$\begin{aligned}\partial_t(\Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi - C_H\psi) &= -J(\psi, \Delta\psi + \delta^2\partial_{x_2}^2\psi + B + \beta x_2) - \alpha\Delta\psi + \mu\Delta^2\psi + \text{curl}f, \\ \text{dans le dual de } L^2(0, T; W^{1,4}(\mathcal{D})) \text{, avec } \psi &\text{ dans } \mathcal{C}([0, T]; H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

La théorie des opérateurs maximaux monotones nous permet d'améliorer ce résultat et d'obtenir :

$$\begin{aligned}\Delta\psi &\in \mathcal{C}([0, T]; H^1(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})), \\ \text{et } \psi &\in \mathcal{C}([0, T]; H^3(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^4(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})).\end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat :

Proposition 6.1. *Si \mathcal{D} est un rectangle, pour tout f de $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$, l'équation (6.5) avec une condition initiale ψ_0 dans $H^3(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$ et les conditions aux bords $\psi = 0$ et $\Delta\psi = 0$ sur $\partial\mathcal{D}$ admet une solution ψ dans $C([0, T]; H^3(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^4(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}))$. On peut également montrer que cette solution est unique.*

6.3 Etude numérique de l'effet cosinus.

Nous nous intéressons maintenant à la résolution numérique de l'équation Quasi-Géostrophique, pour connaître l'importance de l'effet cosinus. Nous disposons déjà d'un programme *Fortran 77* en différences finies sans effet cosinus et sans terme de surface libre (voir [44]). Nous l'avons donc modifié pour tracer la solution de l'équation (6.5). Les résultats ont été obtenus en utilisant le compilateur *g95* sur un MacBook 2GHz Intel.

Comme nous l'avons noté précédemment, l'effet cosinus se décompose en deux parties : l'une liée au laplacien qui est modifié dans la direction nord-sud, l'autre liée à la topographie. Les difficultés de programmation résident dans la première partie. Pour cela, nous utilisons une méthodologie qui a été présentée dans [71] et [67].

6.3.1 Méthodologie.

L'équation (6.5) peut-être réécrite sous une forme “plus physique” :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} + J \left(\psi, \phi + \left(\text{Id} - \frac{H_{car}}{2\tan\theta_0} \partial_{x_2} \right) \frac{2\Omega \sin\theta_0}{H_{car}} b + \beta x_2 \right) \\ = -\frac{1}{\varepsilon L_{car}} \alpha_0(H_{car}) \Delta\psi + \frac{\varepsilon}{Re} \Delta^2\psi + \text{curl}f, \end{aligned}$$

où J est le jacobien et ϕ la vorticité potentielle définie par :

$$\phi = \left(\Delta + \delta^2 \partial_{x_2}^2 - \frac{(2\Omega \sin\theta_0)^2}{g H_{car}} \text{Id} \right) \psi. \quad (6.16)$$

Le schéma numérique utilisé pour résoudre l'équation Quasi-Géostrophique est le suivant : on suppose que l'on connaît toutes les quantités au temps t_n (ϕ^n, ψ^n) ainsi que tous les coefficients. On peut alors calculer le terme fl^n qui représente la dérivée en temps de ϕ à l'instant t_n et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} fl^n = J \left(\phi^n + \left(\text{Id} - \frac{H_{car}}{2\tan\theta_0} \partial_{x_2} \right) \frac{2\Omega \sin\theta_0}{H_{car}} b + \beta x_2, \psi^n \right) \\ - \frac{1}{\varepsilon L_{car}} \alpha_0(H_{car}) \Delta\psi^n + \mu \Delta^2\psi^n + \text{curl}f^n. \end{aligned}$$

Pour exprimer la dérivée de ϕ , on choisit un schéma saute-mouton (Leap-Frog) avec, tous les 100 pas de temps, un pas d'Euler pour faire disparaître les instabilités. On obtient donc ϕ au temps t_{n+1} ainsi que ψ grâce à l'équation (6.16). On a alors, à partir d'une condition initiale, les valeurs de la fonction courant à tout temps.

Nous voyons que nous sommes amenés à résoudre

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2) &= \left(\Delta + \delta^2 \partial_{x_2}^2 - \frac{(2\Omega \sin\theta_0)^2}{g H_{car}} \text{Id} \right)^{-1} \phi(x_1, x_2) \quad \text{pour } (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \\ \psi(x_1, x_2) &= 0 \quad \text{et} \quad \Delta\psi = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{D}. \end{aligned}$$

On cherche donc une suite $\{\psi_{j,l}^n\}$ pour $1 \leq j \leq N_1 - 1$ et $1 \leq l \leq N_2 - 1$ qui vérifie

$$\frac{1}{h_1^2}(\psi_{j+1,l}^n + \psi_{j-1,l}^n) + \frac{1 + \delta^2}{h_2^2}(\psi_{j,l+1}^n + \psi_{j,l-1}^n) - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2 + 2\delta^2}{h_2^2} \right) \psi_{j,l}^n = \phi_{j,l}^n,$$

$$\psi_{0,l}^n = \psi_{N_1,l}^n = \psi_{j,0}^n = \psi_{j,N_2}^n = 0,$$

où h_1 et h_2 sont les pas d'espaces en x_1 et x_2 respectivement.

On se place à n fixé et on omettra cet indice pour alléger les notations. La suite de cette partie consiste à symétriser et périodiser nos fonctions pour utiliser une résolution rapide de l'équation de Helmholtz par transformée de Fourier.

On définit, pour $0 \leq l \leq N_2$, les fonctions :

$$f_l = \{f_{j,l}\}_{0 \leq j \leq 2N_1-1} \equiv [0, \phi_{1,l}, \phi_{2,l}, \dots, \phi_{N_1-1,l}, 0, -\phi_{N_1-1,l}, -\phi_{N_1-2,l}, \dots, -\phi_{1,l}]^T,$$

$$u_l = \{u_{j,l}\}_{0 \leq j \leq 2N_1-1} \equiv [0, \psi_{1,l}, \psi_{2,l}, \dots, \psi_{N_1-1,l}, 0, -\psi_{N_1-1,l}, -\psi_{N_1-2,l}, \dots, -\psi_{1,l}]^T,$$

symétrisées en x_1 de ϕ et de ψ . Cette écriture nous permet d'affirmer que la solution du problème périodique sur une grille de $2N_1$ points en la variable x_1 avec pour membre de droite f_l est u_l . La démonstration de ce résultat ne pose pas de problème sur les points intérieurs de la grille. Il reste à regarder les conditions aux bords du domaine de départ, c'est-à-dire pour $j = 0$ et $j = N_1$. On trouve alors, grâce à la périodicité de u , pour $1 \leq l \leq N_2 - 1$:

$$\frac{1}{h_1^2}(u_{1,l} + u_{-1,l}) + \frac{1 + \delta^2}{h_2^2}(u_{0,l+1} + u_{0,l-1}) - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2 + 2\delta^2}{h_2^2} \right) u_{0,l} = 0 = f_{0,l},$$

$$\frac{1}{h_1^2}(u_{N_1+1,l} + u_{N_1-1,l}) + \frac{1 + \delta^2}{h_2^2}(u_{N_1,l+1} + u_{N_1,l-1}) - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2 + 2\delta^2}{h_2^2} \right) u_{N_1,l} = 0 = f_{N_1,l},$$

ce qui justifie l'affirmation.

De plus, ces variables satisfont $\sum_{j=0}^{2N_1-1} u_{j,l} = 0$ et $\sum_{j=0}^{2N_1-1} f_{j,l} = 0$ pour tout l entre 0 et N_2 .

On est donc ramené à résoudre pour tous j, l tels que $0 \leq j \leq 2N_1 - 1$ et $1 \leq l \leq N_2 - 1$, l'indice j étant plus précisément j modulo $2N_1$, le système :

$$u_{j,0} = u_{j,N_2} = 0,$$

$$\frac{1}{h_1^2}(u_{j+1,l} + u_{j-1,l}) + \frac{1 + \delta^2}{h_2^2}(u_{j,l+1} + u_{j,l-1}) - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2 + 2\delta^2}{h_2^2} \right) u_{j,l} = f_{j,l}.$$

Pour cela, on définit les transformées de Fourier discrètes de nos variables :

$$U_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{2N_1}} \sum_{j=0}^{2N_1-1} u_{j,l} \exp \left(\frac{-2i\pi kj}{2N_1} \right),$$

$$F_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{2N_1}} \sum_{j=0}^{2N_1-1} f_{j,l} \exp \left(\frac{-2i\pi kj}{2N_1} \right), \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 2N_1 - 1 \text{ et } 1 \leq l \leq N_2 - 1,$$

et par transformée de Fourier inverse on obtient :

$$u_{j,l} = \frac{1}{\sqrt{2N_1}} \sum_{k=0}^{2N_1-1} U_{k,l} \exp \left(\frac{2i\pi kj}{2N_1} \right),$$

$$f_{j,l} = \frac{1}{\sqrt{2N_1}} \sum_{k=0}^{2N_1-1} F_{k,l} \exp \left(\frac{2i\pi kj}{2N_1} \right), \quad \text{pour } 0 \leq j \leq 2N_1 - 1 \text{ et } 1 \leq l \leq N_2 - 1.$$

On reporte ces dernières expressions dans le système que l'on cherche à résoudre. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} \sum_{k=0}^{2N_1-1} (\mathbf{U}_{k,l} E_{(j+1),k} + \mathbf{U}_{k,l} E_{(j-1),k}) + \frac{1+\delta^2}{h_2^2} \sum_{k=0}^{2N_1-1} (\mathbf{U}_{k,l+1} + \mathbf{U}_{k,l-1}) E_{j,k} \\ - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2+2\delta^2}{h_2^2} \right) \sum_{k=0}^{2N_1-1} \mathbf{U}_{k,l} E_{j,k} = \sum_{k=0}^{2N_1-1} \mathbf{F}_{k,l} E_{j,k}, \end{aligned}$$

où $E_{j,k} = \exp\left(\frac{2i\pi j k}{2N_1}\right)$.

Cette égalité se simplifie en k équations données par : pour tout k tel que $0 \leq k \leq 2N_1 - 1$,

$$\frac{1}{h_1^2} 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{2N_1}\right) \mathbf{U}_{k,l} + \frac{1+\delta^2}{h_2^2} (\mathbf{U}_{k,l+1} + \mathbf{U}_{k,l-1}) - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2+2\delta^2}{h_2^2} \right) \mathbf{U}_{k,l} = \mathbf{F}_{k,l}.$$

Pour tout k , on est donc ramené à résoudre un système tridiagonal.

L'algorithme à programmer est le suivant :

Algorithme 1 Résolution de l'opérateur anisotrope

calculer \mathbf{F} à partir de ϕ (symétrie et transformée de Fourier)

pour k compris entre 0 et $2N_1 - 1$ **faire**

pour l compris entre 0 et N_2 **faire**

si $l = 0$ ou $l = N_2$ **alors**

$\mathbf{U}_{k,l} = 0$

sinon si $k = 0$ **alors**

$\mathbf{U}_{0,l} = 0$

sinon

 résoudre $M_k \mathbf{U}_{k,l} = \mathbf{F}_{k,l}$

fin si

fin pour

fin pour

calculer u (transformée de Fourier inverse de \mathbf{U}) et renvoyer ψ

L'Algorithme 1 nous permet donc d'obtenir ψ à partir de ϕ .

Quelques précisions doivent cependant être ajoutées à cet algorithme. Tout d'abord, la relation $\mathbf{U}_{0,l} = 0$ provient de l'égalité $\sum_{j=0}^{2N_1-1} u_{j,l} = 0$ et reste cohérente avec les équations puisque $\mathbf{F}_{0,l} = \sum_{j=0}^{2N_1-1} f_{j,l} = 0$.

Nous pouvons également expliciter la matrice M_k : pour k fixé,

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\ & \frac{1+\delta^2}{h_2^2} & \frac{2}{h_1^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{2N_1}\right) - \left(\frac{(2\Omega \sin \theta_0)^2}{gH_{car}} + \frac{2}{h_1^2} + \frac{2+2\delta^2}{h_2^2} \right) & \frac{1+\delta^2}{h_2^2} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons désormais un algorithme qui prend en compte la "partie δ " de l'effet cosinus.

6.3.2 Résultats obtenus.

Nous avons donc modifié, comme expliqué au Paragraphe 6.3.1, un code pour les équations Quasi-Géostrophiques en différences finies. Nous y avons également rajouté le deuxième effet cosinus, lié à la dérivée de la topographie.

Nous nous plaçons dans un domaine de type océan Atlantique nord, dont les dimensions sont $L_{car} = 4000 \text{ km} \times 4000 \text{ km}$ sur 5000 m de hauteur, avec un vent en $-10^{-2} \sin(2\pi x_2/L_{car})$. La viscosité est choisie de façon à être dans les conditions décrites au Chapitre 1 et les autres paramètres sont conformes aux données physiques (voir par exemple [35]). Nous observons donc une dynamique de type Gulf Stream.

Cas d'un fond plat.

Nous considérons tout d'abord le cas d'un fond plat, pour n'avoir que l'effet cosinus lié au laplacien (effet δ).

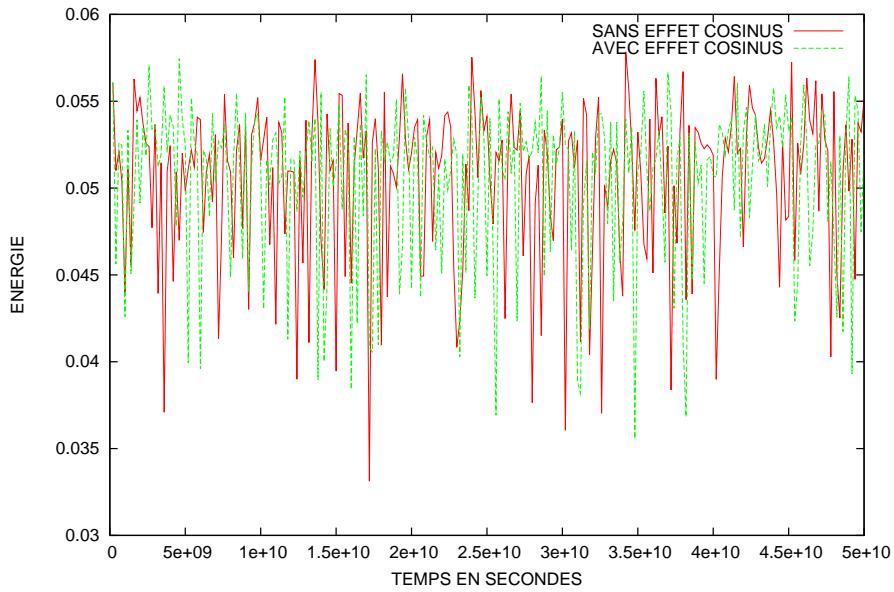


FIG. 6.3 – Courbes d'énergie des systèmes sans et avec effet cosinus, en fonction du temps.

Nous représentons tout d'abord l'énergie du système au cours du temps (Figure 6.3). La non-périodicité du graphe nous indique que nous sommes dans un régime chaotique ; les grandeurs significatives ne sont donc pas les valeurs de la fonction courant mais sa moyenne en temps. Ainsi, dans toute la suite nous ne représenterons que les moyennes en temps de la fonction ψ et de la vitesse.

Dans un premier temps, analysons les résultats moyennés sur les 5 premières années. Nous avons représenté, Figures 6.4 et 6.5, la fonction courant ainsi que le champ de vitesse correspondant sans effet cosinus.

Dans la partie nord, le courant tourne dans le sens trigonométrique alors que dans la partie sud, il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

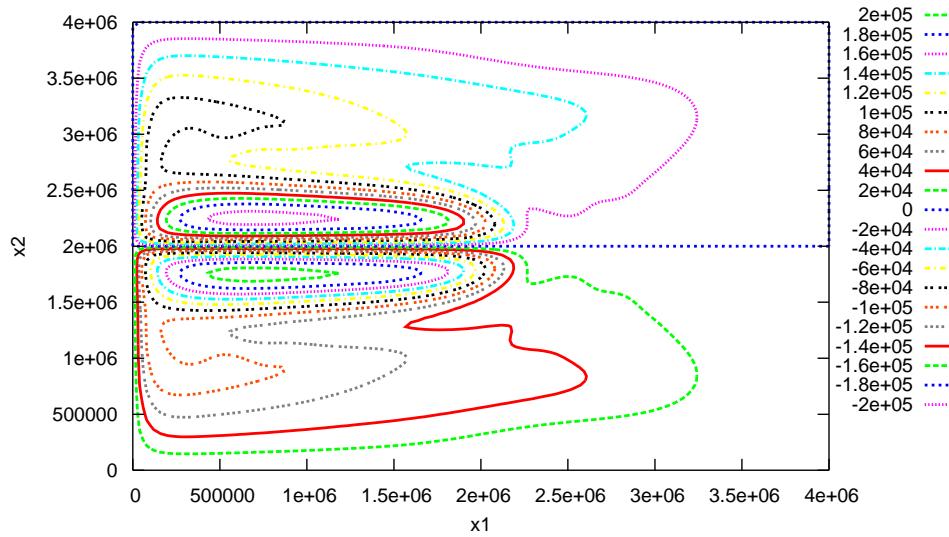


FIG. 6.4 – Lignes de niveau de la fonction courant moyennée sur les 5 premières années.

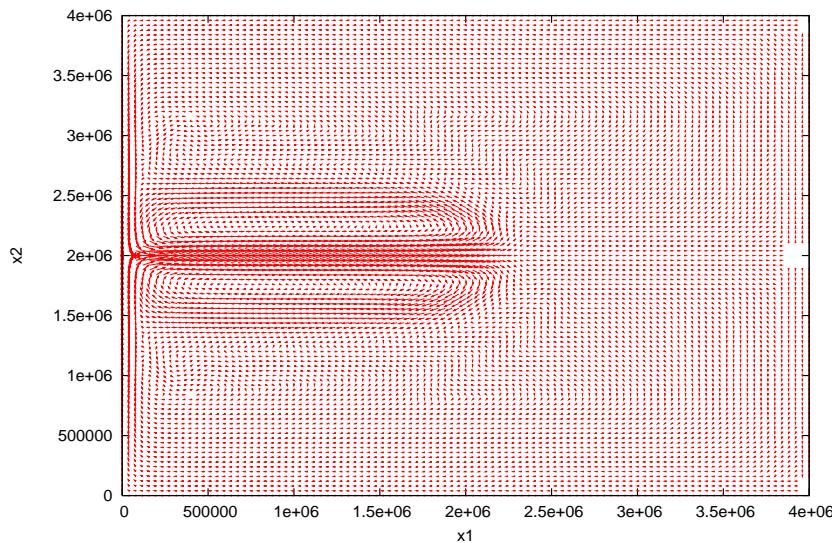


FIG. 6.5 – Champ des vitesses horizontales moyennées sur les 5 premières années.

Nous avons ensuite tracé la différence entre les résultats avec effet cosinus et sans effet cosinus Figure 6.6. Nous voyons que l'effet cosinus est de l'ordre de 1 alors que la fonction courant atteint des valeurs de 2×10^5 : l'effet cosinus n'est pas significatif ici.

En revanche, nous pouvons considérer les figures correspondantes moyennées sur 1600 ans (Figures 6.7 et 6.8).

A ce moment là, l'erreur de convergence (obtenue en comparant les moyennes pour différentes plages de temps) est inférieure à 1%.

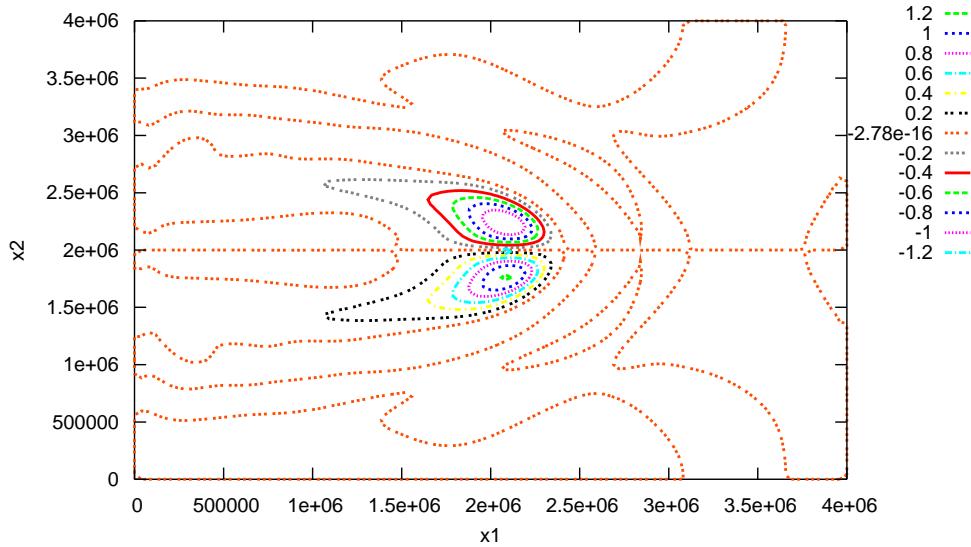


FIG. 6.6 – Effet cosinus (différence entre les deux modèles) moyenné sur les 5 premières années.

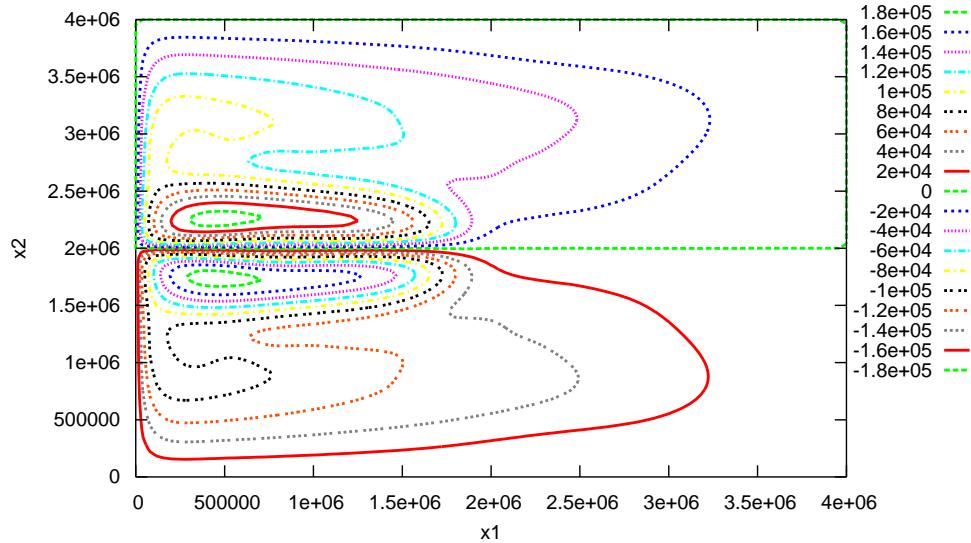


FIG. 6.7 – Lignes de niveau de la fonction courant moyennée sur 1600 ans.

Nous notons sur ces figures une différence localisée au niveau du jet d'environ 10% sur la fonction courant, ce qui n'est plus négligeable.

Nous pouvons également tracer le spectre de l'énergie de chaque système que nous avons enregistrée toutes les 14 heures pendant 16 ans et 48 ans (pour vérifier la cohérence des résultats) à partir de la solution à 1600 ans.

En faisant un zoom (Figure 6.9), nous nous apercevons que l'effet cosinus modifie le spectre pour des fréquences autour de 7.1×10^{-7} Hz, ce qui correspond à une période de l'ordre de 16 jours.

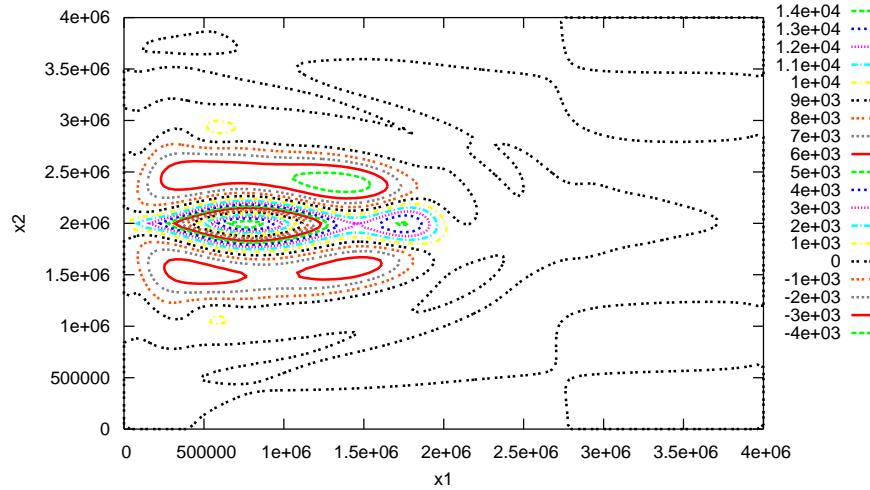


FIG. 6.8 – Effet cosinus (différence entre les deux modèles) moyenné sur 1600 ans.

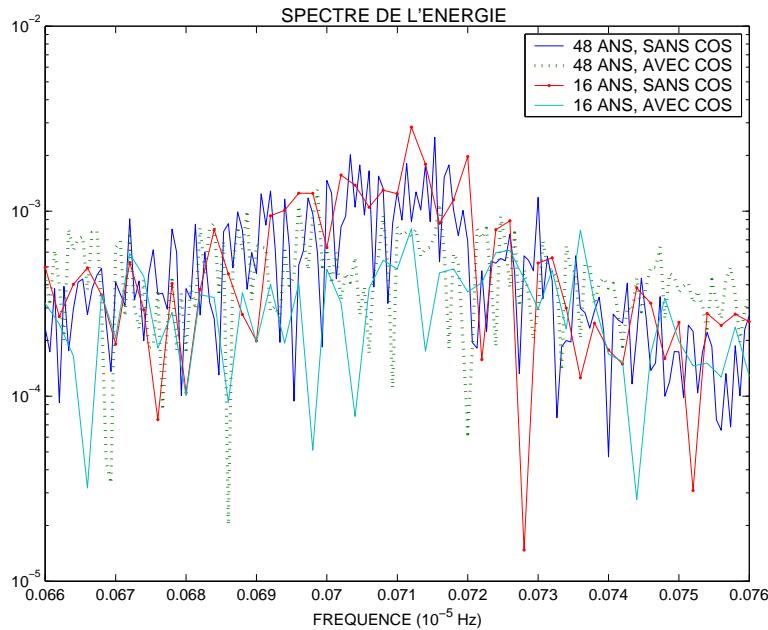


FIG. 6.9 – Spectre de l'énergie échantillonnée toutes les 14 heures pendant 16 ou 48 ans à partir de 1600 ans.

Nous pouvons donc déduire de ces deux séries de résultats que l'effet cosinus peut être négligé en météorologie, mais doit apparaître lorsque l'on se place sur des échelles climatologiques.

Etudions maintenant les résultats obtenus pour un fond variable, et donc avec le second effet cosinus lié à la topographie.

Fond variable.

Nous considérons le cas d'une dorsale océanique, représentée sur la Figure 6.10.

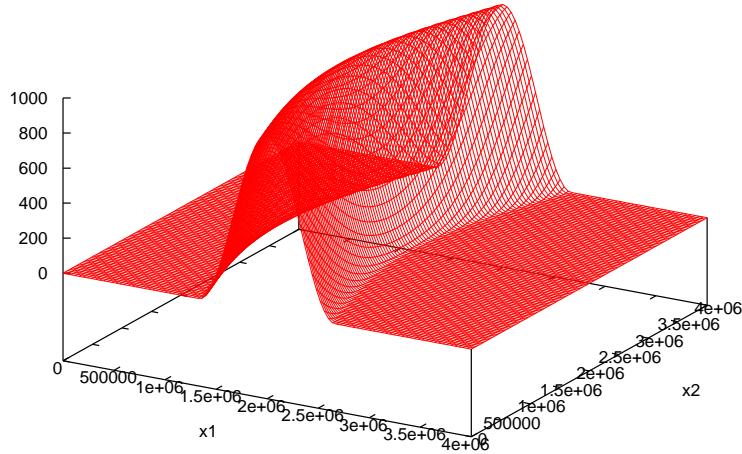


FIG. 6.10 – Bathymétrie de type dorsale.

Tout comme précédemment, les courbes d'énergie (Figure 6.11) nous indiquent que nous sommes en régime chaotique ; nous nous intéressons donc aux moyennes en temps des fonctions.

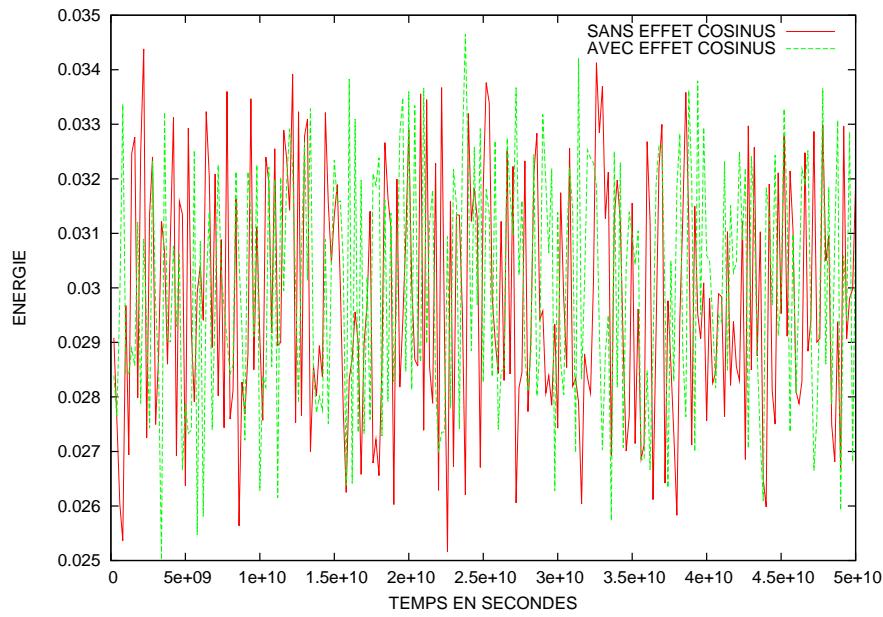


FIG. 6.11 – Courbes d'énergie des systèmes sans et avec effet cosinus, en fonction du temps.

Nous ne donnons les résultats qu'en temps long puisqu'en temps court l'erreur de convergence est supérieure à la différence entre les résultats sans et avec effet cosinus. Les résultats obtenus après 1600 ans sont présentés Figures 6.12 et 6.13.

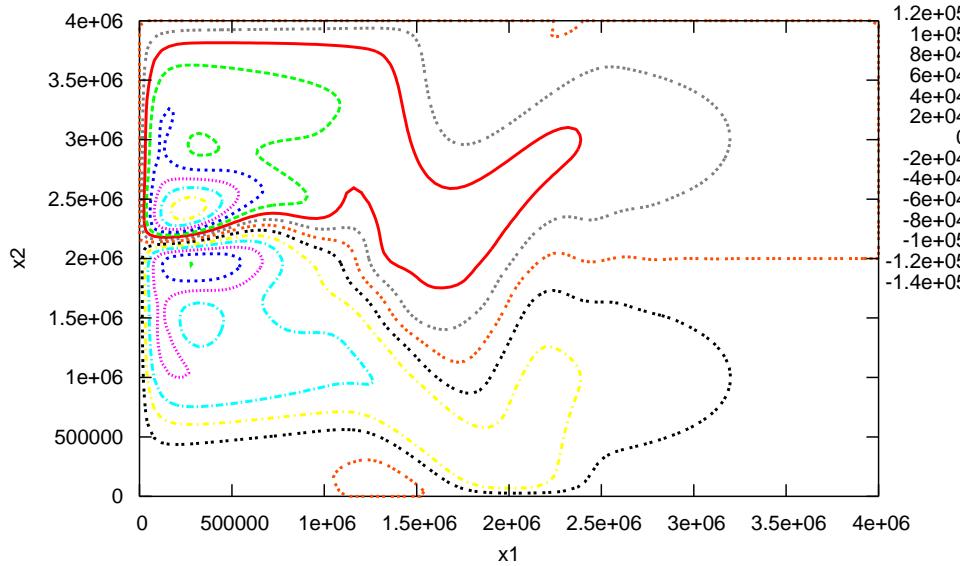


FIG. 6.12 – Lignes de niveau de la fonction courant moyennée sur 1600 ans sans effet cosinus.

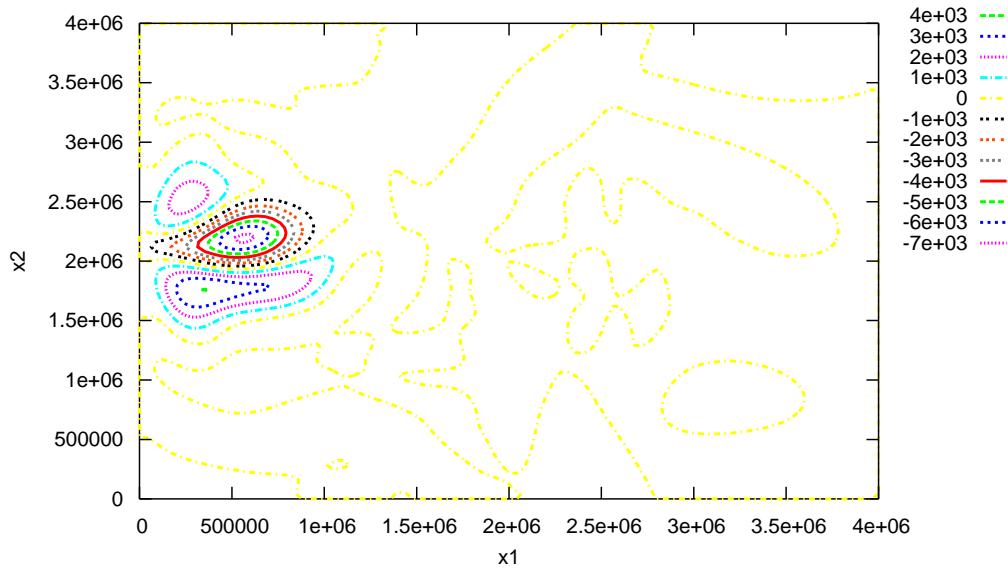


FIG. 6.13 – Effet cosinus (différence entre les deux modèles) moyenné sur 1600 ans.

La symétrie du système avec fond plat a disparu, et la forme de la topographie empêche l'effet cosinus de se développer vers l'est. Notons qu'avec cette bathymétrie, l'effet cosinus accentue les courants.

Nous pouvons donc affirmer que dans le cas du fond présenté Figure 6.10 l'effet cosinus que nous avions avec un fond plat est très nettement atténué et n'est plus significatif.

En conclusion, nous ne pouvons donc pas prétendre que l'effet cosinus aura toujours un rôle important mais nous avons montré que dans certaines situations il change fortement les résultats en temps long, même si les nouveaux termes pouvaient sembler négligeables au premier abord.

Conclusion.

Nous avons présenté ici l'obtention des équations de Saint-Venant Quasi-Géostrophiques, limite du système de Saint-Venant pour des nombres de Rossby et Froude petits. La prise en considération de la force de Coriolis complète fait apparaître deux contributions : un effet δ , dissymétrie dans le laplacien, et un effet lié à la topographie. Malgré ces deux termes, nous avons montré, comme dans le cas classique, l'existence de solutions dans un rectangle.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude numérique de ces solutions, non pas dans l'espoir d'en faire une analyse complète en fonction de la topographie choisie, mais pour voir si nos termes avaient une influence réelle. Dans le cas d'un fond plat, nous avons constaté une modification des résultats en temps long. Nous avons alors choisi un fond variable et, pour ce choix, le terme de topographie semble compenser l'effet δ ; ce ne sera cependant pas le cas pour toutes les topographies. Il est donc nécessaire de prendre en compte l'effet cosinus, même si parfois cette double contribution peut finir par s'équilibrer.

Chapitre 7

Une méthode d'approximation multi-échelles.

Ce chapitre est une introduction, sur une équation simple, des méthodes qui sont utilisées dans le Chapitre 8. Plus précisément, nous étudions ici une équation, adaptée des équations Quasi-Géostrophiques, en une dimension d'espace et linéaire. Après avoir donné quelques propriétés théoriques, nous présentons une méthode d'approximation classique qui repose sur des développements en série en considérant deux échelles d'espace distinctes. Nous séparons également nos expressions en des équations qui s'écrivent sur l'intérieur du domaine et d'autres qui régissent la couche limite sur le bord ouest.

Nous effectuons ensuite des tests numériques pour vérifier la validité de ces développements. Nous utilisons pour cela une solution explicite de notre problème et nous regardons l'erreur de la solution obtenue par notre programme. Nous commençons par l'équation stationnaire, puis nous adaptons notre approche au problème avec évolution en temps. Nous montrons alors qu'il est possible, pour améliorer l'efficacité de notre programme, de tronquer le terme de couche limite.

Le but de ce chapitre est d'étudier l'équation linéaire simple suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x) - \partial_x^2 \psi(t, x) - \beta \partial_x \psi(t, x) &= \frac{1}{\epsilon} f(t, x) && \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) &= 0 && \forall t \in [0, T], \\ \psi(0, x) &= 0 && \forall x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

pour $\mathcal{D} =]0, 1[, T \in \mathbb{R}_+^*, f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$ et $\beta = \epsilon^{-1}$, où nous supposons que ϵ est un petit paramètre. Nous pouvons mentionner ici les articles [24, 25] qui traitent également de ce type d'équations.

Nous avons donc une évolution en temps mais sur une équation en une seule dimension d'espace et linéaire. Notons que cette équation change de type lorsque le paramètre ϵ tend vers 0 : l'équation parabolique, qui nécessite deux conditions aux bords, devient une équation de type transport stationnaire, pour laquelle la condition sur le bord rentrant suffit. Nous sommes alors en présence d'une couche limite sur le bord sortant.

Sur cette équation, nous mettons en place les théories sur les développements en séries et nous débuttons également la mise en œuvre numérique.

7.1 Résultats théoriques.

Dans cette partie, nous donnons quelques résultats théoriques : nous commençons par des estimations *a priori*, puis nous étudions l'équation stationnaire et enfin l'équation d'évolution (7.1).

7.1.1 Estimations *a priori*.

On multiplie l'équation de départ (7.1) par ψ et on l'intègre sur \mathcal{D} . Grâce aux conditions aux bords, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\psi|^2 dx + \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \psi)^2 dx - \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \psi) \psi dx = \frac{1}{\epsilon} \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})},$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} |\psi|^2 dx + \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \psi)^2 dx = \frac{1}{\epsilon} \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}.$$

On intègre en temps et on trouve :

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{D}} |\psi|^2 dx \right) (t) + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \psi)^2 dx = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}.$$

Or on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})} \right| &\leq \|f\|_{H^{-1}(\mathcal{D})} \|\psi\|_{H_0^1(\mathcal{D})} \leq C \|f\|_{H^{-1}(\mathcal{D})} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{C^2}{\epsilon} \|f\|_{H^{-1}(\mathcal{D})}^2 + \epsilon \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right), \end{aligned}$$

donc on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\left(\int_{\mathcal{D}} |\psi|^2 dx \right) (t) + \int_0^t \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \leq \frac{C^2}{\epsilon^2} \int_0^t \|f\|_{H^{-1}(\mathcal{D})}^2 = \frac{C^2}{\epsilon^2} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))}^2.$$

À ϵ fixé, comme $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$, on a, en particulier, ψ dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ et dans $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$.

On va donc chercher une solution dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$.

7.1.2 Existence et unicité de la solution à ϵ fixé.

On étudie l'existence de cette solution, en fixant ϵ . On s'intéresse tout d'abord au cas stationnaire en considérant donc l'équation :

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 \psi(x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi(x) &= \frac{1}{\epsilon} f(x) && \text{dans } \mathcal{D}, \\ \psi(0) &= \psi(1) = 0, \end{aligned} \tag{7.2}$$

où $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$, à ϵ fixé.

On associe au problème (7.2) la forme bilinéaire

$$a^\epsilon(u, v) = \int_{\mathcal{D}} \partial_x u \left(\partial_x v - \frac{1}{\epsilon} v \right) dx,$$

définie sur $H_0^1(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})$.

Le problème variationnel correspondant au problème (7.2) s'écrit donc :

Pour toute fonction $f \in H^{-1}(\mathcal{D})$, trouver $\psi \in H_0^1(\mathcal{D})$ telle que

$$a^\epsilon(\psi, v) = \frac{1}{\epsilon} \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})} \text{ pour tout } v \in H_0^1(\mathcal{D}).$$

Les propriétés de a^ϵ sont les suivantes :

- $|a^\epsilon(u, v)| = \left| \int_{\mathcal{D}} \partial_x u \left(\partial_x v - \frac{1}{\epsilon} v \right) dx \right| \leq \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\partial_x v\|_{L^2(\mathcal{D})} + \frac{1}{\epsilon} \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|v\|_{L^2(\mathcal{D})}$

$$\leq \frac{1}{\epsilon} \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|v\|_{H^1(\mathcal{D})} \leq \frac{1}{\epsilon} \|u\|_{H^1(\mathcal{D})} \|v\|_{H^1(\mathcal{D})} \quad \text{car } \epsilon < 1,$$

d'où a^ϵ est continue sur $H_0^1(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})$.

- Avec l'inégalité de Poincaré qui s'écrit $\forall u \in H_0^1(\mathcal{D}), \|u\|_{L^2(\mathcal{D})} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1(\mathcal{D})}$, on a

$$\forall u \in H_0^1(\mathcal{D}), a^\epsilon(u, u) = \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 = \|u\|_{H^1(\mathcal{D})}^2 - \|u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\mathcal{D})}^2,$$

d'où a^ϵ est coercive.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram (cf. [22]) : il existe un unique $\psi^\epsilon \in H_0^1(\mathcal{D})$ tel que $a^\epsilon(\psi^\epsilon, v) = \frac{1}{\epsilon} \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}$ pour tout $v \in H_0^1(\mathcal{D})$.

On en déduit alors que l'on a l'égalité :

$$-\partial_x^2 \psi^\epsilon(x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} f(x) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{D}),$$

c'est-à-dire au sens des distributions.

Maintenant que nous avons démontré le résultat pour le problème stationnaire, nous pouvons passer au cas d'évolution.

Le paramètre ϵ est toujours fixé. On prouve l'existence de la solution du problème d'évolution (7.1) en utilisant deux méthodes différentes, même si l'équation est linéaire.

Théorème de Lions pour les équations paraboliques linéaires (voir [47]).

Théorème 7.1. Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $|\cdot|$. On identifie H et son dual. Soit V un autre espace de Hilbert, de norme $\|\cdot\|$. On suppose que $V \subset H$ avec injection continue et dense, de sorte que $V \subset H \subset V'$.

Soient a une forme bilinéaire continue et coercive de $V \times V$ dans \mathbb{R} , f un élément de $L^2(0, T; V')$, $T > 0$ et $u_0 \in H$.

Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$ telle que pour tout $v \in V$

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$ et $u(0) = u_0$.

Dans notre cas, on pose : $H = L^2(\mathcal{D})$, $V = H_0^1(\mathcal{D})$ et $a = a^\epsilon$, où a^ϵ est définie par

$$a^\epsilon(u(t), v) = \int_{\mathcal{D}} \partial_x u(t) \left(\partial_x v - \frac{1}{\epsilon} v \right) dx.$$

La forme bilinéaire a vérifie les hypothèses du théorème de Lions.

Donc il existe une unique fonction $\psi^\epsilon \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$ telle que, pour tout $v \in H_0^1(\mathcal{D})$ et pour toute fonction $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\epsilon(t, x), v(x)) + a^\epsilon(\psi^\epsilon(t, x), v(x)) = \frac{1}{\epsilon} \langle f(t, x), v(x) \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$ et $\psi^\epsilon(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

Cette preuve est donc juste une application du théorème de Lions. Nous pouvons également démontrer ce résultat par la méthode de Galerkin.

Méthode de Galerkin.

Soit $(w_k)_{k=1}^\infty$ une famille de fonctions qui forme

- une base orthonormale de $L^2(\mathcal{D})$,
- une base orthogonale de $H_0^1(\mathcal{D})$.

1. Soit $m \geq 1$ un entier.

On cherche $U_m^\epsilon : [0, T] \times \mathcal{D} \rightarrow L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$, $U_m^\epsilon(t, x) = \sum_{k=1}^m u_{m,k}^\epsilon(t) w_k(x)$, tel que

$$\begin{cases} (\partial_t U_m^\epsilon, w_k) + (\partial_x U_m^\epsilon, \partial_x w_k) - \frac{1}{\epsilon} (\partial_x U_m^\epsilon, w_k) = \frac{1}{\epsilon} \langle f, w_k \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}, \\ u_{m,k}^\epsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Si on pose $a_{k,l}^\epsilon(x) = (\partial_x w_k(x), \partial_x w_l(x)) - \frac{1}{\epsilon} (\partial_x w_l(x), w_k(x))$, on se ramène à résoudre un système de m équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_{m,k}^\epsilon(t) + \sum_{l=1}^m a_{k,l}^\epsilon(x) u_{m,l}^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \langle f(t, x), w_k(x) \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}, \\ u_{m,k}^\epsilon(0) = 0, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq m.$$

On a le théorème :

Théorème 7.2 (Cauchy-Lipschitz). *Soient $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$, $g \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{R}^m)$, $w_0 \in \mathbb{R}^m$.
a) Il existe T' ($0 < T' \leq T$) et w tels que*

$$\begin{cases} w \in \mathcal{C}^1([0, T']; \mathbb{R}^m), \\ \partial_t w(t) + B(w(t)) = g(t) \quad \forall t \in [0, T'], \\ w(0) = w_0. \end{cases}$$

b) *Supposons qu'il existe un réel C tel que tout couple (T', w) ayant les propriétés données dans a) vérifie $|w(t)| \leq C$ pour tout $t \leq T'$. Alors : $T' = T$.*

On fixe m et ϵ .

Soient $(\rho_n)_{n \geq 1}$ une suite régularisante et \tilde{f} le prolongé de f par 0 en dehors de $[0, T]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n = \rho_n * \tilde{f} \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T]; H^{-1}(\mathcal{D}))$.

Comme $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$, on a : $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$. On peut supposer que, de plus, $\|f_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))} \leq \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))}$.

- On applique le point a) du Théorème 7.2 avec :

$$\begin{aligned} - B : \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,k} \\ \vdots \\ v_{n,m} \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{l=1}^m a_{k,l}^\epsilon(x) v_{n,l} \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ continue de } \mathbb{R}^m \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ - g : t &\longmapsto \begin{pmatrix} f_{n,1}(t) \\ \vdots \\ f_{n,m}(t) \end{pmatrix}, \text{ où } f_n(t, x) = \sum_{k=1}^m f_{n,k}(t) w_k(x), \text{ est continue de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, il existe $T'_n \in]0, T]$ et v_n tels que :

$$\begin{cases} v_n \in \mathcal{C}^1([0, T'_n]; \mathbb{R}^m), \\ \partial_t v_n(t) + B(v_n(t)) = g(t) \quad \forall t \in [0, T'_n], \\ v_n(0) = 0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a alors l'existence locale de v_n sur $[0, T'_n]$, donc également l'existence locale de $V_n(t, x) = \sum_{k=1}^m v_{n,k}(t) w_k(x)$ sur $[0, T'_n] \times \mathcal{D}$, qui vérifie :

$$\begin{cases} (\partial_t V_n, w_k) + (\partial_x V_n, \partial_x w_k) - \frac{1}{\epsilon} (\partial_x V_n, w_k) = \frac{1}{\epsilon} (f_n, w_k), \\ v_{n,k}(0) = 0, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq m. \quad (7.4)$$

- Pour passer à l'existence globale de $V_n(t, x)$, il faut utiliser le point b). On multiplie l'équation (7.4) par $v_{n,k}$ et on somme sur k . On obtient

$$(\partial_t V_n, V_n) + (\partial_x V_n, \partial_x V_n) - \frac{1}{\epsilon} (\partial_x V_n, V_n) = \frac{1}{\epsilon} (f_n, V_n), \quad (7.5)$$

donc en particulier :

$$\int_{\mathcal{D}} |V_n(t, x)|^2 dx \leq \frac{C^2}{\epsilon^2} \|f_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))}^2 \quad \forall t \leq T'_n.$$

On a de plus :

$$\|f_n\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))}^2 \leq \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))}^2,$$

d'où la borne uniforme sur v_n . On en déduit qu'il existe $V_n \in \mathcal{C}^1([0, T]; H_0^1(\mathcal{D}))$ définie sur $[0, T] \times \mathcal{D}$ solution de (7.4) pour tout $n \geq 1$.

- L'équation (7.5) permet aussi d'écrire :

$$\|V_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\mathcal{D}))}^2 \leq \frac{C^2}{\epsilon^2} \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathcal{D}))}^2.$$

La suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est bornée indépendamment de n dans $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$. On peut donc en extraire une sous-suite, toujours notée $(V_n)_{n \geq 1}$ qui converge faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$ vers V .

On veut savoir quelle équation vérifie V , sachant que V_n est solution de (7.4).

- * $\int_{\mathcal{D}} V_n(t) w_k \rightharpoonup \int_{\mathcal{D}} V(t) w_k$ dans $L^2(0, T)$ donc :
- $(\partial_t V_n(t), w_k) \rightharpoonup (\partial_t V(t), w_k)$ dans $H^{-1}(0, T)$,
- * $\partial_x V_n(t) \rightharpoonup \partial_x V(t)$ dans $L^2(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ donc :
- $(\partial_x V_n(t), w_k) \rightharpoonup (\partial_x V(t), w_k)$ et $(\partial_x V_n(t), \partial_x w_k) \rightharpoonup (\partial_x V(t), \partial_x w_k)$ dans $L^2(0, T)$,
- * $(f_n(t), w_k) \rightharpoonup \langle f(t), w_k \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}$ dans $L^2(0, T)$,
pour tout $1 \leq k \leq m$.

- Reste la condition initiale :

Pour tout $1 \leq k \leq m$, on sait que $(\partial_x V_n(t), w_k)$, $(\partial_x V_n(t), \partial_x w_k)$, et $(f_n(t), w_k)$ sont bornés dans $L^2(0, T)$, donc $(\partial_t V_n(t), w_k)$ est également borné dans $L^2(0, T)$. On a alors $(V_n(t), w_k) \in H^1(0, T) \subset \mathcal{C}([0, T])$ (injection continue et compacte).

Comme $(V_n(t), w_k) \rightharpoonup (V(t), w_k)$ dans $L^2(0, T)$ et qu'il y a unicité de la limite, on a $(V_n(t), w_k) \rightarrow (V(t), w_k)$ dans $\mathcal{C}([0, T])$ et donc $(V_n(t), w_k)(0) \rightarrow (V(t), w_k)(0)$.

Or, d'après le Théorème 7.2, V_n est régulier en temps, donc

$$(V_n(t), w_k)(0) = (V_n(0), w_k) = 0.$$

Ainsi, $(V(t), w_k)(0) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq m$.

On montre, avec l'équation faible, que, pour tout $1 \leq k \leq m$, $(V, w_k) \in \mathcal{C}([0, T])$. De plus, $V \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ et $H_0^1(\mathcal{D})$ est dense dans $L^2(\mathcal{D})$. On a un lemme :

Lemme 7.3. *Soit H un espace de Hilbert et \tilde{V} un sous ensemble dense de H .*

$$\text{Si } \begin{cases} \tilde{u} \in L^\infty(0, T; H) \\ \text{et } \forall \tilde{v} \in \tilde{V} : (\tilde{u}, \tilde{v})_H \in \mathcal{C}([0, T]), \end{cases} \text{ alors } \tilde{u} \in \mathcal{C}([0, T]; H \text{ faible}).$$

On sait donc que $V \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D}))$ faible. De plus, l'injection de L^2 dans H^{-1} est compacte, d'où $V \in \mathcal{C}([0, T]; H^{-1}(\mathcal{D}))$.

La continuité dans $L^2(\mathcal{D})$ faible donne : $\int_{\mathcal{D}} V(0) w_j = 0$. En multipliant cette équation par la $j^{\text{ième}}$ composante de \tilde{v} , on obtient : $\int_{\mathcal{D}} V(0) \tilde{v} = 0$ pour tout $\tilde{v} \in L^2(\mathcal{D})$, donc pour tout $\tilde{v} \in H_0^1(\mathcal{D})$, d'où $V(0, x) = 0 \forall x \in \mathcal{D}$.

Donc V est solution de l'équation (7.3) et on peut poser $U_m^\epsilon = V$.

Remarque 7.4. On a l'existence globale de U_m^ϵ solution de (7.3) sur $[0, T] \times \mathcal{D}$, pour m et ϵ fixés ; U_m^ϵ est dans $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D})$ faible) $\cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D})) \cap L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$. On veut montrer que la suite $(U_m^\epsilon)_{m \geq 1}$ converge vers une limite U^ϵ qui vérifie, pour tout $v \in H_0^1(\mathcal{D})$

$$\frac{\partial}{\partial t} (U^\epsilon(t, x), v(x)) + a^\epsilon(U^\epsilon(t, x), v(x)) = \langle f(t, x), v(x) \rangle$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$ et $U^\epsilon(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. On aura ainsi l'existence d'une solution du problème d'évolution (7.1), à ϵ fixé, pour toute fonction $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$.

2. On multiplie maintenant l'équation (7.3) par $u_{m,k}^\epsilon$ et on somme sur k . On obtient

$$(\partial_t U_m^\epsilon, U_m^\epsilon) + (\partial_x U_m^\epsilon, \partial_x U_m^\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} (\partial_x U_m^\epsilon, U_m^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \langle f, U_m^\epsilon \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})},$$

d'où

$$\max_{t \in [0, T]} \|U_m^\epsilon\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|U_m^\epsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))}^2 \leq \frac{C^2}{\epsilon^2} \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))}^2.$$

La suite $(U_m^\epsilon)_{m \geq 1}$ est bornée indépendamment de m : on peut en extraire une sous-suite, toujours notée $(U_m^\epsilon)_{m \geq 1}$, qui converge vers \hat{U}^ϵ dans $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$ faible, et vers \check{U}^ϵ dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ faible \star . Or, comme on a unicité de la limite dans \mathcal{D}' , on obtient $\hat{U}^\epsilon = \check{U}^\epsilon$: $(U_m^\epsilon)_{m \geq 1}$ converge vers U^ϵ dans $L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$ faible, et dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D}))$ faible \star .

- Soit $m' \in [1, m[$ un entier fixé et soit $\check{v}_{m'}(x) = \sum_{j=1}^{m'} \underline{v}_j w_j(x)$.

On multiplie l'équation (7.3) par \underline{v}_j et on somme sur j , $1 \leq j \leq m'$: $\forall t \in [0, T]$

$$\partial_t \int_{\mathcal{D}} U_m^\epsilon(t) \check{v}_{m'} + \int_{\mathcal{D}} \partial_x U_m^\epsilon(t) \partial_x \check{v}_{m'} - \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathcal{D}} \partial_x U_m^\epsilon(t) \check{v}_{m'} = \frac{1}{\epsilon} \langle f, \check{v}_{m'} \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}.$$

Quand $m \rightarrow +\infty$:

$$* \int_{\mathcal{D}} U_m^\epsilon(t) \check{v}_{m'} \rightharpoonup \int_{\mathcal{D}} U^\epsilon(t) \check{v}_{m'} \text{ dans } L^2(0, T)$$

$$\text{donc } \partial_t \int_{\mathcal{D}} U_m^\epsilon(t) \check{v}_{m'} \rightharpoonup \partial_t \int_{\mathcal{D}} U^\epsilon(t) \check{v}_{m'} \text{ dans } H^{-1}(0, T),$$

$$* U_m^\epsilon \rightharpoonup U^\epsilon \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D})) \text{ donc } \partial_x U_m^\epsilon \rightharpoonup \partial_x U^\epsilon \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\mathcal{D})) \text{ et}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_x U_m^\epsilon(t) \partial_x \check{v}_{m'} \rightharpoonup \int_{\mathcal{D}} \partial_x U^\epsilon(t) \partial_x \check{v}_{m'} \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible,}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_x U_m^\epsilon(t) \check{v}_{m'} \rightharpoonup \int_{\mathcal{D}} \partial_x U^\epsilon(t) \check{v}_{m'} \text{ dans } L^2(0, T) \text{ faible,}$$

pour tout $m' < m$.

- On peut alors faire tendre m' vers $+\infty$; on note $\check{v}(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \underline{v}_j w_j(x)$ et on a : $\check{v}_{m'} \rightharpoonup \check{v}$ dans $H_0^1(\mathcal{D})$. Il en résulte que

$$(\partial_t U^\epsilon, \check{v}) + (\partial_x U^\epsilon, \partial_x \check{v}) - \frac{1}{\epsilon} (\partial_x U^\epsilon, \check{v}) = \frac{1}{\epsilon} \langle f, \check{v} \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}, \quad (7.6)$$

pour tout $\check{v} \in H_0^1(\mathcal{D})$, dans $L^2(0, T)$ faible.

- On étudie la condition initiale de la même façon que pour V et on obtient l'égalité : $U^\epsilon(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

Ainsi, pour toute fonction $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$, il existe

$$\psi^\epsilon(t, x) \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathcal{D}) \text{ faible}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$$

telle que, pour tout $v \in H_0^1(\mathcal{D})$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\epsilon(t, x), v(x)) + a^\epsilon(\psi^\epsilon(t, x), v(x)) = \langle f(t, x), v(x) \rangle$$

dans $\mathcal{D}'(0, T)$ et $\psi^\epsilon(0, x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

Unicité de la solution.

La méthode de Galerkin ne nous donne pas l'unicité de la solution, contrairement au théorème de Lions. Il faut étudier cette question séparément.

Supposons que ψ_1 et ψ_2 soient deux solutions de l'équation (7.1). Notons $\phi = \psi_1 - \psi_2$. Alors ϕ est solution de l'équation homogène :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x^2 \phi(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \phi(t, x) &= 0 && \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, 1) &= 0 && \forall t \in [0, T], \\ \phi(0, x) &= 0 && \forall x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par ϕ et en l'intégrant sur \mathcal{D} , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_x \phi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 = 0,$$

On l'intègre maintenant en temps et, comme à $t = 0$, ϕ est nul, on a, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{2} \|\phi(t, x)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \int_0^t \|\partial_x \phi(s, x)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 ds = 0,$$

d'où $\phi = 0$ et l'unicité de la solution ψ^ϵ du problème (7.1).

Nous venons donc de démontrer, avec deux méthodes différentes, l'existence et l'unicité de solutions du problème (7.1).

7.2 Une méthode d'approximation.

Dans cette partie, nous proposons une nouvelle méthode d'approximation pour la solution de l'équation (7.1). Nous utilisons pour cela une nouvelle échelle d'espace, et nous réalisons un développement en série en puissances de ϵ , qui est petit. Cela nous donne alors une solution approchée de notre problème.

7.2.1 Construction.

On note ψ_{app} la solution approchée de notre problème (7.1). On cherche ψ_{app} sous la forme d'une série en puissances de ϵ . On décompose $\psi_{app}(t, x)$ en un terme "intérieur" et un terme "correcteur" qui dépend de l'échelle, dite rapide, x/ϵ :

$$\psi_{app}(t, x) = \psi_{app}^{intérieur}(t, x) + \psi_{app}^{correcteur}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right),$$

où chaque terme se décompose à nouveau en série :

$$\psi_{app}^{intérieur}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \psi_i^{int}(t, x) \quad \text{et} \quad \psi_{app}^{correcteur}(t, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \psi_i^{cor}(t, y).$$

Ainsi ψ_{app} s'écrit :

$$\psi_{app}(t, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left(\psi_i^{int}(t, x) + \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) \right).$$

La fonction $\psi_{app}^{intérieur}$, par définition, est solution de l'équation

$$\partial_t \psi_{app}^{intérieur}(t, x) - \partial_x^2 \psi_{app}^{intérieur}(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi_{app}^{intérieur}(t, x) = \frac{1}{\epsilon} f(t, x) \quad \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D},$$

ce qui se réécrit :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left(\partial_t \psi_i^{int}(t, x) - \partial_x^2 \psi_i^{int}(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi_i^{int}(t, x) \right) = \frac{1}{\epsilon} f(t, x) \quad \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}.$$

Si on suppose que f ne contient pas de termes d'ordre ϵ^j avec $j > 0$, en identifiant les puissances de ϵ , on a les équations :

$$\begin{aligned} \text{termes en } \frac{1}{\epsilon} & \quad \begin{cases} -\partial_x \psi_0^{int}(t, x) = f(t, x) & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \psi_0^{int}(t, 1) = 0 & \forall t \in [0, T], \end{cases} \\ \text{termes d'ordre supérieur} & \quad \begin{cases} \partial_x \psi_i^{int}(t, x) = \partial_t \psi_{i-1}^{int}(t, x) - \partial_x^2 \psi_{i-1}^{int}(t, x) & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \psi_i^{int}(t, 1) = 0 & \forall t \in [0, T], \end{cases} \end{aligned}$$

pour $i \geq 1$.

On raisonne de la même façon pour $\psi_{app}^{correcteur}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right)$, solution de l'équation homogène, avec les conditions au bord :

$$\begin{cases} \psi_{app}^{correcteur}(t, 0) = -\psi_{app}^{intérieur}(t, 0) & \forall t \in [0, T], \\ \psi_{app}^{correcteur}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) \rightarrow 0 & \text{quand } x \text{ est loin de la couche limite } (x \gg \epsilon). \end{cases}$$

Remarque 7.5. Ces conditions aux bords traduisent le rôle du correcteur. Il doit, d'une part, corriger la solution intérieure pour que la somme des deux termes vérifie bien les conditions imposées par l'équation. D'autre part, en dehors de la couche limite, son influence doit être très faible.

On pose $X = x/\epsilon$. A x fixé, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, $X \rightarrow +\infty$. La fonction $\psi_{app}^{correcteur}$, vue comme une fonction de X , est donc solution de :

$$\begin{cases} \epsilon^2 \partial_t \psi_{app}^{correcteur}(t, X) - \partial_X^2 \psi_{app}^{correcteur}(t, X) - \partial_X \psi_{app}^{correcteur}(t, X) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^+, \\ \psi_{app}^{correcteur}(t, 0) = -\psi_{app}^{interieur}(t, 0) & \forall t \in [0, T], \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \psi_{app}^{correcteur}(t, X) = 0. \end{cases}$$

On réécrit cette équation en utilisant le développement en série de $\psi_{app}^{correcteur}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\epsilon^2 \partial_t \psi_i^{cor}(t, X) - \partial_X^2 \psi_i^{cor}(t, X) - \partial_X \psi_i^{cor}(t, X)) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^+, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \psi_i^{cor}(t, 0) = -\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \psi_i^{int}(t, 0) & \forall t \in [0, T], \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \psi_i^{cor}(t, X) = 0. \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent, on identifie les puissances de ϵ et on obtient :

$$\begin{aligned} \text{pour } i = 0 \text{ ou } 1 & \begin{cases} \partial_X^2 \psi_i^{cor}(t, X) + \partial_X \psi_i^{cor}(t, X) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^+, \\ \psi_i^{cor}(t, 0) = -\psi_i^{int}(t, 0) & \forall t \in [0, T], \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \psi_i^{cor}(t, X) = 0, \end{cases} \\ \text{et pour } i \geq 2 & \begin{cases} \partial_X^2 \psi_i^{cor}(t, X) + \partial_X \psi_i^{cor}(t, X) = \partial_t \psi_{i-2}^{cor}(t, X) & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^+, \\ \psi_i^{cor}(t, 0) = -\psi_i^{int}(t, 0) & \forall t \in [0, T], \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \psi_i^{cor}(t, X) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La condition

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \psi_i^{cor}(t, X) = 0$$

sera remplacée par

$$\psi_i^{cor}(t, M) = 0,$$

pour M suffisamment grand.

7.2.2 Existence.

Les systèmes précédents ont des solutions sous plusieurs conditions. Tout d'abord, étudions le cas de $\psi_{app}^{interieur}$:

- La fonction ψ_0^{int} est définie par :
$$\begin{cases} \partial_x \psi_0^{int}(t, x) = -f(t, x), \\ \psi_0^{int}(t, 1) = 0. \end{cases}$$

Si on veut avoir $\psi_0^{int} \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathcal{D}))$, il est nécessaire que

$$f \in L^\infty(0, T; L^1(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; L^2(\mathcal{D})),$$

et alors

$$\psi_0^{int} \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}(\bar{\mathcal{D}})).$$

Si on cherche ψ_0^{int} continue en temps sur $[0, T]$, il faut prendre

$$f \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\mathcal{D})),$$

et on a alors

$$\psi_0^{int} \in \mathcal{C}([0, T]; \bar{\mathcal{D}}).$$

Dans ces deux cas, la fonction ψ_0^{int} est donnée par :

$$\psi_0^{int}(t, x) = \int_x^1 f(t, y) dy.$$

– La fonction ψ_1^{int} est définie par :

$$\begin{cases} \partial_x \psi_1^{int}(t, x) &= \partial_t \psi_0^{int}(t, x) - \partial_x^2 \psi_0^{int}(t, x) = \partial_t \int_x^1 f(t, y) dy - \partial_x f(t, x), \\ \psi_1^{int}(t, 1) &= 0. \end{cases}$$

On voit ici que pour définir ψ_1^{int} sur $[0, T]$ tout entier, on a besoin de la continuité de ψ_0^{int} sur $[0, T]$.

Si on veut avoir $\psi_1^{int} \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathcal{D}))$, il faut pouvoir appliquer le théorème de dérivation sous le signe \int et donc en particulier que :

- $\partial_t f(t, x)$ existe pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}$,
- $|\partial_t f(t, x)| \leq h(x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}$ avec h fonction positive et sommable.

On doit donc prendre

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; L^1(\mathcal{D})) \cap L^\infty(0, T; W^{1,2}(\mathcal{D})),$$

et alors

$$\psi_1^{int} \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}(\bar{\mathcal{D}})).$$

Si on cherche ψ_1^{int} continue en temps sur $[0, T]$, il faut prendre

$$f \in \mathcal{C}^1([0, T]; L^1(\mathcal{D})) \cap \mathcal{C}([0, T]; W^{1,2}(\mathcal{D})),$$

et on a alors

$$\psi_1^{int} \in \mathcal{C}([0, T]; \bar{\mathcal{D}}).$$

Dans ces deux cas, la fonction ψ_1^{int} est donnée par :

$$\psi_1^{int}(t, x) = - \int_x^1 (\partial_t \psi_0^{int}(t, y) - \partial_x^2 \psi_0^{int}(t, y)) dy = - \int_{y=x}^1 \left(\int_{z=y}^1 \partial_t f(t, z) dz - \partial_x f(t, y) \right) dy.$$

– Ainsi, comme pour tout $i \geq 1$, on a $\begin{cases} \partial_x \psi_i^{int}(t, x) &= \partial_t \psi_{i-1}^{int}(t, x) - \partial_x^2 \psi_{i-1}^{int}(t, x) \\ \psi_i^{int}(t, 1) &= 0 \end{cases}$, le calcul de ψ_i^{int} nécessite que f soit dans :

$$W^{i,\infty}(0, T; L^1(\mathcal{D})) \cap \dots \cap W^{1,\infty}(0, T; W^{i-1,1}(\mathcal{D})) \cap L^\infty(0, T; W^{i,2}(\mathcal{D})); \quad (7.7)$$

on choisira f dans :

$$\mathcal{C}^i([0, T]; L^1(\mathcal{D})) \cap \dots \cap \mathcal{C}^1([0, T]; W^{i-1,1}(\mathcal{D})) \cap \mathcal{C}([0, T]; W^{i,2}(\mathcal{D}))$$

si l'on souhaite assurer la continuité en temps de ψ_i^{int} sur $[0, T]$.

En revanche, l'existence de ψ_i^{int} donne l'existence de ψ_i^{cor} . On a en effet :

$$\begin{aligned}\psi_0^{cor}(t, X) &= -\psi_0^{int}(t, 0) \exp(-X), \\ \psi_1^{cor}(t, X) &= -\psi_1^{int}(t, 0) \exp(-X), \\ \psi_2^{cor}(t, X) &= (X \partial_t \psi_0^{int}(t, 0) - \psi_2^{int}(t, 0)) \exp(-X) \dots\end{aligned}$$

Remarque 7.6. Une condition n'est cependant pas, a priori, vérifiée : $\psi_{app}(0, x) = 0$, pour tout x dans \mathcal{D} , c'est-à-dire : $\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\psi_i^{int}(0, x) + \psi_i^{cor}(0, \frac{x}{\epsilon})) = 0 \ \forall x \in \mathcal{D}$.

Lorsque ϵ tend vers 0, la condition $\psi_0^{int}(0, x) = 0$, pour tout x dans \mathcal{D} suffit si chaque $(\psi_i^{int})_{i \geq 1}$ et $(\psi_i^{cor})_{i \geq 0}$ est borné sur $\{0\} \times \mathcal{D}$. Il faut donc aussi imposer que $f(0, x) = 0$, pour tout x dans \mathcal{D} pour que toutes les conditions aux bords de l'équation (7.1) soient satisfaites.

7.2.3 Convergence quand ϵ tend vers 0.

Soit $N \geq 0$ un entier et soit f vérifiant la relation (7.7) pour $i = N + 2$, de telle sorte que ψ_{N+2}^{int} soit dans $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H^1(\mathcal{D}))$. On définit l'approximation à l'ordre N par :

$$\tilde{\psi}_{app}(t, x) = \sum_{i=0}^N \epsilon^i \left(\psi_i^{int}(t, x) + \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) \right).$$

On obtient alors l'égalité

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{\psi}_{app}(t, x) - \partial_x^2 \tilde{\psi}_{app}(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \tilde{\psi}_{app}(t, x) \\ = \sum_{i=0}^N \epsilon^i \left[\left(\partial_x \psi_{i+1}^{int}(t, x) + \partial_x^2 \psi_i^{int}(t, x) + \partial_t \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) \right) \right. \\ \left. - \left(\partial_x^2 \psi_i^{int}(t, x) + \partial_x^2 \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) \right) - \frac{1}{\epsilon} \left(\partial_x \psi_i^{int}(t, x) + \partial_x \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) \right) \right].\end{aligned}$$

Or, comme pour tout i , $0 \leq i \leq N$, on a

$$\partial_t \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) - \epsilon^2 \partial_x^2 \psi_{i+2}^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) - \epsilon \partial_x \psi_{i+2}^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) = 0,$$

ainsi que, pour $i = 0$ ou 1 ,

$$\partial_x^2 \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi_i^{cor}\left(t, \frac{x}{\epsilon}\right) = 0,$$

on écrit finalement :

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{\psi}_{app} - \partial_x^2 \tilde{\psi}_{app} - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \tilde{\psi}_{app} \\ = \epsilon^N \partial_x \psi_{N+1}^{int} - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi_0^{int} + \epsilon^{N+1} \partial_x^2 \psi_{N+1}^{cor} + \epsilon^{N+2} \partial_x^2 \psi_{N+2}^{cor} + \epsilon^N \partial_x \psi_{N+1}^{cor} + \epsilon^{N+1} \partial_x \psi_{N+2}^{cor},\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\psi}_{app} - \partial_x^2 \tilde{\psi}_{app} - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \tilde{\psi}_{app} \\ = \epsilon^N \partial_x \psi_{N+1}^{int} + \epsilon^{N+1} \partial_x^2 \psi_{N+1}^{cor} + \epsilon^{N+2} \partial_x^2 \psi_{N+2}^{cor} + \epsilon^N \partial_x \psi_{N+1}^{cor} + \epsilon^{N+1} \partial_x \psi_{N+2}^{cor} + \frac{1}{\epsilon} f. \end{aligned}$$

Ainsi, si ψ est solution de l'équation (7.1), l'erreur du schéma est donnée par :

$$\begin{aligned} \partial_t (\tilde{\psi}_{app} - \psi) - \partial_x^2 (\tilde{\psi}_{app} - \psi) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x (\tilde{\psi}_{app} - \psi) \\ = \epsilon^N \partial_x \psi_{N+1}^{int} + \epsilon^{N+1} \partial_x^2 \psi_{N+1}^{cor} + \epsilon^{N+2} \partial_x^2 \psi_{N+2}^{cor} + \epsilon^N \partial_x \psi_{N+1}^{cor} + \epsilon^{N+1} \partial_x \psi_{N+2}^{cor}. \end{aligned}$$

On multiplie cette équation par $\tilde{\psi}_{app} - \psi$ et on l'intègre sur \mathcal{D} . On écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon^N \int_{\mathcal{D}} \partial_x \psi_{N+1}^{int} (\tilde{\psi}_{app} - \psi) dx \\ \leq \epsilon^N \|\partial_x \psi_{N+1}^{int}\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\tilde{\psi}_{app} - \psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz} \\ \leq \epsilon^N C \|\partial_x \psi_{N+1}^{int}\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\partial_x (\tilde{\psi}_{app} - \psi)\|_{L^2(\mathcal{D})} \quad \text{par l'inégalité de Poincaré} \\ \leq \frac{1}{2} \left(5\epsilon^{2N} C^2 \|\partial_x \psi_{N+1}^{int}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \frac{1}{5} \|\partial_x (\tilde{\psi}_{app} - \psi)\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) \quad \text{car } ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\tilde{\psi}_{app} - \psi)^2 dx + \int_{\mathcal{D}} \left(\partial_x (\tilde{\psi}_{app} - \psi) \right)^2 dx \\ \leq 5\epsilon^{2N} C^2 \left(\|\partial_x \psi_{N+1}^{int}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_x \psi_{N+1}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right. \\ \left. + \epsilon^2 \|\partial_x^2 \psi_{N+1}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \epsilon^2 \|\partial_x \psi_{N+2}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \epsilon^4 \|\partial_x^2 \psi_{N+2}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right). \end{aligned}$$

On intègre enfin cette dernière équation entre 0 et \tilde{t} et on trouve

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathcal{D}} (\tilde{\psi}_{app} - \psi)^2 dx \right) (\tilde{t}) + \int_0^{\tilde{t}} \int_{\mathcal{D}} \left(\partial_x (\tilde{\psi}_{app} - \psi) \right)^2 dx dt \\ \leq 5\epsilon^{2N} C^2 \int_0^{\tilde{t}} \left(\|\partial_x \psi_{N+1}^{int}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \|\partial_x \psi_{N+1}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right. \\ \left. + \epsilon^2 \|\partial_x^2 \psi_{N+1}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \epsilon^2 \|\partial_x \psi_{N+2}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \epsilon^4 \|\partial_x^2 \psi_{N+2}^{cor}\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

On a donc convergence, lorsque ϵ tend vers 0, de la solution approchée à l'ordre N vers la solution de l'équation (7.1).

7.3 Premiers résultats numériques.

Tout d'abord, d'un point de vue numérique, il est inutile de calculer les ψ_i^{cor} et ψ_i^{int} pour $i \geq 2$ puisque l'erreur du schéma est d'ordre ϵ^2 .

7.3.1 Le programme.

Ces calculs ont été programmés en fortran.

Le programme principal est `CoucheLimite.f`. Il appelle les routines qui initialisent les valeurs, qui calculent la solution théorique ainsi que ses normes, la solution approchée classiquement avec les différences finies et la solution approchée avec la méthode décrite ci-dessus. Enfin, les derniers appels permettent de calculer les erreurs relatives et de tracer les courbes.

Le fichier `Couche.prm` contient les valeurs des différents paramètres :

- ϵ la valeur de ϵ ,
- DL la borne supérieure de l'intervalle considéré en espace : $\mathcal{D} = [0, DL]$,
- l la taille approximative de la couche limite, de telle sorte que, sur $[0, l]$ on ait un pas d'espace petit, et sur $[l, DL]$ on puisse avoir une moins bonne résolution. Une façon de choisir ce paramètre est de lancer le calcul sur une grille régulière et d'observer alors la taille de la couche limite,
- nx choisi pour qu'il y ait $nx + 1$ points sur l'intervalle $[0, l]$; le pas d'espace dans la couche limite est alors $dx = l/nx$,
- nxx tel qu'on ait $nxx + 1$ points dans $[l, DL]$, et le pas d'espace en dehors de la couche limite est alors $dxx = (DL - l)/nxx$,
- $ordremax$ la valeur de l'ordre jusque auquel on réalise le développement,
- et enfin le nom du fichier de résultats.

Le programme `Calculapp.f` contient toutes les routines :

- **routines d'initialisation** : la première routine d'initialisation lit les valeurs des paramètres dans le fichier précisé lors de l'exécution (`Couche.prm`) et les affecte, la seconde permet de définir la fonction f ,
- **routines de calculs des résultats** : la routine `calculth` renvoie le résultat théorique, qu'il faut avoir calculé préalablement !

Pour le calcul approché, il faut utiliser la routine `calculapp` où sont programmés les calculs des ψ_i^{cor} et ψ_i^{int} . On discrétise les équations avec la méthode des différences finies centrées. Pour résoudre les équations des ψ_i^{cor} , on utilise la méthode LU, par l'intermédiaire de la routine `decLU`. En stationnaire, c'est toujours la même équation, seules les conditions aux bord changent. On approche les dérivées à l'ordre 2.

Enfin, `calculdis` permet de trouver la solution de notre équation par la méthode des différences finies centrées, directement. Elle utilise également la méthode LU, programmée dans `decLUdis`, toujours avec une approximation à l'ordre 2.

- **divers outils** : une routine `norme` qui, pour une fonction donnée, renvoie sa norme infinie, sa norme L^2 et sa norme H^1 , en appelant une autre routine qui calcule la norme L^2 au carré d'une fonction.

Pour comparer les résultats, la routine `calculerreur` affiche les erreurs relatives en norme infinie, L^2 et H^1 entre deux fonctions, en utilisant `norme`.

Enfin une routine permettant l'écriture des fonctions résultats dans un fichier `.xg` que l'on appelle avec `Xgraph`¹.

¹<http://www.xgraph.org>

7.3.2 Résultats obtenus en stationnaire.

Dans cette partie, nous considérons le cas où $f(x) = x$. La solution théorique est alors donnée par :

$$\psi(x) = -\frac{x^2}{2} + \epsilon x + \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \frac{\exp\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) - 1}{\exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) - 1}.$$

Nous réalisons un premier test où ϵ vaut 0.01, et les paramètres l , nx , et nxx ont été fixés respectivement à 0.1, 30 et 50. On obtient donc les tracés (Figure 7.1) de la solution théorique, de ψ_0 et $\psi_0 + \epsilon\psi_1$ (les ordres suivants sont nuls vu le choix de f), et enfin de la solution que l'on obtient en résolvant l'équation directement avec la méthode LU et les différences finies.

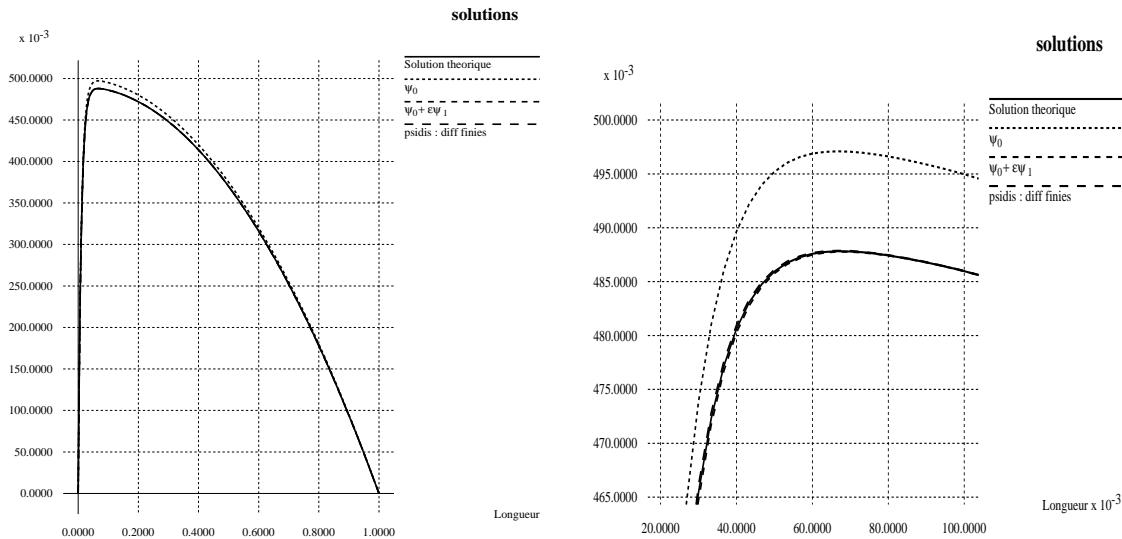


FIG. 7.1 – Résultats en stationnaire pour $\epsilon = 0.01$, $l = 0.1$, $nx = 30$, et $nxx = 50$

On peut également regarder le cas où le schéma correspondant à la résolution numérique directe du problème n'est pas stable : sur la Figure 7.2, nous représentons à nouveau les quatre courbes, mais pour $\epsilon = 0.001$, $l = 0.01$, $nx = 10$ et $nxx = 50$.

Dans les deux cas, la solution théorique et l'approximation à l'ordre 1 $\psi_0 + \epsilon\psi_1$ sont très proches. L'approximation à l'ordre 0 est, comme on s'y attend, un peu moins bonne. La Figure 7.2 montre également que lorsque la méthode directe par différences finies centrées crée des oscillations ($dx > 2\epsilon$), notre méthode par développement en série intérieur-correcteur donne de bons résultats.

Les erreurs par rapport à la solution théorique sont dans le tableau suivant :

| | diff relative L^∞ | diff relative L^2 | diff relative H^1 |
|-----------------------------------|--------------------------|---------------------|---------------------|
| ψ_0 Fig 7.1 | 0.0190614704 | 0.0157563731 | 0.0156941943 |
| $\psi_0 + \epsilon\psi_1$ Fig 7.1 | 0.00371342147 | 0.000696196804 | 0.0068328188 |
| diff finies Fig 7.1 | 0.00348456805 | 0.000653160816 | 0.00642415387 |
| ψ_0 Fig 7.2 | 0.00198486045 | 0.00158079153 | 0.00162897332 |
| $\psi_0 + \epsilon\psi_1$ Fig 7.2 | 0.000368076197 | 2.11458355E-05 | 0.000600692215 |
| diff finies Fig 7.2 | 0.0360254587 | 0.00219594986 | 0.0583769134 |

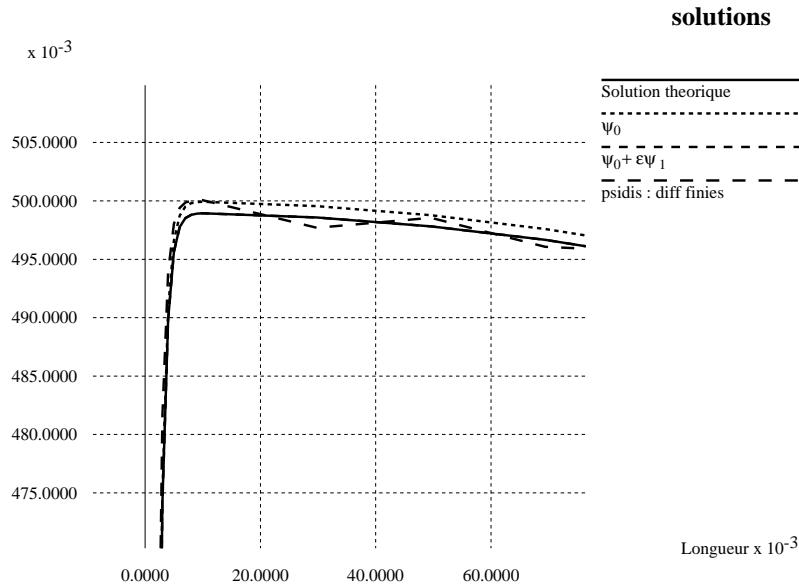


FIG. 7.2 – Résultats en stationnaire pour $\epsilon = 0.001$, $l = 0.01$, $nx = 10$, et $nx = 50$

Ce tableau nous permet d'affirmer que notre méthode d'approximation est comparable à la méthode par différences finies lorsque celle-ci résout bien la couche limite et ne produit pas d'oscillations. Cependant, la contrainte de stabilité est beaucoup moins restrictive.

Maintenant que nous avons validé les résultats en stationnaire, nous pouvons passer au modèle complet avec évolution en temps.

7.4 Dépendance en temps.

Dans le programme principal, on introduit une boucle en temps, et on effectue à chaque passage les calculs précédents. Si le choix de la fonction f permet d'affirmer que notre solution tend vers une fonction stationnaire (si f ne dépend pas du temps par exemple), on peut choisir un critère d'arrêt qui évalue le moment où la solution n'évolue presque plus. Sinon, il faut fixer un temps maximal.

On modifie également les routines pour garder en mémoire les valeurs des ψ_i^{int} aux temps précédents, et pouvoir ainsi faire intervenir les dérivées en temps $\partial_t \psi_{i-1}^{int}$ dans le calcul de ψ_{i-1}^{int} , sans oublier de rajouter les définitions du pas de temps et du temps maximal dans le fichier de paramètres.

Il s'agit là d'une première adaptation du programme stationnaire, comme on le fait classiquement ; pour l'améliorer, nous nous penchons sur les spécificités de ce modèle.

7.5 Modification du correcteur.

Nous nous intéressons à la question du support du correcteur. Dans les développements présentés précédemment, nous avons remplacé la condition

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \psi_i^{cor}(t, X) = 0$$

par

$$\psi_i^{cor}(t, M) = 0 \text{ pour } M \text{ suffisamment grand.}$$

Mais comment choisir M ?

7.5.1 Support du correcteur.

Nous devons donc fixer une valeur pour M :

- une première idée est de prendre M tel que ϵM soit à l'extérieur du domaine \mathcal{D} considéré, ce que nous avons fait jusqu'ici. Les résultats obtenus nous montrent (Figure 7.3) que le correcteur n'a une influence que sur une très petite partie du domaine \mathcal{D} (plus exactement, sur la couche limite), et le temps de calcul est assez important.

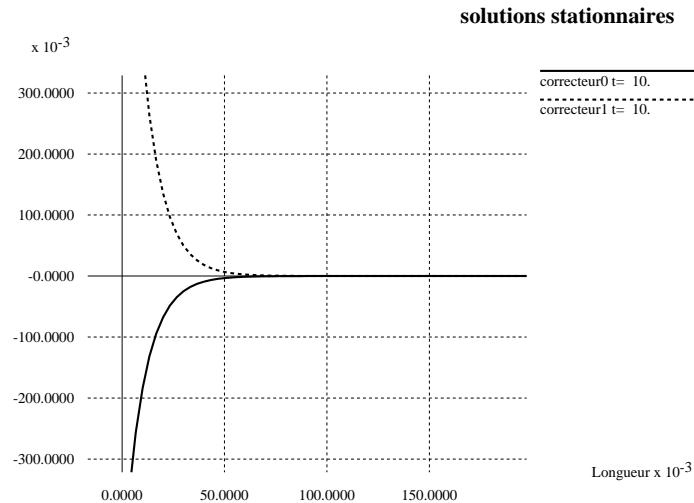


FIG. 7.3 – Correcteurs aux ordres 0 et 1 pour $\epsilon = 0.01$ dans le cas où $f(x, t) = x$ (stationnaire), $nx = 30$ et $nxx = 50$

- une seconde idée est donc de ne calculer le correcteur que sur la couche limite, et de le considérer comme nul en dehors.

7.5.2 Validation de la méthode.

On compare les résultats en calculant le correcteur sur tout le domaine, et en le calculant sur un nombre de points noté *borne*. On prendra pour *borne* une fois et demie le nombre de points de la couche limite. Ce coefficient a été choisi expérimentalement pour permettre d'avoir des résultats exacts sur la couche limite, tout en simplifiant les calculs.

En stationnaire, l'erreur est acceptable (Figure 7.4) puisqu'elle n'intervient que sur les termes au-delà de la couche limite, où le correcteur est négligeable, et elle est très faible .

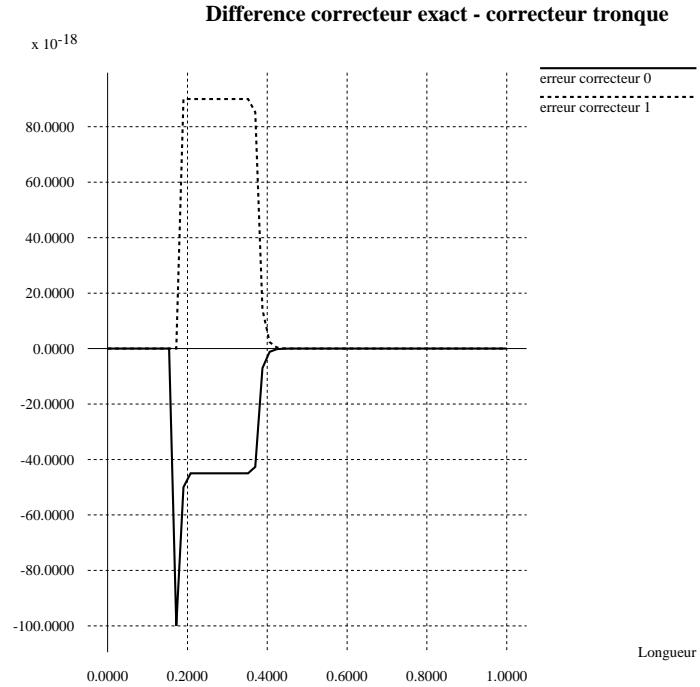


FIG. 7.4 – Différence entre les correcteurs pour $f(x, t) = x$ si $\epsilon = 0.01$, $nx = 30$, $nxx = 50$ et $l = 0.1$.

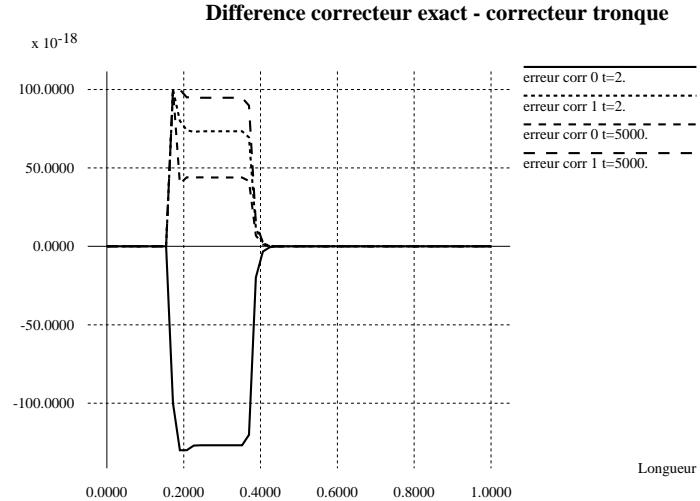


FIG. 7.5 – Différence entre les correcteurs pour $f(x, t) = x + \sin(t)$ si $\epsilon = 0.01$, $nx = 30$, $nxx = 50$ et $l = 0.1$. Le pas de temps est de 0.1, il y a donc 20 ou 50000 itérations.

Ensuite, il faut voir si cette erreur n'est pas amplifiée au cours du temps : on a pour cela comparé les erreurs après 20 itérations et celles obtenues après 50000 itérations si on choisit $f(x, t) = x + \sin(t)$: les résultats, présentés Figure 7.5, sont bons puisque les erreurs restent

du même ordre de grandeur .

A noter également que cette simplification fait gagner beaucoup de temps : il faut environ 4 fois plus de temps (dans le cas considéré ici) si on calcule le correcteur en entier que si on remplace les termes négligeables en dehors de la couche limite par zéro.

7.6 Solutions du problème linéaire simplifié.

On considère toujours $\epsilon = 0.01$, $nx = 30$, $nxx = 50$ et $l = 0.1$. On prend $f(x, t) = x + \sin(t)$ où t varie de 0 à 6.5 avec un pas de 0.5. On trace $\psi_0 + \epsilon\psi_1$, en utilisant la borne sur le correcteur :

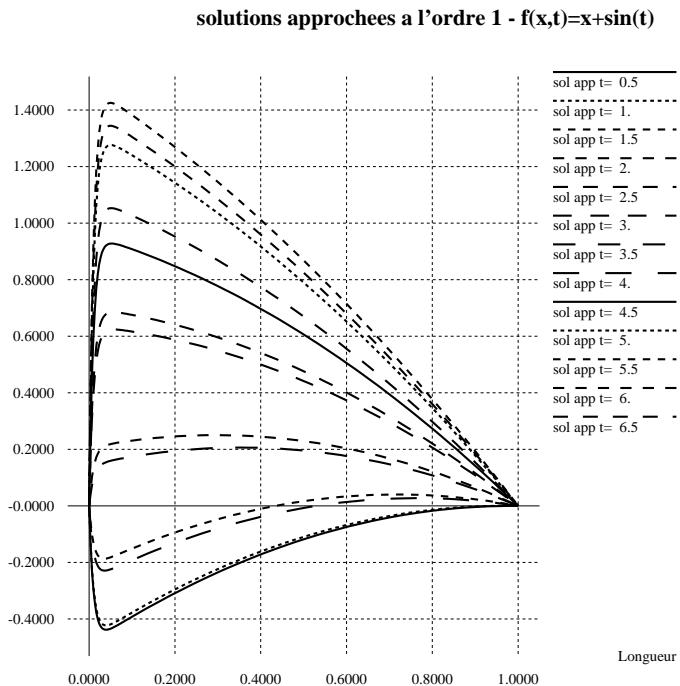


FIG. 7.6 – Solutions approchées à l'ordre 1 pour $f(x, t) = x + \sin(t)$ si $\epsilon = 0.01$, $nx = 30$, $nxx = 50$ et $l = 0.1$.

Les résultats obtenus Figure 7.6 nous montrent l'évolution en temps de la solution du problème (7.1). Notons que, comme on peut s'y attendre avec le choix de f , la solution est périodique en temps.

Conclusion.

Nous avons donc développé une méthode faisant appel à une nouvelle variable rapide, qui nous permet de donner une solution approchée du problème (7.1). Avec cette résolution, nous sommes capables de surmonter les difficultés rencontrées lors de la résolution directe par différences finies, sans être obligés de raffiner le maillage.

Maintenant, nous ajoutons de nouveaux termes qui représentent la topographie à l'équation (7.1) et nous y appliquons la même méthode d'approximation.

Chapitre 8

Influence de la topographie dans les équations Quasi-Géostrophiques.

Ce chapitre est un prolongement du chapitre précédent : en effet, nous étudions, avec les mêmes approches, une équation avec un terme supplémentaire qui représente la topographie. Comme pour l'équation avec fond plat, nous donnons des estimations *a priori* et nous démontrons l'existence de solutions. Outre le développement en série effectué directement sur la nouvelle équation, nous étudions comment, en ayant la solution pour un fond plat, nous pouvons donner l'expression des termes qu'il faut lui ajouter pour obtenir la solution pour un fond variable, sans refaire tous les calculs.

Nous nous penchons ensuite sur une équation en deux dimensions : il s'agit de l'équation Quasi-Géostrophique stationnaire. Nous effectuons à nouveau un développement multi-échelles qui nous permet de tracer la solution de cette équation approchée à tout ordre. Les expressions obtenues sont bien plus complexes que dans le cas d'une seule dimension. Cette approche est validée en comparant nos résultats à ceux donnés par le programme utilisé au Chapitre 6.

Enfin, dans une dernière partie, nous ajoutons tous les termes qui manquaient pour avoir l'équation Quasi-Géostrophique. D'une part, nous avons la dépendance en temps, qui intervient par l'intérmédiaire d'un terme supplémentaire mais également par le forçage, et d'autre part le terme de frottement de fond. Nous obtenons donc, pour un certain choix de coefficients, une approximation de la solution de l'équation Quasi-Géostrophique complète.

Les résultats présentés ici font l'objet d'un article en préparation avec C. KAZANTSEV.

8.1 Equation simplifiée avec la topographie.

Pour faire intervenir la topographie, on rajoute, dans l'équation (7.1), le terme :

$$\partial_x \psi \partial_x \eta_B.$$

On considère donc l'équation :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x) - \partial_x^2 \psi(t, x) + (\partial_x \eta_B(x) - \beta) \partial_x \psi(t, x) &= \beta f(t, x) && \text{dans } [0, T] \times \mathcal{D}, \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) &= 0 && \forall t \in [0, T], \\ \psi(0, x) &= 0 && \forall x \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

On rappelle que ϵ est un petit paramètre, que $\beta = \epsilon^{-1}$ et que l'on considère : $\mathcal{D} =]0, 1[, T \in \mathbb{R}_+^*, f \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$.

8.1.1 Résultats théoriques.

Tout d'abord, nous montrons que, comme précédemment avec un fond plat, nous avons des estimations *a priori* et nous pouvons assurer l'existence d'une solution à ϵ fixé.

Estimations *a priori*.

On multiplie l'équation de départ par ψ , on l'intègre sur \mathcal{D} puis sur $[0, t]$. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{D}} |\psi|^2 \right) (t) + \int_0^t \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \psi)^2 \\ = \beta \int_0^t \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})} - \int_0^t \int_{\mathcal{D}} \partial_x \eta_B(x) \psi(x) \partial_x \psi(x) \, dx. \end{aligned}$$

D'une part, on peut majorer $|\langle f, \psi \rangle|$ comme suit :

$$|\langle f, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})}| \leq \frac{1}{2} \left(\alpha \beta C^2 \|f\|_{H^{-1}(\mathcal{D})}^2 + \frac{1}{\alpha \beta} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \right) \quad (\alpha \text{ constante positive}),$$

d'autre part, on a les inégalités :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{D}} \partial_x \eta_B(x) \psi(x) \partial_x \psi(x) \, dx \right| &\leq \left[\int_{\mathcal{D}} (\partial_x \eta_B(x) \psi(x))^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\leq \frac{1}{2\|\partial_x \eta_B\|_{\infty}} \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \eta_B(x) \psi(x))^2 \, dx + \frac{1}{2} \|\partial_x \eta_B\|_{\infty} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\partial_x \eta_B\|_{\infty} \|\psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x \eta_B\|_{\infty} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \\ &\leq \|\partial_x \eta_B\|_{\infty} \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2. \end{aligned}$$

En revenant à l'inégalité complète, on a la relation :

$$\left(\int_{\mathcal{D}} |\psi|^2 \, dx \right) (t) + \left(1 - \frac{1}{2\alpha} - \|\partial_x \eta_B\|_{\infty} \right) \int_0^t \|\partial_x \psi\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 \leq \alpha C^2 \beta^2 \|f\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))}^2.$$

Si $\|\partial_x \eta_B\|_\infty < 1$, on peut choisir $\alpha > \frac{1}{2 - 2\|\partial_x \eta_B\|_\infty}$.

Ainsi, à β fixé, comme f est dans $L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{D}))$, on va chercher une solution dans

$$L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D})).$$

Existence de la solution à β fixé.

On veut à nouveau utiliser le théorème de Lions pour les équations paraboliques linéaires. Pour cela, il nous faut montrer que la forme bilinéaire A^β définie par

$$A^\beta(u(t), v) = \int_{\mathcal{D}} \partial_x u(t) (\partial_x v + (\partial_x \eta_B - \beta)v) \, dx,$$

est continue et coercive de $H_0^1(\mathcal{D}) \times H_0^1(\mathcal{D})$ sur \mathbb{R} .

La continuité est donnée par l'inégalité :

$$\begin{aligned} |A^\beta(u(t), v)| &\leq \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|\partial_x v\|_{L^2(\mathcal{D})} + \beta \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|v\|_{L^2(\mathcal{D})} + \|\partial_x \eta_B\|_\infty \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|v\|_{L^2(\mathcal{D})} \\ &\leq (\beta + \|\partial_x \eta_B\|_\infty) \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})} \|v\|_{H^1(\mathcal{D})} \\ &\leq (\beta + \|\partial_x \eta_B\|_\infty) \|u\|_{H^1(\mathcal{D})} \|v\|_{H^1(\mathcal{D})} \quad (\beta > 1), \end{aligned}$$

et la coercivité se démontre avec l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned} A^\beta(u, u) &= \int_{\mathcal{D}} \partial_x u \partial_x u + \int_{\mathcal{D}} \partial_x \eta_B \partial_x u \geq \|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \frac{1}{2} \left(\|\partial_x u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2 + \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \eta_B u)^2 \right) \\ &\geq \frac{3}{2} \|u\|_{H^1(\mathcal{D})}^2. \end{aligned}$$

On en conclut donc, avec le Théorème 7.1, que, à β fixé, il existe une unique fonction ψ dans $C([0, T]; L^2(\mathcal{D})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{D}))$ solution de (8.1).

8.1.2 Un premier cas : fond à l'ordre principal.

Dans cette partie, nous considérons que le fond est tel que $\partial_x \eta_B(x) = b\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, avec b périodique.

On va donc étudier l'équation :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t, x) - \partial_x^2 \psi(t, x) + b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_x \psi(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi(t, x) &= \frac{1}{\epsilon} f(t, x), \\ \psi(x = 0) = \psi(x = 1) &= 0, \\ \psi(t = 0) &= 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

où la fonction b est périodique de période P et de moyenne nulle, telle que, pour x variant entre 0 et 1, $b\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ ait un nombre entier de périodes.

Dans un premier temps, nous étudions cette équation sans la dépendance en temps, qui n'intervient pas à l'ordre principal. Nous supposons donc que ψ ne dépend que des variables d'espace. Ensuite, nous ajoutons les termes d'évolution par analogie avec les résultats obtenus avec fond plat, puisque ce nouveau terme de topographie ne constitue pas le noeud du problème.

Développement asymptotique.

Comme dans le cas d'un fond plat, on réalise un développement asymptotique de la fonction inconnue : on cherche ψ sous la forme

$$\psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = \sum_{i \geq 0} \epsilon^i \left[\psi_i^{int}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \psi_i^{cor}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right] = \psi^{int}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \psi^{cor}\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

où les ψ_i^{int} (et ψ^{int}) sont périodiques en x/ϵ , mais les ψ_i^{cor} (et ψ^{cor}) n'ont pas cette propriété.

L'équation (8.2) sans évolution en temps peut donc se réécrire en séparant les fonctions selon leur périodicité et les variables dont elles dépendent :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 \psi^{int}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_x \psi^{int}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi^{int}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon} f(x), \\ \psi^{int}(x = 1) = 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} -\partial_x^2 \psi^{cor}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_x \psi^{cor}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi^{cor}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = 0, \\ \psi^{cor}(X = 0) = -\psi^{int}(x = 0), \\ \psi^{cor}(X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Nous étudions alors séparément les fonctions "intérieures" et les "correcteurs" en cherchant à exprimer les premiers termes, ou du moins trouver des systèmes qui permettraient de les calculer.

Etude des fonctions "intérieures".

La fonction ψ^{int} est périodique en x/ϵ et doit vérifier l'équation (8.3).

Comme au Chapitre 7, on pose $X = x/\epsilon$. On remplace ψ^{int} par sa décomposition en somme de ψ_i^{int} et on obtient les deux relations :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} \epsilon^i \left[-\partial_x^2 \psi_i^{int}(x, X) - \frac{2}{\epsilon} \partial_x \partial_X \psi_i^{int}(x, X) - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X^2 \psi_i^{int}(x, X) + b(X) \partial_x \psi_i^{int}(x, X) \right. \\ \left. + \frac{b(X)}{\epsilon} \partial_X \psi_i^{int}(x, X) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi_i^{int}(x, X) - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X \psi_i^{int}(x, X) \right] = \frac{1}{\epsilon} f(x), \\ \sum_{i \geq 0} \epsilon^i \psi_i^{int}(x = 1) = 0. \end{aligned}$$

On identifie alors les termes selon les puissances de ϵ :

- A l'ordre $1/\epsilon^2$:

La fonction ψ_0 est périodique en X et vérifie l'équation

$$-\partial_X^2 \psi_0^{int}(x, X) - \partial_X \psi_0^{int}(x, X) = 0.$$

On en déduit que ψ_0 ne dépend pas de X et on regarde si l'ordre suivant nous donne plus d'informations sur cette fonction.

- A l'ordre $1/\epsilon$:

En tenant compte du résultat sur ψ_0 , on peut réécrire l'équation à l'ordre $1/\epsilon$ sous la forme :

$$-\partial_X^2 \psi_1^{int}(x, X) - \partial_x \psi_0^{int}(x) - \partial_X \psi_1^{int}(x, X) = f(x). \quad (8.5)$$

On calcule la moyenne en X , et comme les ψ_i^{int} sont périodiques, on obtient :

$$\partial_x \psi_0^{int}(x) = -f(x).$$

De plus, la condition $\psi_0^{int}(x = 1) = 0$ nous donne

$$\psi_0^{int}(x) = \int_x^1 f(s) ds.$$

On a également, en reportant cette formule dans l'équation (8.5), l'égalité suivante sur la fonction ψ_1^{int} périodique en X :

$$\partial_X^2 \psi_1^{int}(x, X) + \partial_X \psi_1^{int}(x, X) = 0,$$

donc ψ_1^{int} ne dépend pas de X .

- A l'ordre 1 :

Comme ni ψ_0 ni ψ_1 ne dépendent de X , on peut simplifier l'équation pour arriver à :

$$-\partial_x^2 \psi_0^{int}(x) - \partial_X^2 \psi_2^{int}(x, X) + b(X) \partial_x \psi_0^{int}(x) - \partial_x \psi_1^{int}(x) - \partial_X \psi_2^{int}(x, X) = 0.$$

A nouveau, on moyenne en X pour avoir :

$$\partial_x \psi_1^{int}(x) = -\partial_x^2 \psi_0^{int}(x) \text{ donc } \psi_1^{int}(x) = f(x) - f(1).$$

ainsi que

$$\partial_X^2 \psi_2^{int}(x, X) + \partial_X \psi_2^{int}(x, X) = b(X) \partial_x \psi_0^{int}(x).$$

On résout cette dernière équation avec la condition $\psi_2^{int}(x = 1) = 0$ et en utilisant la périodicité de la fonction. On obtient :

$$\partial_X \psi_2^{int}(x, X) = \partial_x \psi_0^{int}(x) \left[\int_0^X b(s) e^s ds + \frac{1}{e^P - 1} \int_0^P b(s) e^s ds \right] e^{-X}.$$

Cette égalité ne nous donne que la relation :

$$\psi_2^{int}(x, X) = \int_0^X \partial_{\tilde{X}} \psi_2^{int}(x, \tilde{X}) d\tilde{X} + D(x),$$

avec D inconnue. Pour connaître la dépendance en x , il faut étudier l'ordre suivant.

- A l'ordre ϵ :

L'équation à laquelle on aboutit est :

$$\begin{aligned} & -\partial_x^2 \psi_1^{int}(x) - 2\partial_x \partial_X \psi_2^{int}(x, X) - \partial_X^2 \psi_3^{int}(x, X) \\ & + b(X) \partial_x \psi_1^{int}(x) + b(X) \partial_X \psi_2^{int}(x, X) - \partial_x \psi_2^{int}(x, X) - \partial_X \psi_3^{int}(x, X) = 0. \end{aligned}$$

Lorsque l'on calcule la moyenne en X , on obtient :

$$-\partial_x^2 \psi_1^{int}(x) + \overline{b(X) \partial_X \psi_2^{int}(x, X)}^X - \overline{\partial_x \psi_2^{int}(x, X)}^X = 0,$$

où \overline{g}^X désigne la moyenne de g en X .

On peut reformuler les moyennes ci-dessus en utilisant l'expression de ψ_2^{int} :

– d'une part,

$$\overline{b(X)\partial_X\psi_2^{int}(x, X)}^X = M\partial_x\psi_0^{int}(x),$$

où M ne dépend que de b :

$$M = \overline{b(X) \left[\int_0^X b(s)e^s ds + \frac{1}{e^P - 1} \int_0^P b(s)e^s ds \right] e^{-X}}^X;$$

– d'autre part,

$$\overline{\partial_x\psi_2^{int}(x, X)}^X = N\partial_x^2\psi_0^{int}(x) + \partial_x D(x),$$

où N ne dépend également que de b :

$$N = \overline{\int_0^X \left(\int_0^u b(s)e^s ds + \frac{1}{e^P - 1} \int_0^P b(s)e^s ds \right) e^{-u} du}^X;$$

Ainsi la dépendance de ψ_2^{int} en x (qui est donnée par D) peut être calculée en utilisant la condition $\psi_2^{int}(x = 1) = 0$ et l'équation :

$$-\partial_x D(x) = N\partial_x^2\psi_0^{int}(x) - M\partial_x\psi_0^{int}(x) + \partial_x^2\psi_1^{int}(x).$$

La fonction ψ_2^{int} est ainsi totalement déterminée :

$$\psi_2^{int}(x, X) = \partial_x\psi_0^{int}(x) \int_0^X \left(\int_0^u b(s)e^s ds + \frac{1}{e^P - 1} \int_0^P b(s)e^s ds \right) e^{-u} du + D(x).$$

Comme précédemment, l'équation à l'ordre ϵ nous permet également de calculer $\partial_X\psi_3^{int}$.

Pour connaître la dépendance en x , il faudrait écrire l'équation à l'ordre suivant ...

Nous voyons donc que nous pouvons, de proche en proche, calculer (plus ou moins facilement) les fonctions "intérieures". Passons aux "correcteurs".

Etude des "correcteurs".

On note encore $X = x/\epsilon$. La fonction ψ^{cor} , que l'on développe en fonction de ϵ , doit vérifier l'équation (8.4). On a alors le système :

$$\sum_{i \geq 0} \epsilon^i \left[-\partial_X^2\psi_i^{cor}(X) + \epsilon b(X)\partial_X\psi_i^{cor}(X) - \partial_X\psi_i^{cor}(X) \right] = 0,$$

$$\sum_{i \geq 0} \epsilon^i \psi_i^{cor}(X = 0) = -\sum_{i \geq 0} \epsilon^i \psi_i^{int}(x = 0),$$

$$\sum_{i \geq 0} \epsilon^i \psi_i^{cor}(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0.$$

A nouveau, on identifie les puissances de ϵ .

- A l'ordre 1 :

La fonction ψ_0^{cor} est la solution de l'équation

$$\partial_X^2\psi_0^{cor}(X) + \partial_X\psi_0^{cor}(X) = 0,$$

vérifiant les deux conditions : $\psi_0^{cor}(0) = -\psi_0^{int}(0) = -\int_0^1 f(s) ds$ et $\psi_0^{cor}(X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0$.

Donc

$$\psi_0^{cor}(X) = - \left(\int_0^1 f(s) ds \right) \exp(-X).$$

- A l'ordre ϵ :

La fonction ψ_1^{cor} doit vérifier les trois propriétés :

$$\partial_X^2 \psi_1^{cor}(X) + \partial_X \psi_1^{cor}(X) = b(X) \partial_X \psi_0^{cor}(X),$$

$$\psi_1^{cor}(0) = -\psi_1^{int}(0),$$

$$\psi_1^{cor}(X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Si on connaît ψ_0^{cor} et ψ_1^{int} , on pourra calculer ψ_1^{cor} .

Les ordres suivants se calculent de la même façon, de proche en proche, à condition de connaître les ψ_i^{int} .

Nous sommes donc en mesure de calculer les premiers termes du développement asymptotique de la solution stationnaire de l'équation avec topographie.

Evolution en temps.

On revient désormais à l'équation (8.2) avec l'évolution temporelle.

Pour les fonctions "intérieures", on remarque que le premier terme ψ_0^{int} ne dépendra du temps que par la fonction f .

En revanche, l'équation permettant d'obtenir ψ_1^{int} va faire intervenir $\partial_t \psi_0^{int}$; on aura en effet :

$$\partial_x \psi_1^{int}(t, x) = -\partial_x^2 \psi_0^{int}(t, x) + \partial_t \psi_0^{int}(t, x).$$

Enfin, le troisième terme ψ_2^{int} ne sera modifié que par l'intermédiaire de ψ_0^{int} et du calcul de la fonction D , qui est alors solution de :

$$-\partial_x D(t, x) = N \partial_x^2 \psi_0^{int}(t, x) - M \partial_x \psi_0^{int}(t, x) + \partial_x^2 \psi_1^{int}(t, x) - \partial_t \psi_1^{int}(t, x).$$

En ce qui concerne les "correcteurs", l'évolution en temps n'apparaît qu'à l'ordre ϵ^2 . Ainsi, les deux premiers termes sont inchangés. Cependant, lorsque l'on calcule les termes suivants ψ_i^{cor} (où $i \geq 2$), il faut rajouter au membre de droite le terme $\partial_t \psi_{i-2}^{cor}$.

Existence de ces fonctions.

Dans la suite, nous utilisons pour f uniquement des fonctions \mathcal{C}^∞ en temps et en espace. Nous avons donc l'existence de toutes les fonctions "intérieures" et de tous les "correcteurs".

Nous connaissons donc maintenant les équations vérifiées par les premiers termes de la solution de l'équation avec topographie et évolution en temps. Le but du paragraphe suivant est de comparer les systèmes obtenus pour les équations avec et sans topographie, et de donner les termes qui permettraient d'exprimer la dépendance par rapport au fond oscillant. On voudrait ainsi, à partir de la solution avec fond plat, se rapprocher de l'équation avec topographie variable à un ordre donné en ϵ (strictement inférieur à 3, puisque l'on s'est arrêté à l'ordre 2 pour le calcul des fonctions intérieures).

Modification des termes obtenus avec un fond plat pour tenir compte d'un fond oscillant.

Dans ce paragraphe, on note ψ la solution avec un fond plat ($b \equiv 0$), c'est à dire la solution de l'équation (7.1). On décompose ψ en :

$$\begin{aligned} \psi(t, x, X) = & \psi_0^{int}(t, x) + \psi_0^{cor}(t, X) + \epsilon \psi_1^{int}(t, x) + \epsilon \psi_1^{cor}(t, X) + \\ & \epsilon^2 \psi_2^{int}(t, x) + \epsilon^2 \psi_2^{cor}(t, X) + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

On rappelle que les équations vérifiées par les ψ_i^{int} sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_x \psi_0^{int}(t, x) = -f(t, x), \\ \psi_0^{int}(t, x = 1) = 0, \\ \psi_0^{int}(t = 0, x) = 0, \end{cases} \quad \forall i \geq 1 \quad \begin{cases} \partial_x \psi_i^{int}(t, x) = \partial_t \psi_{i-1}^{int}(t, x) - \partial_x^2 \psi_{i-1}^{int}(t, x), \\ \psi_i^{int}(t, x = 1) = 0, \\ \psi_i^{int}(t = 0, x) = 0; \end{cases}$$

Pour les ψ_i^{cor} , on obtient :

$$\begin{cases} \partial_X^2 \psi_{0,1}^{cor}(t, X) + \partial_X \psi_{0,1}^{cor}(t, X) = 0, \\ \psi_{0,1}^{cor}(t, X = 0) = -\psi_{0,1}^{int}(t, x = 0), \\ \psi_{0,1}^{cor}(t, X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0, \\ \psi_{0,1}^{cor}(t = 0, X) = 0, \end{cases} \quad \forall i \geq 2 \quad \begin{cases} \partial_X^2 \psi_i^{cor}(t, X) + \partial_X \psi_i^{cor}(t, X) = \partial_t \psi_{i-2}^{cor}(t, X), \\ \psi_i^{cor}(t, X = 0) = -\psi_i^{int}(t, x = 0), \\ \psi_i^{cor}(t, X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0, \\ \psi_i^{cor}(t = 0, X) = 0. \end{cases}$$

On considère également $\tilde{\psi}$ solution de l'équation avec fond oscillant :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\psi}(t, x) - \partial_x^2 \tilde{\psi}(t, x) + b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_x \tilde{\psi}(t, x) - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \tilde{\psi}(t, x) &= \frac{1}{\epsilon} f(t, x), \\ \tilde{\psi}(t, x = 0) = \tilde{\psi}(t, x = 1) &= 0, \\ \tilde{\psi}(t = 0, x) &= 0. \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{\psi}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(t, x, X) = & \tilde{\psi}_0^{int}(t, x, X) + \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X) + \epsilon \tilde{\psi}_1^{int}(t, x, X) + \epsilon \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X) \\ & + \epsilon^2 \tilde{\psi}_2^{int}(t, x, X) + \epsilon^2 \tilde{\psi}_2^{cor}(t, X) + \dots, \end{aligned}$$

où les fonctions "intérieures" sont solutions des équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_x \tilde{\psi}_0^{int}(t, x) = -f(t, x), \\ \tilde{\psi}_0^{int}(t, x = 1) = 0, \\ \tilde{\psi}_0^{int}(t = 0, x) = 0, \end{cases} & \quad \begin{cases} \partial_x \tilde{\psi}_1^{int}(t, x) = \partial_t \tilde{\psi}_0^{int}(t, x) - \partial_x^2 \tilde{\psi}_0^{int}(t, x), \\ \tilde{\psi}_1^{int}(t, x = 1) = 0, \\ \tilde{\psi}_1^{int}(t = 0, x) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \partial_X^2 \tilde{\psi}_2^{int}(t, x, X) + \partial_X \tilde{\psi}_2^{int}(t, x, X) = b(X) \partial_x \tilde{\psi}_0^{int}(t, x) \\ - \partial_x \tilde{\psi}_2^{int}(t, x, 0) = N \partial_x^2 \tilde{\psi}_0^{int}(t, x) - M \partial_x \tilde{\psi}_0^{int}(t, x) + \partial_x^2 \tilde{\psi}_1^{int}(t, x) - \partial_t \tilde{\psi}_1^{int}(t, x), \\ \tilde{\psi}_2^{int}(t, x = 1, X) = 0, \\ \tilde{\psi}_2^{int}(t = 0, x, X) = 0. \end{cases} & \end{aligned}$$

En ce qui concerne les correcteurs, on a vu qu'ils vérifient :

$$\begin{cases} \partial_X^2 \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X) + \partial_X \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X) = 0, \\ \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X = 0) = -\tilde{\psi}_0^{int}(t, x = 0), \\ \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0, \\ \tilde{\psi}_0^{cor}(t = 0, X) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_X^2 \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X) + \partial_X \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X) = b(X) \partial_X \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X), \\ \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X = 0) = -\tilde{\psi}_1^{int}(t, x = 0), \\ \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0, \\ \tilde{\psi}_1^{cor}(t = 0, X) = 0, \end{cases}$$

$$\forall i \geq 2 \quad \begin{cases} \partial_X^2 \tilde{\psi}_i^{cor}(t, X) + \partial_X \tilde{\psi}_i^{cor}(t, X) = b(X) \partial_X \tilde{\psi}_{i-1}^{cor}(t, X) + \partial_t \tilde{\psi}_{i-2}^{cor}(t, X), \\ \tilde{\psi}_i^{cor}(t, X = 0) = -\tilde{\psi}_i^{int}(t, x = 0), \\ \tilde{\psi}_i^{cor}(t, X) \xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0, \\ \tilde{\psi}_i^{cor}(t = 0, X) = 0. \end{cases}$$

On voudrait connaître les termes à rajouter à ψ pour obtenir une approximation à tout ordre (strictement inférieur à 3) de $\tilde{\psi}$.

On remarque que les deux développements sont égaux à l'ordre principal, et à l'ordre suivant à l'intérieur. Nous devons donc calculer les différences entre $\tilde{\psi}_i^{int}$ et ψ_i^{int} pour $i \geq 2$ et entre $\tilde{\psi}_i^{cor}$ et ψ_i^{cor} pour $i \geq 1$.

Modification à l'ordre 1. Les termes ne diffèrent que sur la couche limite.

Notons $\phi_1(t, X) = \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X) - \psi_1^{cor}(t, X)$. Cette fonction est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \partial_X^2 \phi_1(t, X) + \partial_X \phi_1(t, X) &= b(X) \partial_X \tilde{\psi}_0^{cor}(t, X) = b(X) \left(\int_0^1 f(t, s) \, ds \right) \exp(-X), \\ \phi_1(t, X = 0) &= 0, \\ \phi_1(t, X) &\xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre ce système pour avoir le terme d'ordre 1 à rajouter à ψ pour tenir compte d'un fond oscillant.

Modification à l'ordre 2. En revanche, à l'ordre 2, les "correcteurs" ainsi que les fonctions "intérieures" sont différents ; il y a donc un terme sur la couche limite et un terme sur l'intérieur.

- Sur la couche limite : on note $\phi_{2CL}(t, X) = \tilde{\psi}_2^{cor}(t, X) - \psi_2^{cor}(t, X)$ la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_X^2 \phi_{2CL}(t, X) + \partial_X \phi_{2CL}(t, X) &= b(X) \partial_X \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X), \\ \phi_{2CL}(t, X = 0) &= \tilde{\psi}_2^{cor}(t, X = 0) - \psi_2^{cor}(t, X = 0), \\ \phi_{2CL}(t, X) &\xrightarrow[X \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Notons que l'on sait calculer $\partial_X \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X)$ en fonction des données du problème :

$$\begin{aligned} \partial_X \tilde{\psi}_1^{cor}(t, X) &= e^{-X} \int_0^1 f(t, s) \, ds \left[\int_0^X b(s) \, ds - \int_0^{+\infty} e^{-y} \int_0^y b(s) \, ds \, dy \right] \\ &\quad + e^{-X} (f(t, 1) - f(t, 0)). \end{aligned}$$

On obtient donc une expression du terme à rajouter sur la couche limite à l'ordre 2.

- A l'intérieur : la différence entre les deux solutions est notée ϕ_{2int} :

$$\phi_{2int}(t, x, X) = \tilde{\psi}_2^{int}(t, x, X) - \psi_2^{int}(t, x, X).$$

Cette fonction est périodique en X .

On peut définir une fonction G sur $[0, +\infty[$, périodique de période P , solution du système :

$$\partial_X^2 G(X) + \partial_X G(X) = b(X),$$

$$G(0) = G(P) = 0.$$

Cette fonction permet d'écrire ϕ_{2int} en séparant les variables :

$$\phi_{2int}(t, x, X) = \partial_x \psi_0^{int}(t, x) G(X) + E(t, x) = -f(t, x) G(X) + E(t, x),$$

$$\text{avec } \begin{cases} \partial_x E(t, x) = \overline{G(X)}^X \partial_x f(t, x) - \overline{b(X) \partial_X G(X)}^X f(t, x), \\ E(t, 1) = f(t, 1) G\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \end{cases}$$

On peut ainsi calculer le terme à rajouter pour modifier l'intérieur à l'ordre 2.

On pourrait de même calculer les termes à rajouter aux ordres supérieurs, mais les résultats ci-dessus permettent déjà d'obtenir une approximation d'ordre 2 en ϵ .

Pour valider cette modification et ainsi tenir compte du fond oscillant, on réalise une première série d'expériences sur l'équation avec évolution en temps mais où f ne dépend que de x : on calcule en différences finies la solution avec fond plat ψ et la solution avec fond oscillant $\tilde{\psi}$. Le calcul est long (plusieurs heures) car la condition de stabilité $dt \leq 2dx^2\epsilon^2/(4\epsilon^2 + dx^2)$ est contraignante. Ensuite, on compare les résultats obtenus en ajoutant à ψ les termes ϕ_1 , ϕ_{2CL} et ϕ_{2int} pour tenir compte du fond variable.

Programmation pour vérifier les termes de fond.

Le programme réalisé pour cette partie s'appuie sur le précédent. On distingue deux parties principales : un programme **Fond.f** qui appelle les routines de **FondRoutines.f**. Après avoir défini et initialisé les différents éléments, on calcule la fonction G puis on fait une boucle en temps où on obtient une solution approchée (ψ ou $\tilde{\psi}$ suivant que le fond est défini à 0 ou égal à b). On utilise comme critère d'arrêt soit un temps maximal, soit, si f ne dépend pas du temps, on regarde à partir de quel moment la solution est presque stationnaire. Ensuite, on ajoute les ϕ_i , qui ne sont calculés que pour le temps final, et on écrit le tout dans un fichier **.xg**.

Le calcul de la fonction G utilise la décomposition LU, et les approximations des dérivées sont à l'ordre 2. Comme G doit être périodique, il est nécessaire d'avoir un pas d'espace constant sur tout le domaine de calcul. Les fonctions obtenues ont été validées pour trois fonds différents en les comparant avec les résultats théoriques que l'on peut obtenir avec l'aide de Maple, en calculant les expressions des différentes intégrales (voir Figure 8.1). On renvoie également la moyenne de G ainsi que la moyenne de $b \partial_X G$, calculées par la méthode des trapèzes.

La solution approchée, ψ ou $\tilde{\psi}$, est obtenue, pour l'instant, en discrétilisant l'équation avec des différences finies à l'ordre 2.

Le terme dû au fond sur la couche limite ($\phi_1 + \phi_{2CL}$) est calculé avec la méthode LU et des différences finies centrées. A l'ordre 1, il n'y a pas de problème. En revanche, pour l'ordre 2, il

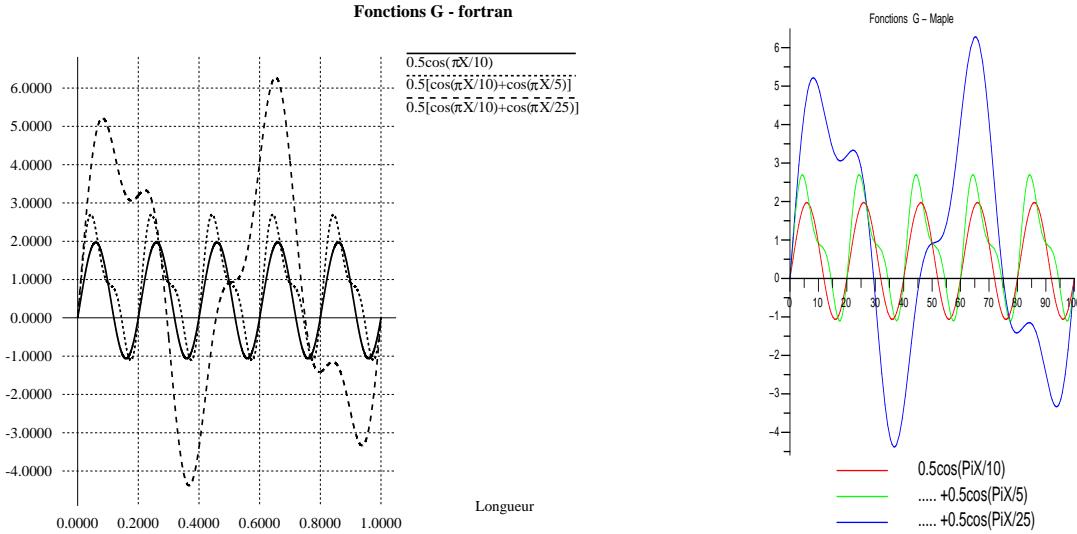


FIG. 8.1 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, les fonctions G obtenues avec le calcul en fortran et par Maple, pour trois bathymétries différentes.

est nécessaire de connaître $\partial_x \widetilde{\psi_1^{cor}}$. Ici, il a préalablement été calculé à la main puisqu'il n'est pas disponible dans le programme. Dans la suite, nous utilisons plutôt la décomposition de $\widetilde{\psi}$ en série de termes "intérieurs" et "correcteurs" et ce problème n'existe plus.

Enfin le correcteur à l'intérieur à l'ordre 2 est obtenu à partir de G et de E , ce dernier étant calculé avec des différences finies à l'ordre 1.

Résultats obtenus avec les termes de fond.

Pour réaliser les graphiques suivants, nous avons calculé la solution ψ avec un fond plat, par la méthode des différences finies. Ensuite, avec la même méthode, nous avons calculé $\widetilde{\psi}$. Nous avons alors modifié ψ pour tenir compte du fond oscillant : tout d'abord, une correction à l'ordre 1, en ajoutant uniquement ϕ_1 , et enfin une meilleure correction, à l'ordre 2, en ajoutant ϕ_1 , ϕ_{2CL} et ϕ_{2int} .

Les trois courbes qui sont présentées Figures 8.2 à 8.4 représentent, pour $f(t, x) = x$, les différences

- entre ψ et $\widetilde{\psi}$,
- entre $\psi + \epsilon\phi_1$ et $\widetilde{\psi}$,
- et entre $\psi + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_{2CL} + \epsilon^2\phi_{2int} = \psi + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2$ et $\widetilde{\psi}$.

On s'attend donc à obtenir des valeur de l'ordre de ϵ^2 dans le second cas, et de l'ordre de ϵ^3 pour le troisième tracé.

On étudie trois cas : b vaut successivement

- $1/2 \cos(\pi X/10)$ (Fig. 8.2),
- puis $1/2 \cos(\pi X/10) + 1/2 \cos(\pi X/5)$ (Fig. 8.3),
- et enfin $1/2 \cos(\pi X/10) + 1/2 \cos(\pi X/25)$ (Fig. 8.4).

On remarque que, dans chaque exemple, la différence entre la solution obtenue directement avec le fond et la solution avec fond plat modifié est bien de l'ordre attendu en ϵ .

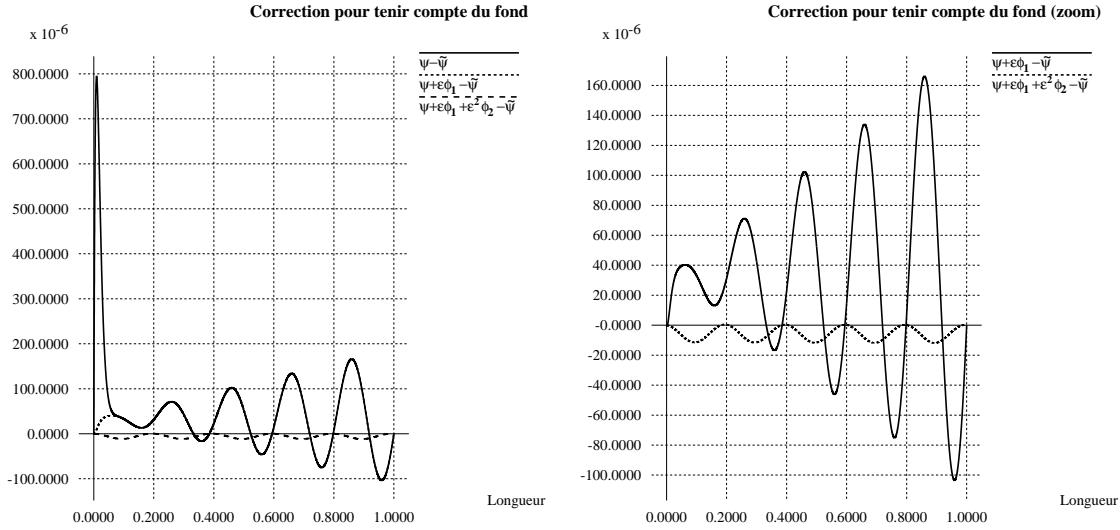


FIG. 8.2 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, $dt = 10^{-9}$ et $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10)$: différence entre la fonction ψ calculée avec le fond oscillant et la fonction avec fond plat modifiée. Les calculs de ψ et $\tilde{\psi}$ sont réalisés avec les différences finies dans les deux cas.

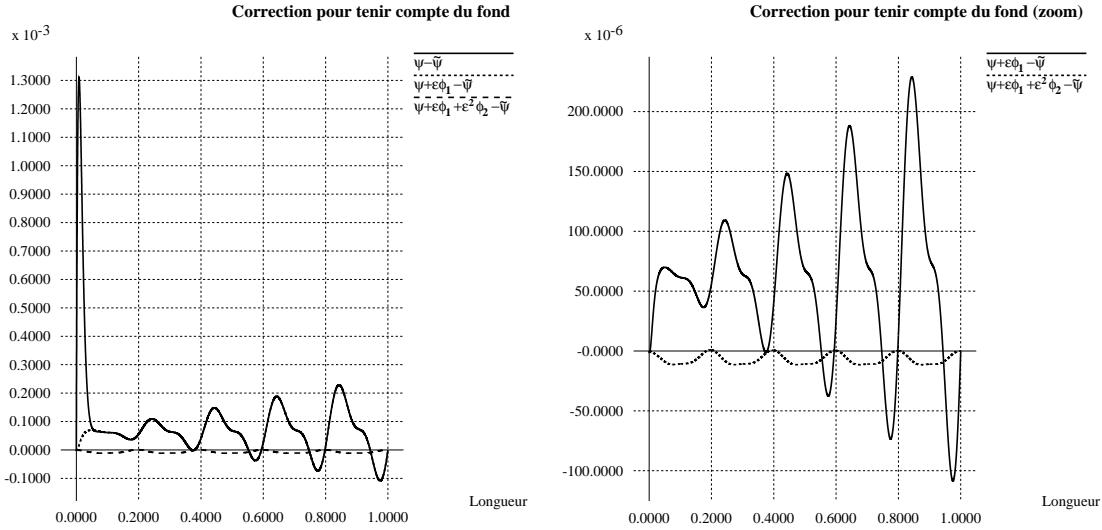


FIG. 8.3 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, $dt = 10^{-9}$ et $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10) + 1/2 \cos(\pi X/5)$: différence entre la fonction $\tilde{\psi}$ calculée avec le fond oscillant et la fonction avec fond plat modifiée. Les calculs de ψ et $\tilde{\psi}$ sont réalisés avec les différences finies dans les deux cas.

Remarque 8.1. La courbe de la différence $\psi - \tilde{\psi}$ représente l'effet de la topographie. Comme nous pouvions nous y attendre, nous observons une oscillation comparable au fond choisi sur l'ensemble du domaine. Cependant, nous pouvons également noter une influence très grande de ce terme sur la couche limite, ce qui est plus inattendu.

Cette partie étant donc validée, on remplace le calcul de la solution avec fond plat en différences finies par le développement en série. La solution de référence avec fond oscillant $\tilde{\psi}$

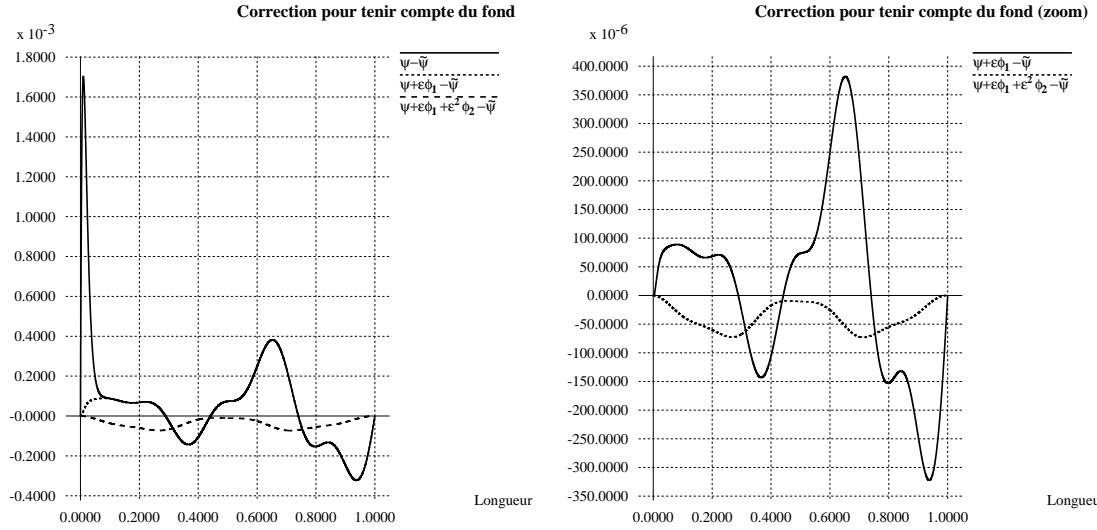


FIG. 8.4 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, $dt = 10^{-9}$ et $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10) + 1/2 \cos(\pi X/25)$: différence entre la fonction $\tilde{\psi}$ calculée avec le fond oscillant et la fonction avec fond plat modifiée. Les calculs de ψ et $\tilde{\psi}$ sont réalisés avec les différences finies dans les deux cas.

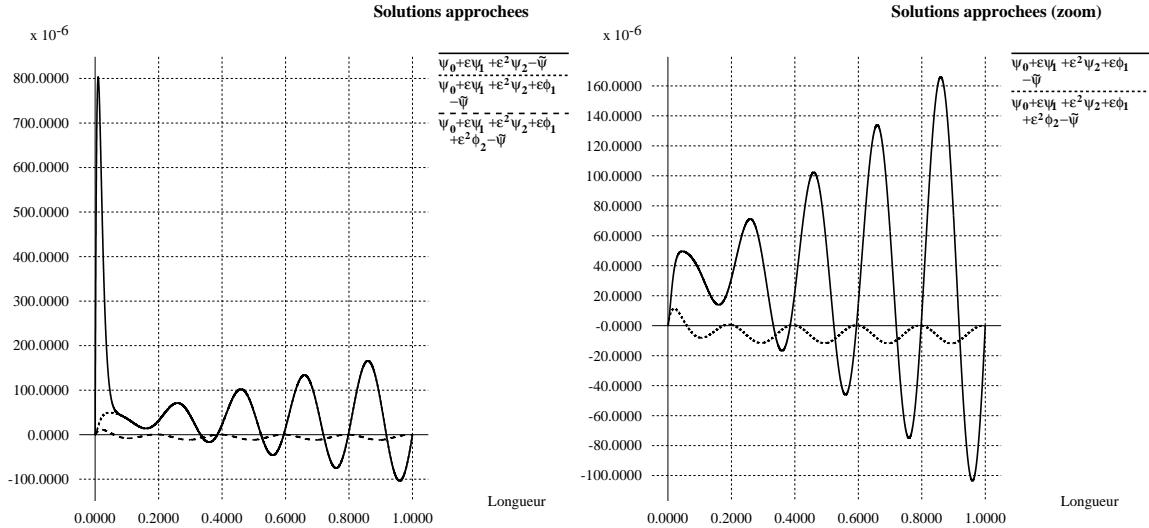


FIG. 8.5 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, $dt = 10^{-4}$ et $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10)$: différence entre la fonction $\tilde{\psi}$ calculée avec le fond oscillant et la fonction ψ approchée par développement asymptotique, modifiée pour tenir compte de la topographie.

reste inchangée, obtenue avec les différences finies ; elle ne sert qu'à comparer les résultats.

Programmation de la méthode complète.

Maintenant que l'on sait comment modifier la solution avec fond plat pour faire intervenir le fond oscillant, on peut calculer la solution de l'équation (7.1) avec la méthode des développements asymptotiques. On modifie les routines dans `FondRoutines_ic.f` en rajou-

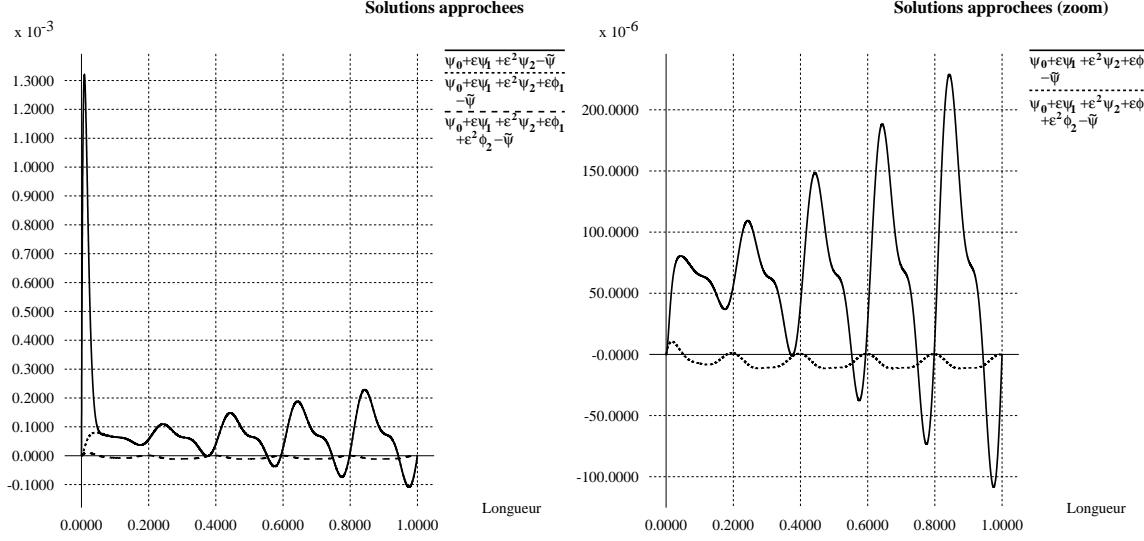


FIG. 8.6 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, $dt = 10^{-4}$ et $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10) + 1/2 \cos(\pi X/5)$: différence entre la fonction $\tilde{\psi}$ calculée avec le fond oscillant et la fonction ψ approchée par développement asymptotique, modifiée pour tenir compte de la topographie.

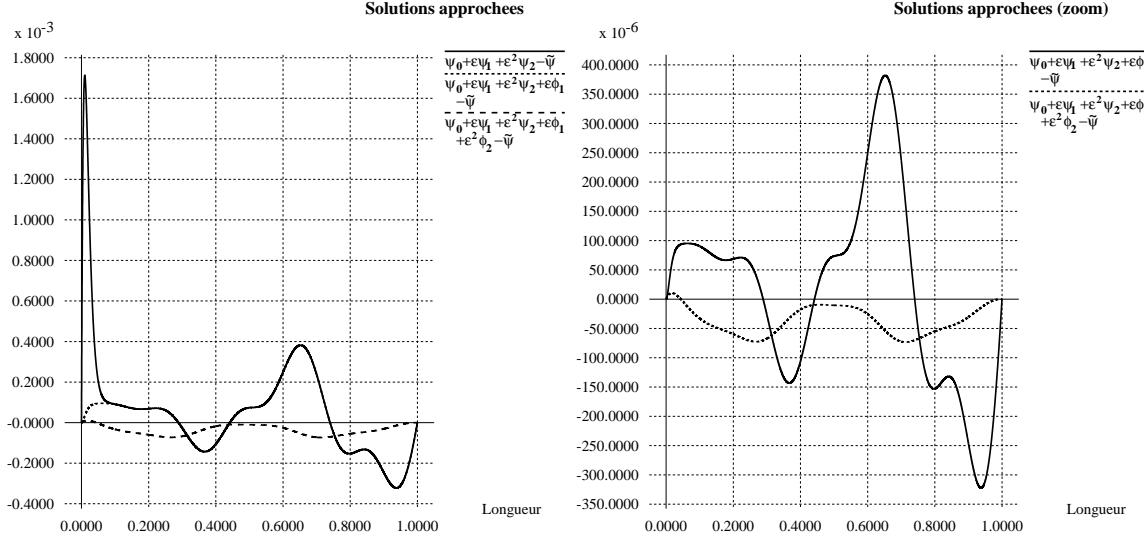


FIG. 8.7 – Pour $\epsilon = 0.01$, $dx = 10^{-4}$, $dt = 10^{-4}$ et $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10) + 1/2 \cos(\pi X/25)$: différence entre la fonction $\tilde{\psi}$ calculée avec le fond oscillant et la fonction ψ approchée par développement asymptotique, modifiée pour tenir compte de la topographie.

tant le calcul des ψ_i^{int} et ψ_i^{cor} dans une routine *calculapp*. Comme signalé auparavant, on change aussi le programme du calcul de ϕ_{2CL} : on n'a plus besoin de faire le calcul de $\partial_X \tilde{\psi}_1^{cor}$ à l'avance, on écrit ce terme sous la forme $\partial_X (\psi_1^{cor} + \phi_1)$, où ψ_1^{cor} est désormais connu. Celà permet d'avoir la même formule quel que soit le fond. Pour le reste, on réutilise le programme précédent.

Résultats de la méthode complète.

On se place dans les mêmes cas que les exemples précédents et on trace les résultats Figures 8.5 à 8.7. Là encore, on arrive à se rapprocher de la solution avec fond oscillant à partir de la solution avec fond plat, à l'ordre ϵ ou ϵ^2 .

Nous avons donc une méthode de calcul efficace qui permet de tracer la solution de l'équation (8.2) avec fond plat. Nous sommes ensuite capables de modifier cette fonction pour obtenir la solution de l'équation (8.2) avec un fond quelconque. Cette résolution est rapide et permet de s'approcher à l'ordre voulu de la solution donnée par les différences finies.

8.1.3 Une seconde étude : fond d'ordre ϵ^{-1} .

On considère le cas où le fond s'écrit $\partial_x \eta_B(x) = \frac{1}{\epsilon} b\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. L'équation (8.1) devient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi - \partial_x^2 \psi + \frac{1}{\epsilon} b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \partial_x \psi - \frac{1}{\epsilon} \partial_x \psi &= \frac{1}{\epsilon} f(x, t), \\ \psi(x=0) = \psi(x=1) &= 0, \\ \psi(t=0) &= 0, \end{aligned} \tag{8.6}$$

où la fonction b est périodique de période P et de moyenne nulle.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux solutions stationnaires, en supposant donc que f ne dépend pas du temps.

Résolution théorique en stationnaire et tracés avec Maple.

On peut calculer la solution stationnaire théorique de l'équation (8.6). En effet, la solution générale de l'équation

$$-\Psi'(x) + \frac{1}{\epsilon} \left(b\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - 1 \right) \Psi(x) = \frac{1}{\epsilon} f(x),$$

sans second membre est donnée par

$$\Psi(x) = A \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^x \left(b\left(\frac{u}{\epsilon}\right) - 1 \right) du \right).$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on trouve

$$A(x) = -\frac{1}{\epsilon} \left[\int_0^x f(y) \exp \left(-\frac{1}{\epsilon} \int_0^y \left(b\left(\frac{u}{\epsilon}\right) - 1 \right) du \right) dy + c^\epsilon \right],$$

où c^ϵ est une constante à déterminer avec les conditions au bord.

Ainsi, on obtient ψ comme la primitive de Ψ qui s'annule en 0 :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{\epsilon} \int_0^x \left[\int_0^y f(z) \exp \left(-\frac{1}{\epsilon} \int_0^z \left(b\left(\frac{u}{\epsilon}\right) - 1 \right) du \right) dz + c^\epsilon \right] \\ &\quad \left[\exp \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^y \left(b\left(\frac{z}{\epsilon}\right) - 1 \right) dz \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Reste à calculer c^ϵ . On doit avoir $\psi(1) = 0$ donc :

$$\int_0^1 \left[\int_0^y f(z) \exp \left(-\frac{1}{\epsilon} \int_0^z \left(b\left(\frac{u}{\epsilon}\right) - 1 \right) du \right) dz + c^\epsilon \right] \left[\exp \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^y \left(b\left(\frac{z}{\epsilon}\right) - 1 \right) dz \right) \right] dy = 0,$$

d'où :

$$c^\epsilon = - \frac{\int_0^1 \left[\int_0^y f(z) \exp \left(-\frac{1}{\epsilon} \int_0^z \left(b\left(\frac{u}{\epsilon}\right) - 1 \right) du \right) dz \right] \left[\exp \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^y \left(b\left(\frac{z}{\epsilon}\right) - 1 \right) dz \right) \right] dy}{\int_0^1 \left[\exp \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^y \left(b\left(\frac{z}{\epsilon}\right) - 1 \right) dz \right) \right] dy}.$$

Nous avons donc l'expression de la solution stationnaire théorique.

Nous pouvons visualiser l'allure des courbes en fonction de f et b en traçant cette fonction sous Maple. Par exemple, pour $f(x) = x$ et $f(x) = 1$, $b(x) = 1/2 \cos(x/2)$, et $\epsilon = 0.01$, on obtient la Figure 8.8. Il faut compter 1 à 2 minutes de calcul pour chaque courbe.

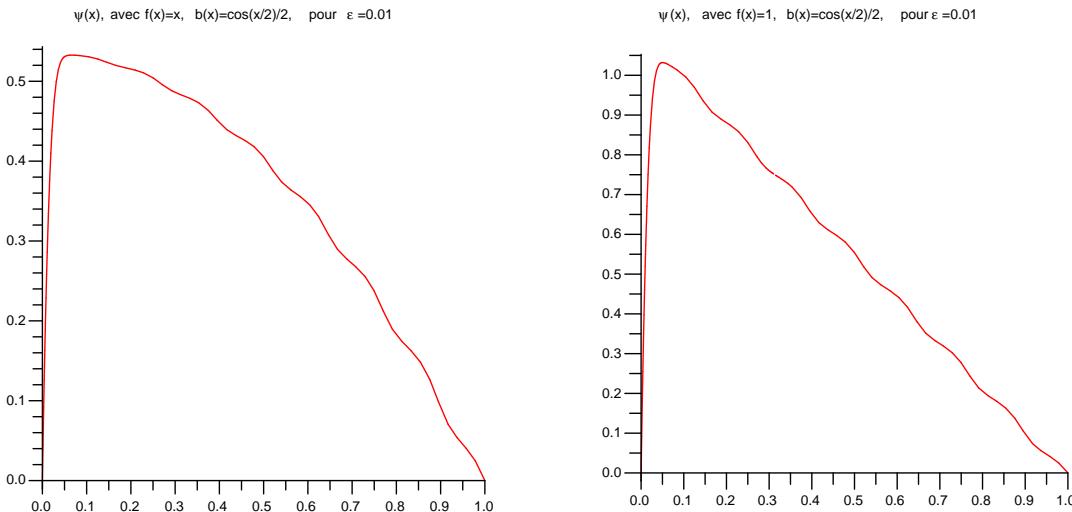


FIG. 8.8 – Solutions obtenues avec Maple pour $f(x) = x$ et $f(x) = 1$, $b(x) = 1/2 \cos(x/2)$, et $\epsilon = 0.01$.

Résolution numérique en stationnaire.

Nous ne pouvons pas résoudre l'équation (8.6) avec les développements asymptotiques que nous avons utilisés précédemment puisqu'on ne peut pas fermer les systèmes obtenus sur les ψ_i .

Nous proposons donc ici une autre méthode pour obtenir de bons résultats numériquement, sans avoir trop de contraintes sur le pas d'espace.

Nous allons modifier l'équation (8.6) en posant $X = x/\epsilon$ et en enlevant l'évolution en temps. On obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon^2} d_X^2 \psi + \frac{1}{\epsilon^2} b(X) \psi'(X) - \frac{1}{\epsilon^2} \psi'(X) &= \frac{1}{\epsilon} f(X\epsilon), \\ \psi(X = 0) = \psi(X = \frac{1}{\epsilon}) &= 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Etude du cas où $f(x) = x$. Si $f(x) = x$, l'équation (8.7) se réécrit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon^2} d_X^2 \psi + \frac{1}{\epsilon^2} b(X) \psi'(X) - \frac{1}{\epsilon^2} \psi'(X) &= X, \\ \psi(X = 0) = \psi(X = \frac{1}{\epsilon}) &= 0. \end{aligned}$$

On peut alors faire le changement de variable $\phi(X) = \psi(X)/\epsilon^2$ pour avoir :

$$\begin{aligned} -\phi''(X) + (b(X) - 1) \phi'(X) &= X, \\ \phi(X = 0) = \phi(X = \frac{1}{\epsilon}) &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc programmer la résolution de cette dernière équation avec la méthode LU, multiplier le résultat par ϵ^2 et faire le changement de variable inverse (passer de l'échelle rapide à l'échelle lente).

Pour un pas d'espace de 10^{-3} (en x), en quelques centièmes de secondes, nous obtenons la Figure 8.9. Ce résultat semble correct par rapport à la solution théorique.

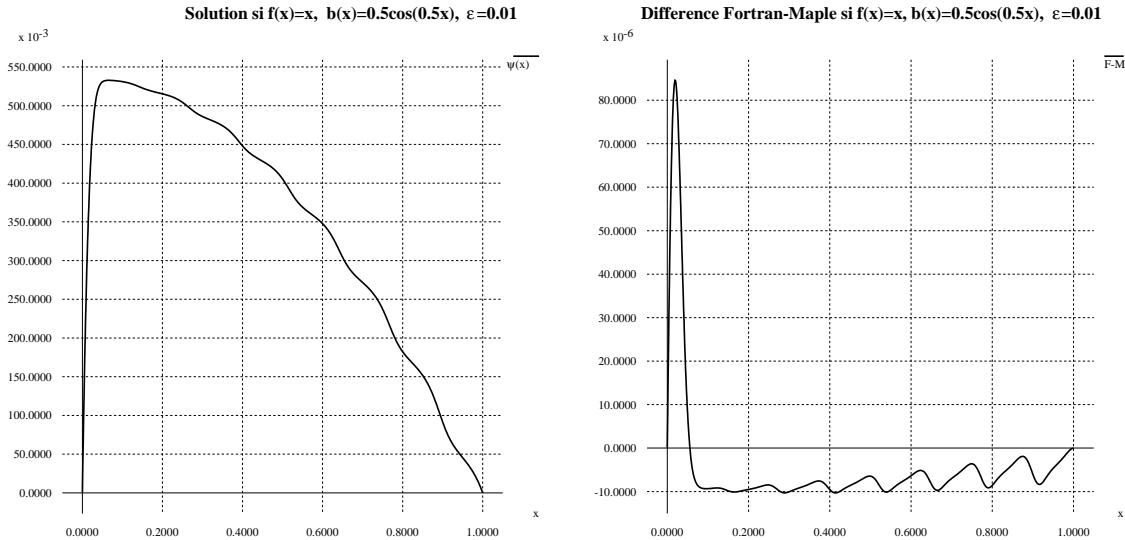


FIG. 8.9 – Solution obtenue avec Fortran pour $f(x) = x$, $b(x) = 1/2 \cos(x/2)$, et $\epsilon = 0.01$, et comparaison avec la solution donnée par Maple.

Regardons ce que donne cette méthode dans le cas où f est la fonction constante égale à 1.

Etude du cas où $f(x) = 1$. On utilise le même mode opératoire que précédemment ; on peut donc réécrire l'équation (8.7) :

$$-\frac{1}{\epsilon^2} d_X^2 \psi + \frac{1}{\epsilon^2} b(X) \psi'(X) - \frac{1}{\epsilon^2} \psi'(X) = \frac{1}{\epsilon},$$

$$\psi(X = 0) = \psi(X = \frac{1}{\epsilon}) = 0.$$

La forme de l'équation étant différente, on fait ici le changement de variable $\phi(X) = \psi(X)/\epsilon$ pour avoir :

$$-\phi''(X) + (b(X) - 1) \phi'(X) = 1,$$

$$\phi(X = 0) = \phi(X = \frac{1}{\epsilon}) = 0.$$

A nouveau, on peut programmer la résolution de cette équation pour obtenir la Figure 8.10, qui coïncide bien avec le résultat 8.8 donné par Maple.

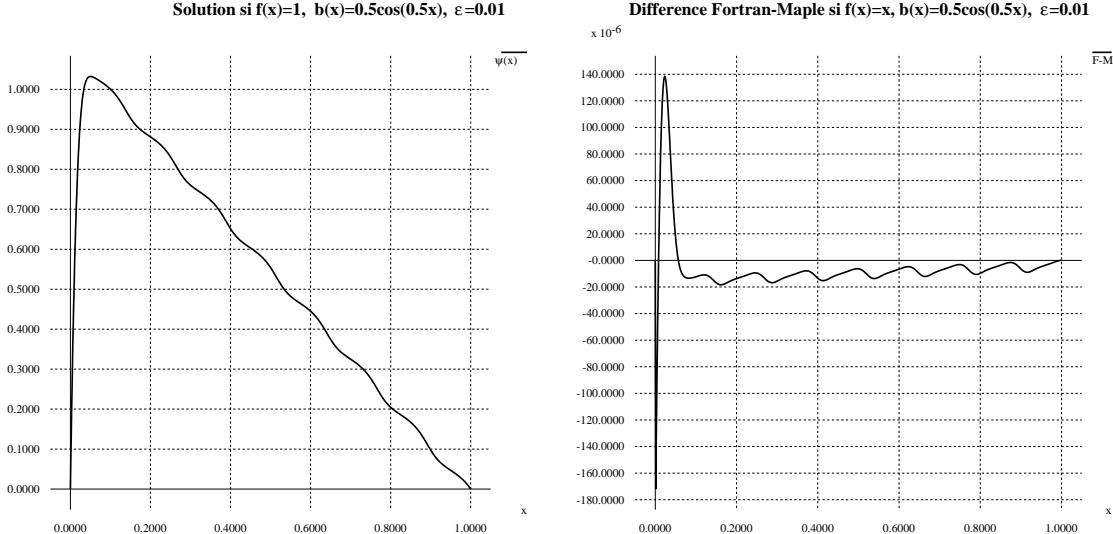


FIG. 8.10 – Solution obtenue avec Fortran pour $f(x) = 1$, $b(x) = 1/2 \cos(x/2)$, et $\epsilon = 0.01$, et comparaison avec la solution donnée par Maple.

Résolution numérique avec évolution en temps.

Il s'agit de réaliser des changements de variables similaires à ceux que nous venons d'effectuer mais sur l'équation avec évolution en temps.

On réécrit l'équation (8.6) en posant $X = x/\epsilon$ et $T = t/\epsilon^2$:

$$\frac{1}{\epsilon^2} \partial_T \psi - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X^2 \psi + \frac{1}{\epsilon^2} b(X) \partial_X \psi - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X \psi = \frac{1}{\epsilon} f(X\epsilon, T\epsilon^2),$$

$$\psi(X = 0) = \psi(X = \frac{1}{\epsilon}) = 0,$$

$$\psi(T = 0) = 0.$$
(8.8)

Etude du cas où $f(x) = x$. L'équation (8.8) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \partial_T \psi - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X^2 \psi + \frac{1}{\epsilon^2} b(X) \partial_X \psi - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X \psi &= X, \\ \psi(X = 0) &= \psi\left(X = \frac{1}{\epsilon}\right) = 0, \\ \psi(T = 0) &= 0. \end{aligned}$$

On peut alors faire le changement de variable $\phi(X, T) = \psi(X, T)/\epsilon^2$ pour avoir :

$$\begin{aligned} \partial_T \phi - \partial_X^2 \phi + (b(X) - 1) \partial_X \phi &= X, \\ \phi(X = 0) &= \phi\left(X = \frac{1}{\epsilon}\right) = 0, \\ \phi(T = 0) &= 0. \end{aligned}$$

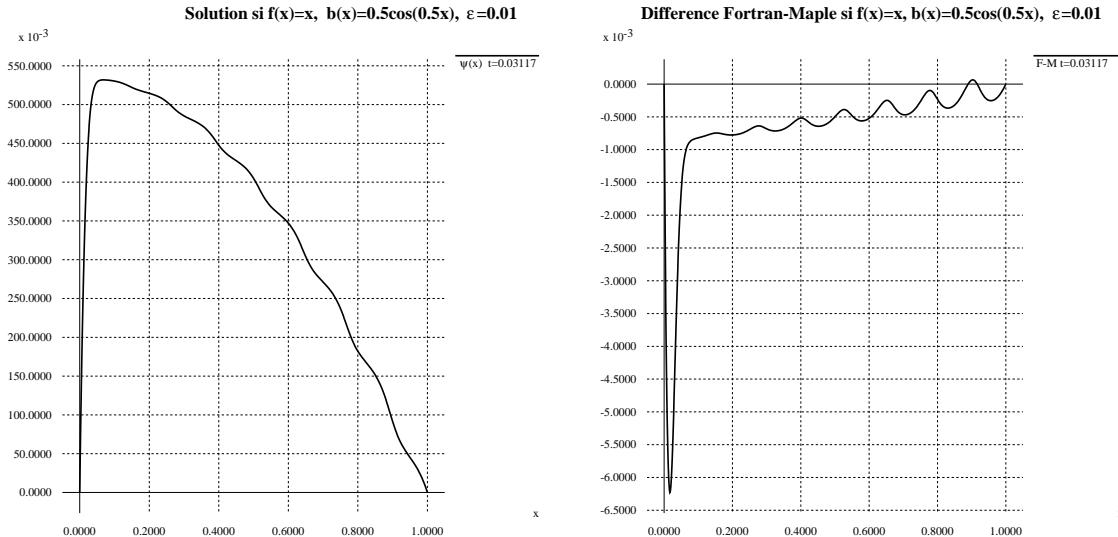


FIG. 8.11 – Solution obtenue avec Fortran, en utilisant le schéma avec évolution en temps, pour $f(x) = x$, $b(x) = 1/2 \cos(x/2)$, et $\epsilon = 0.01$, et comparaison avec la solution donnée par Maple.

On programme la résolution de ce système avec les schémas habituels de différences finies décentrées. On garde la même expression pour le fond que lors des tests sur l'équation stationnaire. On prend encore un pas d'espace de 10^{-3} en x (le pas de temps nous est alors imposé par la condition $dT \leq dX^2 ((1 + \max(|b|)) dX + 2)^{-1}$ qui assure la stabilité du schéma : $dT = 10^{-7} * \epsilon^{-2}$, $dt = 10^{-7}$). On fixe un critère d'arrêt : soit le temps maximal est atteint, soit la solution est presque stationnaire, c'est-à-dire qu'entre 100 itérations, la norme L^2 a été modifiée de moins de 10^{-8} . En quelques secondes, on obtient un résultat comparable à ceux trouvés précédemment avec l'équation stationnaire (Figure 8.11).

Etude du cas où $f(x) = x \sin(\epsilon^2/t)$. On obtient alors à partir de l'équation (8.8) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon^2} \partial_T \psi - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X^2 \psi + \frac{1}{\epsilon^2} b(X) \partial_X \psi - \frac{1}{\epsilon^2} \partial_X \psi &= X \sin\left(\frac{1}{T}\right), \\ \psi(x=0) &= \psi(x=1) = 0, \\ \psi(t=0) &= 0, \end{aligned} \tag{8.9}$$

On effectue le changement de variable $\phi(X, T) = \psi(X, T)/\epsilon^2$ et on arrive à :

$$\begin{aligned} \partial_T \phi - \partial_X^2 \phi + (b(X) - 1) \partial_X \phi &= X \sin\left(\frac{1}{T}\right), \\ \phi(X=0) &= \phi\left(X=\frac{1}{\epsilon}\right) = 0, \\ \phi(T=0) &= 0. \end{aligned}$$

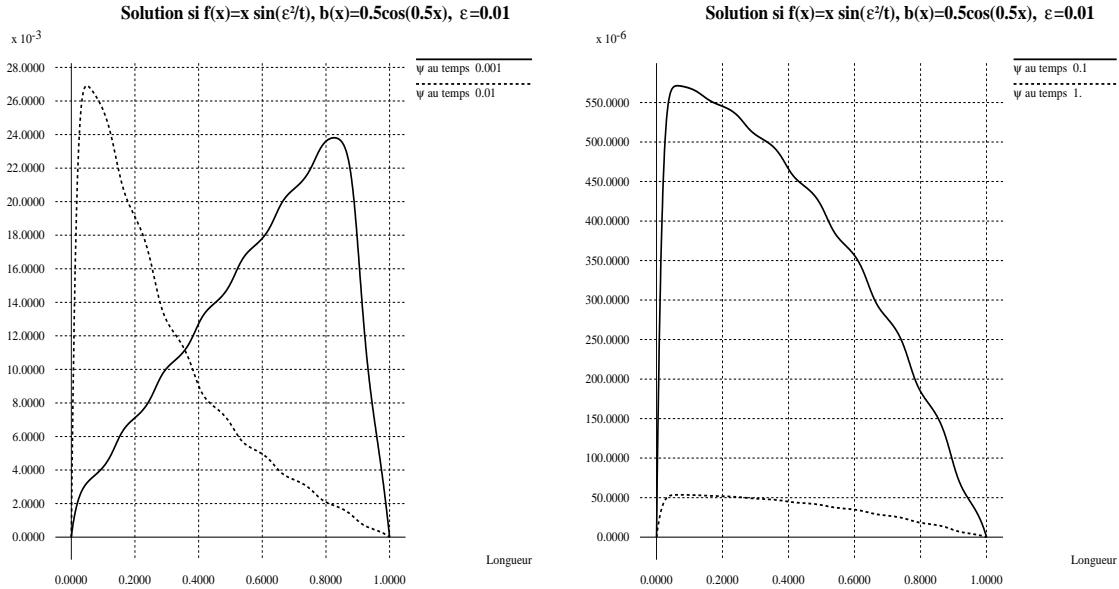


FIG. 8.12 – Solution obtenue avec Fortran, en utilisant le schéma avec évolution en temps, dans le cas où $f(x) = x \sin(\epsilon^2/t)$, $b(x) = 1/2 \cos(x/2)$, et $\epsilon = 0.01$.

Les résultats obtenus sont donnés par la Figure 8.12. On n'a pas changé les valeurs des pas d'espace et de temps par rapport aux cas précédents.

On observe tout d'abord une montée de la solution identiquement nulle vers la solution de l'équation, puis une oscillation en temps due à la formule choisie pour f .

Nous avons désormais montré sur l'équation simplifiée en une dimension la validité de notre méthode qui repose sur les développements asymptotiques. Nous passons alors à l'étude de l'équation Quasi-Geostrophique en deux dimensions qui a été introduite au Chapitre 6.

8.2 Passage en deux dimensions.

Nous étudions, dans cette partie, une équation en deux dimensions de type Quasi-Géostrophique, sans évolution en temps (pour plus de clarté dans les notations, nous choisissons d'utiliser ici les variables d'espace x et y). On cherche $\psi(x, y)$ solution de :

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta^2 \psi + J(\psi, \epsilon^2 \Delta \psi + b(\frac{x}{\epsilon}, y) + \beta y) = \beta f(x, y) & \text{sur } \mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1], \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}, \\ \Delta \psi = 0 & \text{sur } \partial \mathcal{D}, \end{cases} \quad (8.10)$$

où J est le jacobien défini par $J(f, g) = \partial_x f \partial_y g - \partial_y f \partial_x g$, b est une fonction périodique, de moyenne nulle (elle représente la topographie) et enfin $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$. On veillera à ce que, pour x variant entre 0 et 1, $b(x/\epsilon)$ ait un nombre entier de périodes. On prendra une fonction f nulle sur les bords $[0, 1] \times \{0\}$ et $[0, 1] \times \{1\}$ et qui est à l'ordre principal en ϵ . On choisit également d'étudier le cas $\beta = \epsilon^{-1}$.

8.2.1 Développement asymptotique.

Nous réalisons un développement asymptotique de l'équation (8.10). Pour cela, on note comme précédemment $X = x/\epsilon$.

A l'ordre $1/\epsilon^2$, on obtient l'équation :

$$\begin{cases} -\partial_X^4 \psi_0(x, X, y) + \partial_X \psi_0(x, X, y) = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \partial_X^2 \psi_0(x, X, y) = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1], \\ \psi_0(x, X, y) = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1]. \end{cases}$$

On peut alors décomposer ψ_0 en un terme “intérieur” et un terme “correcteur” :

$$\psi_0(x, X, y) = \psi_0^{int}(x, X, y) + \psi_0^{cor}(X, y),$$

où ψ_0^{int} est telle que $\partial_X^3 \psi_0^{int} - \psi_0^{int}$ soit périodique en X et que ψ_0^{int} s'annule pour $x = 1$. La fonction ψ_0^{cor} est un terme correcteur qui n'a une influence que sur la couche limite et qui doit vérifier $\psi_0^{cor}(0, y) = -\psi_0^{int}(0, 0, y)$.

L'ordre 0 se scinde donc en deux systèmes dont le premier s'écrit :

$$\begin{cases} -\partial_X^4 \psi_0^{int}(x, X, y) + \partial_X \psi_0^{int}(x, X, y) = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \psi_0^{int}(1, y) = 0 & \text{pour } y \in [0, 1], \end{cases}$$

c'est-à-dire que ψ_0^{int} ne dépend pas de X (par périodicité). De plus, pour le correcteur, on a :

$$\begin{cases} -\partial_X^4 \psi_0^{cor}(X, y) + \partial_X \psi_0^{cor}(X, y) = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \partial_X^2 \psi_0^{cor}(X, y) = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1], \\ \psi_0^{cor}(0, y) = -\psi_0^{int}(0, 0, y), & \text{pour } y \in [0, 1] \end{cases} \quad (8.11)$$

ce qui permet de le calculer dès que l'on a le terme intérieur.

On peut même remarquer que la dépendance en y n'est donnée que par le terme $\psi_0^{int}(0, y)$. On pourra donc résoudre le système en X (en remplaçant “ $\psi_0^{int}(0, y)$ ” par “1”) et ensuite multiplier la fonction obtenue par $\psi_0^{int}(0, y)$.

Pour obtenir l'équation vérifiée par $\psi_0^{int}(x, y)$ nous devons maintenant écrire l'équation (8.10) à l'ordre $1/\epsilon$:

$$\begin{cases} -\partial_X^4 \psi_1 - 4\partial_X^3 \partial_x \psi_0 + \partial_X \psi_0 \partial_y \partial_X^2 \psi_0 + \partial_x \psi_0 \\ \quad + \partial_X \psi_1 - \partial_y \psi_0 \partial_X^3 \psi_0 - \partial_y \psi_0 \partial_X b = f & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \partial_X^2 \psi_1 = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1], \\ \psi_1 = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1]. \end{cases}$$

On sépare également ψ_1 en ψ_1^{int} , telle que $\partial_X^3 \psi_1^{int} - \psi_1^{int}$ soit périodique en X , et ψ_1^{cor} , nul presque partout sauf près du bord $\{0\} \times [0, 1]$.

On a alors l'égalité :

$$-\partial_X^4 \psi_1^{int} + \partial_x \psi_0^{int} + \partial_X \psi_1^{int} - \partial_y \psi_0^{int} \partial_X b = f.$$

On calcule la moyenne en X , en utilisant la périodicité de $\partial_X^3 \psi_1^{int} - \psi_1^{int}$ et le fait que ψ_0^{int} ne dépend pas de X . On aboutit à

$$\partial_x \psi_0^{int}(x, y) = f(x, y).$$

Comme on connaît les valeurs $\psi_0^{int}(1, y)$ pour y variant entre 0 et 1, on peut calculer ψ_0^{int} sur \mathcal{D} tout entier :

$$\psi_0^{int}(x, y) = \int_1^x f(s, y) ds.$$

De plus, la variation en X de ψ_1^{int} est donnée par :

$$-\partial_X^4 \psi_1^{int} + \partial_X \psi_1^{int} = \partial_y \psi_0^{int} \partial_X b \quad \text{sur } \mathcal{D},$$

avec $\partial_X^2 \psi_1^{int}$ nulle sur les bords gauche et droit du domaine \mathcal{D} , et ψ_1^{int} nulle en $X = 0$ et $X = 1/\epsilon$.

Ainsi, il nous reste juste à calculer la dépendance en x de ψ_1^{int} , c'est-à-dire calculer la fonction $D(x, y)$ telle que :

$$\psi_1^{int}(x, X, y) = \int_0^X \partial_{\tilde{X}} \psi_1^{int}(x, \tilde{X}, y) d\tilde{X} + D(x, y),$$

et avec $D(1, y)$ permettant d'annuler ψ_1^{int} sur le bord droit du domaine. On calculera D grâce à l'équation (8.10) à l'ordre 1.

On peut encore expliciter le correcteur ψ_1^{cor} , qui doit s'annuler loin de la couche limite et vérifier :

$$\begin{cases} -\partial_X^4 \psi_1^{cor} + \partial_X \psi_1^{cor} = -\partial_X \psi_0^{cor} \partial_y \partial_X^2 \psi_0^{cor} \\ \quad + \partial_y \psi_0^{cor} \partial_X^3 \psi_0^{cor} + \partial_y \psi_0^{int} \partial_X^3 \psi_0^{cor} + \partial_y \psi_0^{cor} \partial_X b & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \partial_X^2 \psi_1^{cor} = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1], \\ \psi_1^{cor}(0, 0, y) = -\psi_1^{int}(0, 0, y) & \text{pour } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Dès que l'on a l'expression de ψ_1^{int} on peut donc connaître ψ_1^{cor} .

Reste donc à expliciter la fonction D pour avoir la solution complète au premier ordre. Pour cela, on développe le système (8.10) à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\partial_X^4 \psi_2 - 4\partial_X^3 \partial_x \psi_1 - 6\partial_X^2 \partial_x^2 \psi_0 - 2\partial_X^2 \partial_y \psi_0 + \partial_x \psi_0 \partial_y \partial_X^2 \psi_0 + \partial_X \psi_1 \partial_y \partial_X^2 \psi_0 \\ \quad + 2\partial_X \psi_0 \partial_y \partial_x \partial_X \psi_0 + \partial_X \psi_0 \partial_y \partial_X^2 \psi_1 + \partial_x \psi_0 \partial_y b + \partial_X \psi_1 \partial_y b + \partial_x \psi_1 \\ \quad + \partial_X \psi_2 - 3\partial_y \psi_0 \partial_x \partial_X^2 \psi_0 - \partial_y \psi_1 \partial_X^3 \psi_0 - \partial_y \psi_0 \partial_X^3 \psi_1 - \partial_y \psi_1 \partial_X b = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \partial_X^2 \psi_2 = -\partial_x^2 \psi_0 - \partial_y^2 \psi_0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1], \\ \psi_2 = 0 & \text{sur } \{0\} \times [0, 1] \text{ et sur } \{1\} \times [0, 1]. \end{array} \right.$$

A nouveau, on écrit l'égalité vérifiée par les fonctions intérieures :

$$\begin{aligned} -\partial_X^4 \psi_2^{int} - 4\partial_X^3 \partial_x \psi_1^{int} + \partial_x \psi_0^{int} \partial_y b + \partial_X \psi_1^{int} \partial_y b + \partial_x \psi_1^{int} + \partial_X \psi_2^{int} \\ - \partial_y \psi_0^{int} \partial_X^3 \psi_1^{int} - \partial_y \psi_1^{int} \partial_X b = 0, \end{aligned}$$

et on fait la moyenne en X . On considère comme précédemment que $\partial_X^3 \psi_2^{int} - \psi_2^{int}$ est périodique. On a alors :

$$-4\overline{\partial_X^3 \partial_x \psi_1^{int}}^X + \overline{\partial_x \psi_0^{int} \partial_y b}^X + \overline{\partial_X \psi_1^{int} \partial_y b}^X + \overline{\partial_x \psi_1^{int}}^X - \overline{\partial_y \psi_0^{int} \partial_X^3 \psi_1^{int}}^X - \overline{\partial_y \psi_1^{int} \partial_X b}^X = 0,$$

d'où on obtient l'expression de $\partial_x D(x, y)$ que l'on intègre à partir de $x = 1$.

Remarque 8.2. Notons que cette égalité n'assure pas que ψ vaut zéro sur les bords $[0, 1] \times \{0\}$ et $[0, 1] \times \{1\}$. Dans la suite, nous montrons qu'utiliser des fonds qui sont nuls sur ces bords nous permet de vérifier cette propriété.

Pour mieux comprendre, étudions plus en détail les équations à l'intérieur à l'ordre 1 dans le cas où b ne dépend pas de y .

On peut tout d'abord simplifier le calcul de $\partial_X \psi_1^{int}$ en définissant une fonction G qui ne dépend que de X . Cette fonction G est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -G^{(4)}(X) + G'(X) = b'(X) & \text{sur } [0, 1/\epsilon], \\ G''(X) = 0 & \text{pour } X = 0 \text{ et } X = 1/\epsilon, \\ G(X) = 0 & \text{pour } X = 0 \text{ et } X = 1/\epsilon. \end{array} \right.$$

On écrit alors $\psi_1^{int}(x, X, y) = \partial_y \psi_0^{int}(x, y) G(X) + D(x, y)$ et l'équation sur D devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_x D(x, y) + \partial_x \partial_y \psi_0^{int}(x, y) \overline{G(X)}^X - \partial_y^2 \psi_0^{int}(x, y) \overline{G(X)} \partial_X b^X = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ D(1, y) = 0 & \text{pour } y \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

On peut programmer les résolutions de ces équations assez simplement, avec des différences finies.

Etudions maintenant le cas où b est à variables séparables : on notera $b(X, y) = b_1(X)b_2(y)$, avec b_1 périodique et de moyenne nulle.

A nouveau, on définit une fonction \tilde{G} solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\tilde{G}^{(4)}(X) + \tilde{G}'(X) = b_1'(X) & \text{sur } [0, 1/\epsilon], \\ \tilde{G}''(X) = 0 & \text{pour } X = 0 \text{ et } X = 1/\epsilon, \\ \tilde{G}(X) = 0 & \text{pour } X = 0 \text{ et } X = 1/\epsilon, \end{array} \right.$$

et ψ_1^{int} s'écrit alors $\psi_1^{int}(x, X, y) = \partial_y \psi_0^{int}(x, y) b_2(y) \tilde{G}(X) + \tilde{D}(x, y)$. L'équation à résoudre pour obtenir \tilde{D} est plus compliquée que dans le cas précédent :

$$\begin{cases} \partial_y \psi_0^{int}(x, y) b_2(y) b'_2(y) \overline{b_1(X) \tilde{G}(X)}^X + \partial_x \tilde{D}(x, y) + \partial_x \partial_y \psi_0^{int}(x, y) b_2(y) \overline{\tilde{G}(X)}^X \\ \quad - (\partial_y^2 \psi_0^{int}(x, y) b_2(y) + \partial_y \psi_0^{int}(x, y) b'_2(y)) \overline{\tilde{G}(X) b'_1(X)}^X = 0 & \text{sur } \mathcal{D}, \\ \tilde{D}(1, y) = 0 & \text{pour } y \in [0, 1]. \end{cases}$$

Là encore, les équations peuvent être résolues sans trop de difficultés.

Regardons alors si l'ordre 2 peut aussi être explicité en fonction des ordres déjà calculés : l'équation (8.10) à l'ordre 1 nous donne la variation en X de ψ_2^{int} en fonction de ψ_0^{int} , ψ_1^{int} et b . La dépendance en x est donnée par l'équation (8.10) à l'ordre ϵ dont on fait la moyenne en variable rapide, en supposant que $\partial_X^3 \psi_3^{int} - \psi_3^{int}$ est périodique.

En ce qui concerne le correcteur, on obtient une égalité entre ψ_2^{cor} et les fonctions ψ_0^{int} , ψ_0^{cor} , ψ_1^{int} et ψ_1^{cor} .

On peut ainsi continuer le développement asymptotique à tout ordre.

8.2.2 Programmes et résultats.

La programmation du calcul de ψ_0^{int} est de la même forme que dans le cas en une seule dimension, et ne pose pas de problème.

En revanche, le correcteur est bien plus compliqué car on n'a plus une équation d'ordre 2 mais d'ordre 4. Comme suggéré ci-dessus, on ne rajoutera la variation en y que plus tard. On résout donc le système (8.11) avec la condition $\psi_0^{cor}(0, y) = -1$ pour $y \in [0, 1]$.

Tout d'abord, il nous faut la formule d'approximation de la dérivée quatrième d'une fonction f au point x_i :

$$f^{(4)}(x_i) \approx \frac{1}{dx^4} (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}),$$

où dx est le pas d'espace, et f_i est la valeur de la fonction f au point $x_i = x_0 + i dx$.

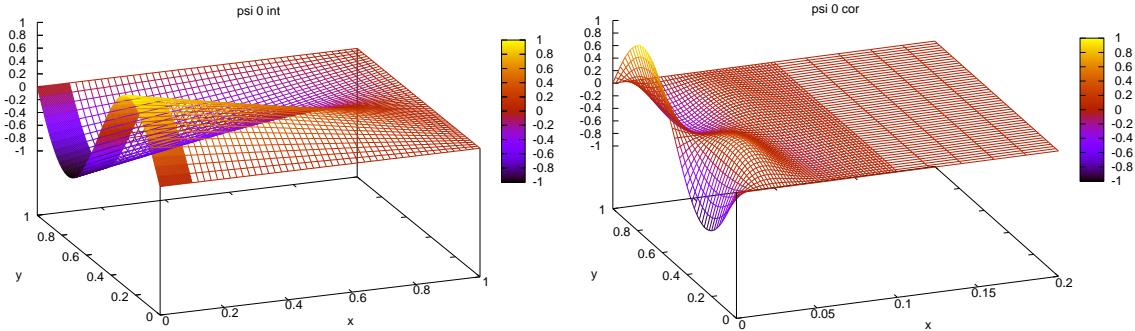
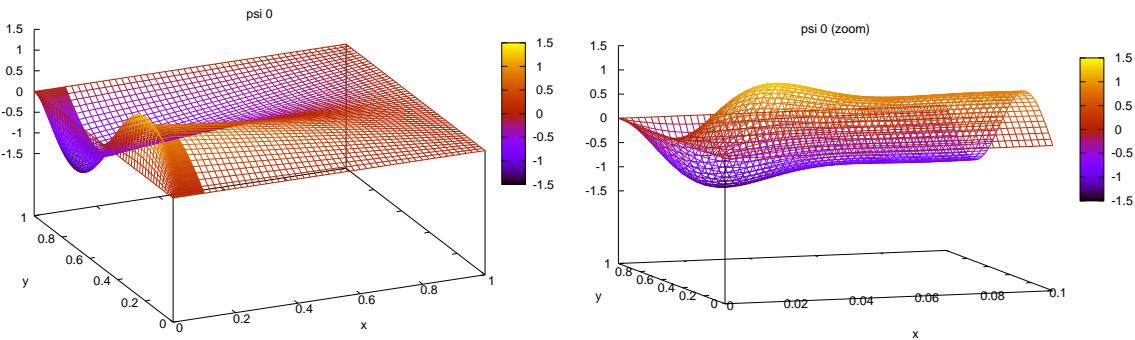
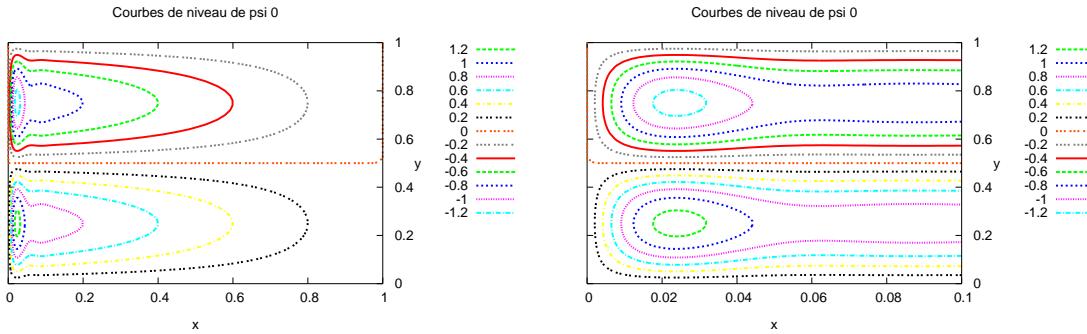
Il faut aussi chercher à exprimer la dérivée seconde aux bords. Pour cela, on introduit un point fictif x_{-1} qui est relié aux points x_0 et x_1 par la condition de la dérivée seconde nulle au bord. Cette valeur est réinjectée dans le calcul de la dérivée quatrième au point x_1 , ce qui permet d'avoir les deux conditions en une seule expression. On fait de même pour l'autre bord.

On connaît les valeurs du correcteur aux bords, on a donc juste à résoudre le système formé de la matrice des dérivées, en utilisant la méthode LU. On peut gagner un peu de temps et de place mémoire en remarquant que cette matrice est pentadiagonale et donc qu'il n'est pas nécessaire de stocker tous les termes.

Enfin, on n'oublie pas de multiplier la fonction obtenue par $\psi_0^{int}(0, y)$.

Nous avons tracé les figures $f(x, y) = -\sin(2\pi y)$, sur une grille 500×500 points. Chacun de ces calculs demande environ 0.8s.

Les Figures 8.13 à 8.15 représentent l'ordre 0 : la topographie n'intervient pas encore pour ces calculs. Comme dans le cas en une dimension, on se rend compte (Figure 8.13) qu'il n'est pas nécessaire de calculer le correcteur sur l'espace tout entier mais que l'on peut définir une borne, au-delà de laquelle le correcteur sera mis à zéro. On a choisi cette borne correspondant à $x = 0.2$: après cette valeur, le correcteur est nul.

FIG. 8.13 – Tracés de ψ_0^{int} et de ψ_0^{cor} en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.FIG. 8.14 – Tracés de $\psi_0 = \psi_0^{int} + \psi_0^{cor}$ en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.FIG. 8.15 – Courbes de niveau de $\psi_0 = \psi_0^{int} + \psi_0^{cor}$ en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

Enfin, on a représenté tous les points jusqu'à $x = 0.1$, ensuite on n'a gardé qu'un point sur 10. On a également divisé par 10 le nombre de points affichés sur l'axe y . Il ne s'agit là que de modifications graphiques, il n'y a pas d'influence sur la précision des calculs.

On s'intéresse ensuite à l'ordre 1 : on réutilise la résolution de l'équation du quatrième degré programmée pour ψ_0^{cor} pour le calcul des variations en X de ψ_1^{int} . La fonction D est donnée par une intégration, comme ψ_0^{int} .

Le calcul du correcteur ψ_1^{cor} est le même que celui fait pour le correcteur d'ordre 0, sauf que le vecteur qui représente le membre de droite est plus complexe. De plus, il fait intervenir $\psi_0^{int}(x, y)$ alors que notre résolution est en variable rapide X : on choisit de considérer ψ_0^{int}

comme une fonction de X , constante par morceaux : pour X variant dans $[x_1/\epsilon, x_2/\epsilon[$, on prend $\psi_0^{int}(x_1, y)$.

Lorsque le fond est plat, on remarque que ψ_1^{int} et ψ_1^{cor} sont nuls (Figure 8.16).

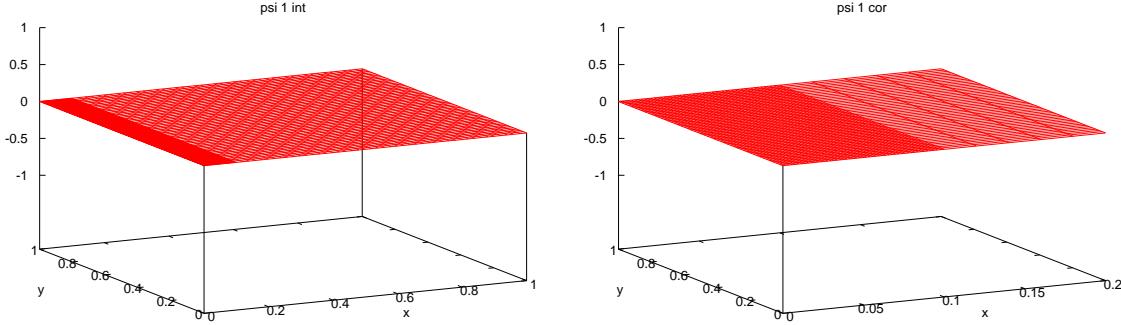


FIG. 8.16 – Tracés de ψ_1^{int} et de ψ_1^{cor} en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$ (fond plat).

Les Figures 8.18 à 8.20 ont été tracées pour le fond $b(X) = 1/2 \cos(\pi X/10)$.

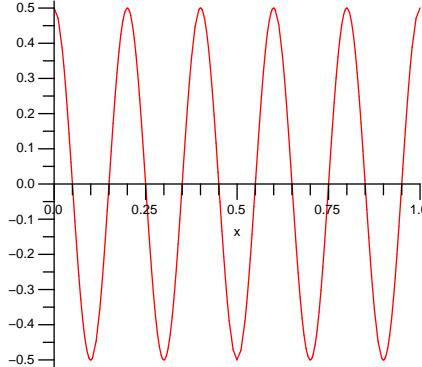


FIG. 8.17 – Fond utilisé : $b(X) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi X}{10}\right)$.

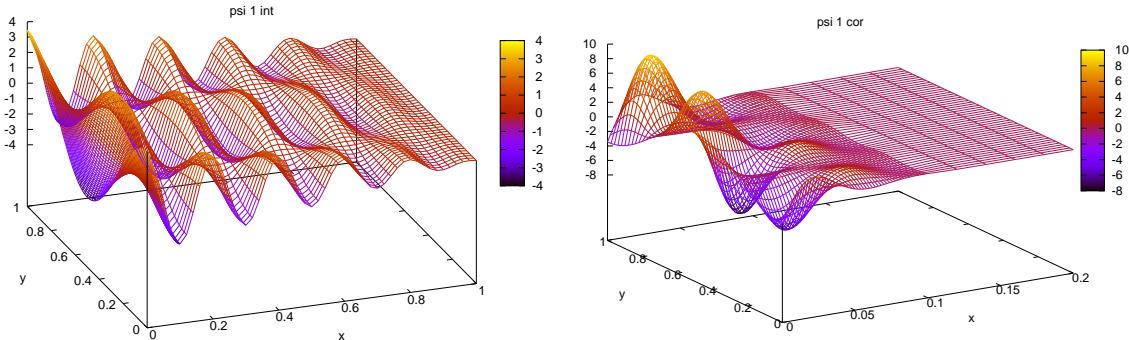


FIG. 8.18 – Tracés de ψ_1^{int} et de ψ_1^{cor} en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

Remarque 8.3. Tout comme en dimension un, le fond a non seulement une influence sur le domaine dans son ensemble mais aussi une contribution importante dans la couche limite.

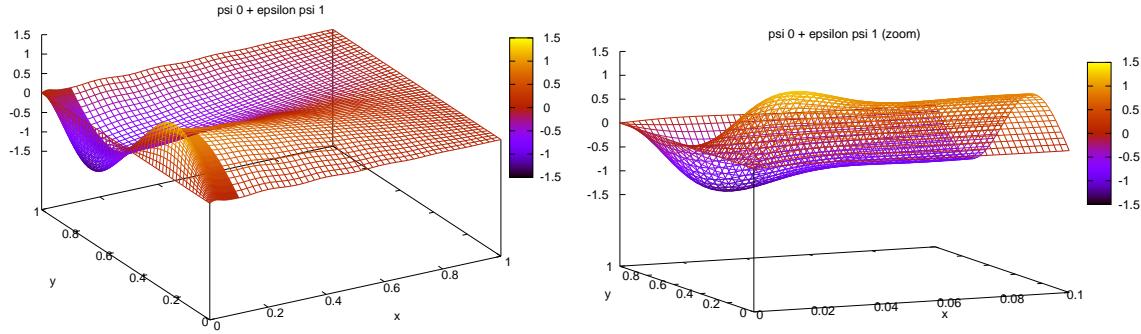


FIG. 8.19 – Tracés de $\psi_0 + \epsilon\psi_1 = \psi_0^{int} + \psi_0^{cor} + \epsilon\psi_1^{int} + \epsilon\psi_1^{cor}$ en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

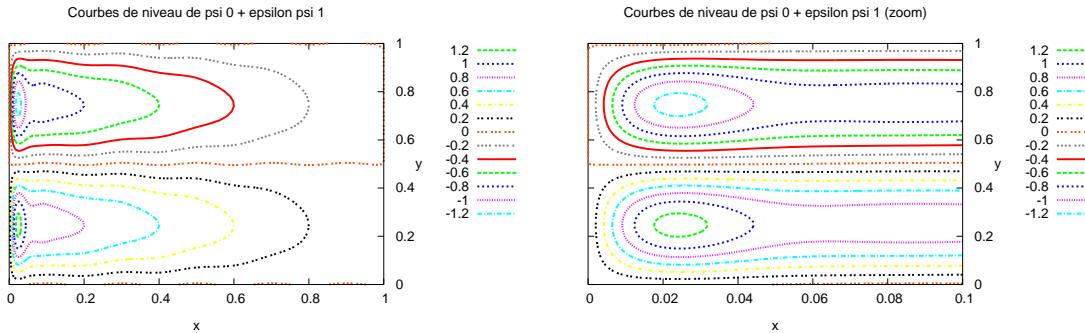


FIG. 8.20 – Courbes de niveau de $\psi_0 + \epsilon\psi_1 = \psi_0^{int} + \psi_0^{cor} + \epsilon\psi_1^{int} + \epsilon\psi_1^{cor}$ en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

Nous avons ensuite considéré un fond dépendant de X et de y mais à variables séparables : $b(X, y) = 1/2 \cos(\pi X/10) \sin(\pi y)$. Les résultats obtenus sont présentés Figures 8.22 à 8.24. On peut remarquer que le fait que le fond soit nul en $y = 0$ et $y = 1$ permet d'avoir $\psi_0 + \epsilon\psi_1$ nulle sur tous les bords du carré.

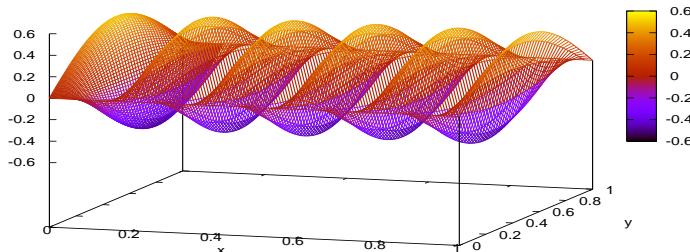
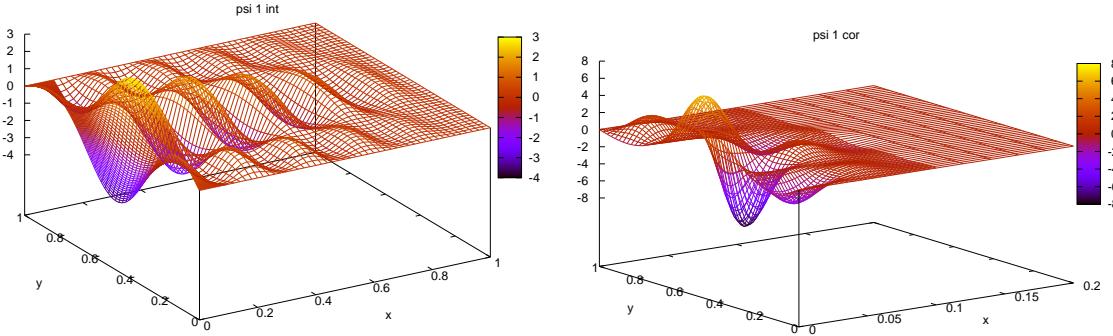
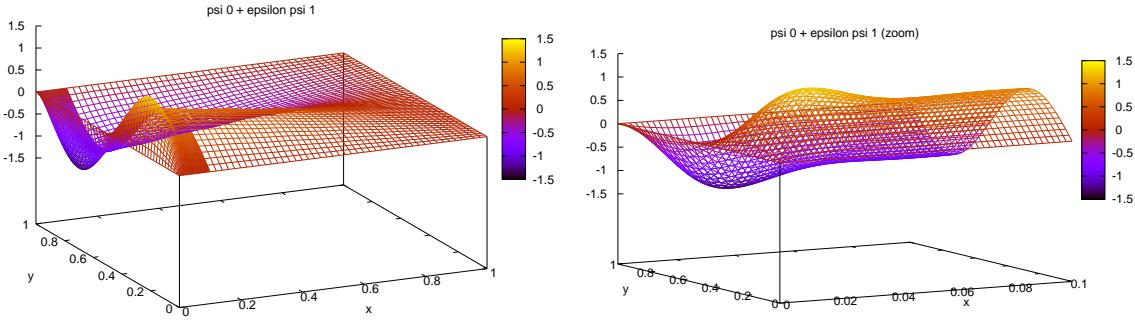
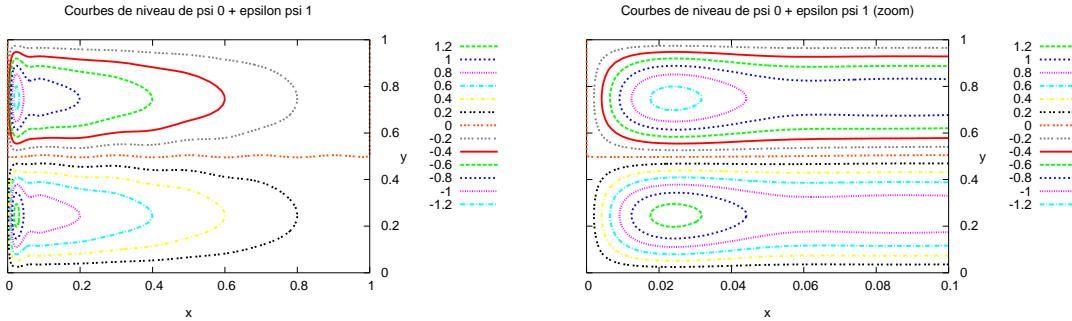


FIG. 8.21 – Fond utilisé : $b(X, y) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi X}{10}\right) \sin(\pi y)$.


 FIG. 8.22 – Tracés de ψ_1^{int} et de ψ_1^{cor} en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

 FIG. 8.23 – Tracés de $\psi_0 + \epsilon\psi_1 = \psi_0^{int} + \psi_0^{cor} + \epsilon\psi_1^{int} + \epsilon\psi_1^{cor}$ en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

 FIG. 8.24 – Courbes de niveau de $\psi_0 + \epsilon\psi_1 = \psi_0^{int} + \psi_0^{cor} + \epsilon\psi_1^{int} + \epsilon\psi_1^{cor}$ en fonction de x et y , pour $\epsilon = 0.01$.

Remarque 8.4. On peut aussi effectuer ces tests pour $\epsilon = 0.001$. Il faut alors prendre un nombre de points plus grand pour la discréétisation en x . Le calcul dure environ une quarantaine de secondes.

Nous avons donc un programme qui nous permet de tracer rapidement la solution de l'équation (8.10), même pour des valeurs de ϵ très petites. Nous n'arrivons pas cependant à assurer parfaitement les conditions d'imperméabilité et de non glissement sur les bords $y = 0$ ou 1 .

Nous pouvons alors comparer nos résultats avec ceux donnés par le programme utilisé au Chapitre 6 avec un choix adéquat de paramètres. Cela nous donne également une solution de référence grâce à laquelle nous montrons que nous avons bien une erreur de l'ordre attendu en ϵ .

8.2.3 Comparaisons et analyse.

Tout d'abord, nous comparons donc nos résultats avec ceux donnés par le programme qui résout l'équation Quasi-Géostrophique complète. Pour cela, nous fixons les paramètres de manière à considérer l'équation :

$$\partial_t \Delta \psi + \Delta \psi - \Delta^2 \psi + J \left(\psi, \Delta \psi + b \left(\frac{x}{\epsilon}, y \right) + \epsilon^{-3} y \right) = f(x, y). \quad (8.12)$$

En effet, si on multiplie l'équation (8.12) par ϵ^2 et que l'on pose $b \left(\frac{x}{\epsilon}, y \right) = \epsilon^{-2} b \left(\frac{x}{\epsilon}, y \right)$ et $f(x, y) = \epsilon^{-3} f(x, y)$, le régime stationnaire est exactement régi par l'équation (8.10).

Les résultats obtenus pour le fond $b(X, y) = 1/2 \cos(\pi X/10) \sin(\pi y)$ sont présentés Figure 8.25.

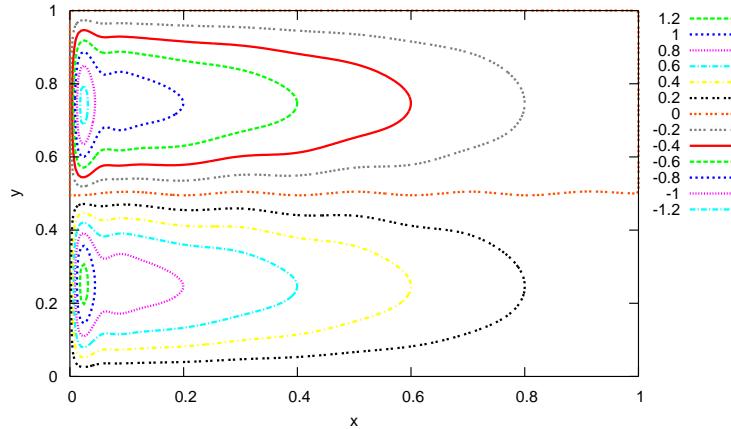


FIG. 8.25 – Solution de l'équation (8.12).

Comparons les deux programmes : on représente, Figure 8.26, les différences entre les résultats donnés par le programme résolvant l'équation Quasi-Géostrophique avec 200 points et celui qui utilise les développements asymptotiques.

Nous regardons séparément la zone de la couche limite. Hors de cette zone, ce qui correspond au dessin de droite, la différence entre les programmes est très faible, de l'ordre de 0.2%. Comme ϵ est fixé à 10^{-2} , nous vérifions donc que hors de la couche limite on a une bonne représentation de notre résultat.

Dans la couche limite, l'approximation n'est pas aussi précise : étudions cette région un peu plus précisément. La longueur de la couche limite, d'après [41], est de $2\pi\epsilon/\sqrt{3} \approx 0.036$; nous n'avons que 7 points de la grille en x du programme QG et donc la couche limite n'est pas bien résolue. Cela explique alors la différence entre les deux résultats : grâce à l'introduction de la nouvelle variable rapide X , notre approche résout mieux l'équation dans cette région.

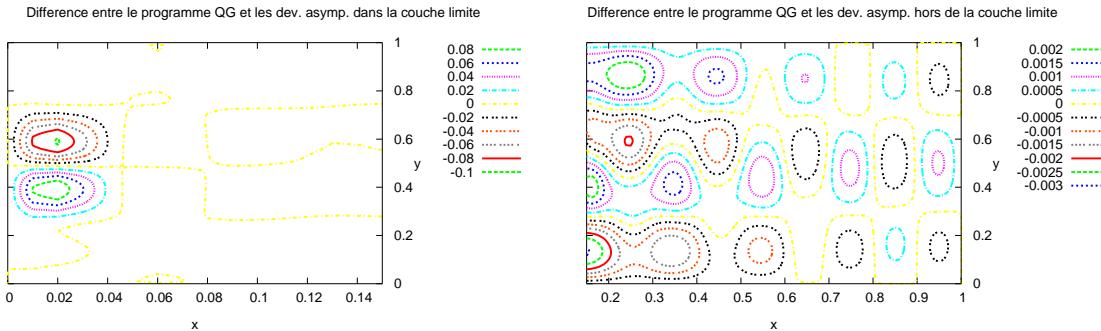


FIG. 8.26 – Différence entre les deux programmes : à gauche, sur la couche limite, et à droite, hors de la couche limite.

La comparaison avec le programme utilisé au Chapitre 6 nous sert également à vérifier que nous avons bien effectué une approximation à l'ordre 2, puisque nous n'avons pas montré ce résultat théoriquement à cause des expressions complexes des différents termes.

Nous venons de noter que la couche limite, dont la taille est connue en fonction de ϵ , peut ne pas être bien résolue. Nous choisissons donc des valeurs de ϵ relativement grandes (de l'ordre de 0.1) pour surmonter ce problème. Nous traçons alors les différences entre les deux résultats et nous en prenons la norme infinie.

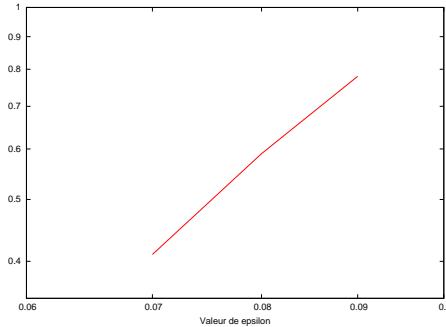


FIG. 8.27 – Erreur de la solution avec les développements asymptotiques en fonction de ϵ en échelle log-log : on a une droite de pente 2.

La Figure 8.27, qui représente l'erreur en fonction de ϵ , nous permet d'affirmer que cette erreur est bien en ϵ^2 .

Pour être complet, il nous reste à passer à l'équation de type Quasi-Géostrophique avec évolution en temps.

8.3 Equation Quasi-Géostrophique.

Nous finissons l'étude de la méthode multi-échelles présentée au Chapitre 7 par l'application à l'équation Quasi-Géostrophique avec évolution en temps :

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \partial_t \Delta \psi + \epsilon^2 \Delta \psi - \epsilon^2 \Delta^2 \psi + J(\psi, \epsilon^2 \Delta \psi + b(\frac{x}{\epsilon}, y) + \beta y) &= \beta f(t, x, y) && \text{sur } \mathcal{D}, \\ \psi &= 0 && \text{sur } \partial \mathcal{D}, \\ \Delta \psi &= 0 && \text{sur } \partial \mathcal{D}, \\ \psi|_{t=0} &= \int_{\mathcal{D}} f|_{t=0}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

où b est toujours périodique de moyenne nulle, avec un nombre entier de périodes, et $\beta = \epsilon^{-1}$.

8.3.1 Dépendance en temps.

Nous regardons ici l'influence de l'ajout de la dérivée en temps. Nous modifions alors les systèmes obtenus dans la Section 8.2.1 pour tenir compte de ce terme. La dépendance en temps ne donne qu'une contribution à l'ordre 1, donc les expressions de ψ_0^{int} et ψ_0^{cor} restent inchangées, on rajoute uniquement la variation en temps de la fonction f . En revanche, regardons ce que l'on a pour ψ_1^{int} et ψ_1^{cor} : le correcteur n'est pas modifié, puisqu'il est donné par l'équation à l'ordre $1/\epsilon$. Pour la fonction à l'intérieur, c'est l'équation qui exprime D , variation en x , qui n'est plus la même : le terme $\partial_t \partial_X^2 \psi_0$ doit être ajouté. Cependant, nous ne gardons ensuite que la partie intérieure et ψ_0^{int} ne dépend pas de X . Au final, l'équation sur D est donc toujours la même.

Nous voyons donc que la dépendance en temps n'intervient que par l'intermédiaire de la fonction f . Il faudrait donner les expressions de ψ_2^{int} et ψ_2^{cor} pour noter un changement.

8.3.2 Terme de frottement de fond.

Dans l'équation (8.13), nous avons également ajouté le terme de frottement de fond en laplacien que l'on a dans l'équation (6.4). On peut alors faire exactement le même raisonnement que pour l'évolution en temps : on remarque que le frottement de fond ne modifie que les termes en ϵ^2 .

Avec les coefficients que nous avons considérés dans l'équation (8.13), nous n'avons donc aucune modification à apporter aux deux premiers ordres du développement asymptotique de la solution, si ce n'est la dépendance en temps du forçage f . Nous ne présentons donc pas ici de nouveaux résultats.

Conclusion.

Nous avons donc réussi à étendre les résultats du Chapitre 7 non seulement à l'équation en une dimension avec terme de topographie, mais aussi à une équation de type Quasi-Géostrophique en deux dimensions. En une dimension, nous sommes également capable d'exprimer les termes qui sont liés à la topographie et qu'il faut donc ajouter à la solution avec fond plat pour obtenir la solution avec fond variable. En deux dimensions, grâce au programme qui résout l'équation Quasi-Géostrophique, nous montrons que notre résultat est bien une approximation à l'ordre 2 de la solution. Enfin, pour de petites valeurs de ϵ , nous n'avons

plus les problèmes de mauvaise résolution de la couche limite liés à l'utilisation d'une grille uniforme.

Chapitre 9

Quelques mots sur l'équation des lacs.

Dans ce chapitre, nous revenons sur un autre modèle qui s'obtient à partir des équations de Saint-Venant : les équations des lacs. Le domaine étudié est alors un bassin de faible profondeur dont le fond varie lentement. Contrairement aux équations Quasi-Géostrophiques qui supposent qu'à la fois le nombre de Rossby et le nombre de Froude soient petits, l'hypothèse de petitesse faite ici ne concerne que le nombre de Froude. La prise en compte de la force de Coriolis dans de tels modèles a un sens pour de grands lacs tels que le lac Ontario, le lac Supérieur ou encore le lac Michigan.

Dans un premier temps, nous présentons l'obtention du modèle à partir des équations de Saint-Venant. Nous obtenons alors un modèle visqueux comme dans [46] mais avec les nouveaux termes de Coriolis. Nous donnons ensuite des propriétés d'existence de solutions pour le modèle non visqueux, en nous inspirant des résultats démontrés sans effet cosinus. Nous commençons par supposer que la hauteur d'eau ne s'annule pas et nous utilisons un problème approché avec viscosité artificielle. Cette méthode permet également de traiter le cas dégénéré.

9.1 Obtention du modèle.

Dans cette section, nous présentons l'obtention du modèle complet, c'est-à-dire avec termes visqueux, frottement de fond et tension de surface. Nous obtenons donc le modèle proposé dans [46] avec de nouveaux termes en *cosinus*. Ensuite, nous négligeons viscosité et frottement (la capillarité n'apparaît plus) pour donner une formulation courant-vorticité.

9.1.1 Modèle complet avec viscosité.

On reprend les équations de Saint-Venant au second ordre obtenues au Chapitre 1. On néglige le terme de trainée turbulente et on note H la hauteur d'eau :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{g}{2} \nabla H^2 &= -2\Omega \sin \theta H u^\perp + \Omega \cos \theta e_1 H^2 \operatorname{div} u + \Omega \cos \theta \nabla(H^2 u_1) \\ &\quad - \alpha_0(H) u + 2\mu \operatorname{div}(HD(u)) + 2\mu \nabla(H \operatorname{div} u) + a H \nabla \Delta H \\ &\quad + a H \nabla \Delta b - gH \nabla b - 2\Omega \cos \theta H e_1 \nabla b \cdot u + 2\Omega \cos \theta u_1 H \nabla b. \end{aligned}$$

On met ces équations sous forme non-dimensionnelle (en gardant les grandeurs caractéristiques et les nombres sans dimensions définis au Chapitre 1) et on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t H + \operatorname{div}(Hu) &= 0, \\ \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{1}{2Fr^2} \nabla H^2 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} Hu^\perp + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H^2 e_1 \operatorname{div} u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla(u_1 H^2) \\ &\quad - \tilde{\alpha}_0(H) u + 2\nu \operatorname{div}(HD(u)) + 2\nu \nabla(H \operatorname{div} u) + AH \nabla \Delta H \\ &\quad + AH \nabla \Delta b - \nabla b \left(\frac{H}{Fr^2} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1 H \right) - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} H e_1 \nabla b \cdot u. \end{aligned}$$

On considère alors que Ro et ε sont fixés et on pose $Fr^2 = \eta$. On a donc les équations suivantes :

$$\partial_t H + \operatorname{div}(Hu) = 0, \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned} \partial_t(Hu) + \operatorname{div}(Hu \otimes u) + \frac{1}{2\eta} \nabla H^2 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} Hu^\perp + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H^2 e_1 \operatorname{div} u + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla(u_1 H^2) \\ &\quad - \tilde{\alpha}_0(H) u + 2\nu \operatorname{div}(HD(u)) + 2\nu \nabla(H \operatorname{div} u) + AH \nabla \Delta H \\ &\quad + AH \nabla \Delta b - \nabla b \left(\frac{H}{\eta} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1 H \right) - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} H e_1 \nabla b \cdot u. \end{aligned} \tag{9.2}$$

On développe les variables en puissances de η : $u = u^0 + \eta u^1 \dots$, $H = H^0 + \eta H^1 \dots$. Au premier ordre, l'équation (9.2) s'écrit :

$$H^0 \nabla(H^0 + b) = 0.$$

Donc $H^0 + b$ est une constante par rapport aux variables d'espace, $H^0 + b = f(t)$.

On reporte cette égalité dans l'équation (9.1) au premier ordre :

$$f'(t) + \operatorname{div}((f - b)u^0) = 0,$$

et on l'intègre en espace en considérant que l'on a des conditions aux bords périodiques. On obtient $f'(t) = 0$, donc f est constante, donnée par la valeur initiale de $H^0 + b$. On peut supposer que cette valeur est égale à 1, et donc

$$H^0 + b = 1.$$

On peut alors remarquer que l'équation (9.1) au premier ordre se simplifie en :

$$\operatorname{div}(H^0 u^0) = 0. \quad (9.3)$$

On écrit ensuite l'équation (9.2) au second ordre :

$$\begin{aligned} \partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}(H^0 u^0 \otimes u^0) + H^0 \nabla H^1 + H^1 \nabla H^0 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} H^0 u^{0\perp} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} (H^0)^2 e_1 \operatorname{div} u^0 \\ &+ \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} \nabla (u_1^0 (H^0)^2) - \tilde{\alpha}_0(H^0) u^0 + 2\nu \operatorname{div}(H^0 D(u^0)) + 2\nu \nabla(H^0 \operatorname{div} u^0) \\ &+ AH^0 \nabla \Delta H^0 + AH^0 \nabla \Delta b - \nabla b \left(H^1 - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} u_1^0 H^0 \right) - \varepsilon \frac{\cos \theta}{Ro} H^0 e_1 \nabla b \cdot u^0. \end{aligned}$$

c'est-à-dire, comme $H^0 + b = 1$:

$$\begin{aligned} \partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}(H^0 u^0 \otimes u^0) + H^0 \nabla H^1 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} H^0 u^{0\perp} + 2\nu \operatorname{div}(H^0 D(u^0)) + 2\nu \nabla(H^0 \operatorname{div} u^0) \\ &- \tilde{\alpha}_0(H^0) u^0 + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H^0 (H^0 \nabla u_1^0 + 2u_1^0 \nabla H^0 + H^0 e_1 \operatorname{div} u^0 - 2e_1 \nabla b \cdot u^0 + 2u_1^0 \nabla b). \end{aligned}$$

On simplifie le coefficient du $\cos \theta$ en utilisant la relation (9.3) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H^0 \nabla u_1^0 + u_1^0 \nabla H^0 + \frac{1}{2} H^0 e_1 \operatorname{div} u^0 - e_1 \nabla b \cdot u^0 + u_1^0 \nabla b &= (\partial_{x_2} H^0 + \partial_{x_2} b + \frac{H^0}{2} \partial_{x_2}) u^{0\perp} \\ &= \frac{H^0}{2} \partial_{x_2} u^{0\perp}, \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t(H^0 u^0) + \operatorname{div}(H^0 u^0 \otimes u^0) + H^0 \nabla H^1 &= -\frac{\sin \theta}{Ro} H^0 u^{0\perp} + 2\nu \operatorname{div}(H^0 D(u^0)) + 2\nu \nabla(H^0 \operatorname{div} u^0) \\ &- \tilde{\alpha}_0(H^0) u^0 + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} (H^0)^2 \partial_{x_2} u^{0\perp}, \quad \text{avec } \operatorname{div}(H^0 u^0) = 0 \text{ et } H^0 + b = 1. \end{aligned} \quad (9.4)$$

L'équation (9.4) constitue l'équation des lacs avec viscosité et frottement de fond. La capillarité, qui n'a pas été négligée, a disparu avec la relation $H^0 + b = 1$.

9.1.2 Formulation courant-vorticité pour un modèle simplifié.

Nous allons maintenant plus loin dans l'obtention du modèle en recherchant la formulation courant-vorticité. Pour cela, nous considérons le cas où il n'y a ni frottement de fond, ni viscosité. L'équation (9.4) se réécrit alors :

$$\partial_t u^0 + (u^0 \cdot \nabla) u^0 + \nabla P = - \left(\frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H^0 \partial_{x_2} \right) u^{0\perp}, \quad (9.5)$$

avec $P = H^1$, $\operatorname{div}(H^0 u^0) = 0$ et $H^0 + b = 1$.

L'équation des lacs que l'on considère classiquement est l'équation

$$\partial_t u^0 + (u^0 \cdot \nabla) u^0 + \nabla P + u^{0\perp} = 0, \quad \text{avec } \operatorname{div}(H^0 u^0) = 0, \quad P = H^1,$$

pour laquelle on sait écrire une formulation courant-vorticité. En effet, on prend le *curl* de cette équation :

$$\partial_t \operatorname{curl} u + \operatorname{curl}(u \cdot \nabla u) + \operatorname{div} u = 0,$$

et on divise le résultat par H^0 . On utilise l'égalité $H^0 \operatorname{div} u = -u \cdot \nabla H^0$ pour réécrire l'équation

$$\partial_t \frac{\operatorname{curl} u}{H^0} + \frac{\operatorname{curl}(u \cdot \nabla u)}{H^0} - \frac{u \cdot \nabla H^0}{H^{02}} = 0.$$

En posant $\Pi = \frac{1}{H^0} \operatorname{curl} u + \frac{1}{H^0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi &= 0, \\ u &= \frac{1}{H^0} \nabla^\perp \varphi. \end{aligned}$$

Pour obtenir la formulation courant-vorticité de l'équation (9.5), il faut donc regarder ce que devient le nouveau terme $H^0 \partial_{x_2} u^{0\perp}$ au cours des différentes étapes.

On cherche donc à simplifier l'expression : $\frac{1}{H^0} \operatorname{curl}(H^0 \partial_{x_2} u^{0\perp})$:

$$\frac{1}{H^0} \operatorname{curl}(H^0 \partial_{x_2} u^{0\perp}) = \frac{\nabla H^0 \cdot \partial_{x_2} u}{H^0} + \operatorname{div}(\partial_{x_2} u_2) = \frac{\nabla H^0 \cdot \partial_{x_2} u}{H^0} - \partial_{x_2} \left(\frac{u \cdot \nabla H^0}{H^0} \right)$$

en utilisant la condition de la divergence. Ensuite, on la réécrit :

$$\frac{1}{H^0} \operatorname{curl}(H^0 \partial_{x_2} u^{0\perp}) = -u \cdot \partial_{x_2} \left(\frac{\nabla H^0}{H^0} \right) = -u \cdot \nabla \left(\frac{\partial_{x_2} H^0}{H^0} \right).$$

On obtient donc le système

$$\partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi = 0, \tag{9.6}$$

$$u = \frac{1}{H^0} \nabla^\perp \varphi, \tag{9.7}$$

$$\text{où } \Pi = \frac{1}{H^0} \operatorname{curl} u + \frac{\sin \theta}{Ro} \frac{1}{H^0} + \varepsilon \frac{\cos \theta}{2 Ro} \frac{\partial_{x_2} H^0}{H^0} \tag{9.8}$$

$$\Pi|_{t=0} = \Pi_0. \tag{9.9}$$

On a donc une nouvelle vorticité qui prend en compte l'effet cosinus, mais la structure globale de l'équation reste la même.

Voyons maintenant comment adapter les résultats d'existence à cette nouvelle vorticité.

9.2 Existence d'une solution de l'équation des lacs.

La démonstration de l'existence d'une solution de l'équation des lacs est réalisée en deux étapes : tout d'abord, nous considérons le cas non dégénéré, puis, avec ces premiers résultats, nous pouvons passer au cas où la hauteur d'eau s'annule.

9.2.1 Cas où H^0 reste strictement positif.

On réécrit la formulation courant-vorticité sous la forme

$$\begin{aligned}\partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi &= 0, \\ u &= \tilde{\mathbf{K}} \Pi, \\ \Pi|_{t=0} &= \Pi_0.\end{aligned}$$

L'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}$ est un opérateur linéaire tel que u satisfasse la relation $\operatorname{div}(H^0 u) = 0$. Il peut être vu comme une perturbation de l'inverse de l'opérateur curl .

Dans [45], C. D. LEVERMORE, M. OLIVER et E. S. TITI considèrent un système de la forme :

$$\begin{aligned}\partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi &= 0, \\ u &= \mathbf{K} \Pi, \\ \Pi|_{t=0} &= \Pi_0,\end{aligned}\tag{9.10}$$

dans un domaine \mathcal{D} , où \mathbf{K} est un opérateur linéaire tel que l'on ait la condition $\operatorname{div}(H^0 u) = 0$. Ils montrent alors que si b est une fonction $\mathcal{C}^2(\bar{\mathcal{D}})$ et \mathbf{K} un opérateur linéaire continu de L^2 dans \mathbb{V} , adhérence de l'ensemble $\{u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2), \text{ t.q. } \operatorname{div}(H^0 u) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}\}$ pour la norme H^1 , et s'il existe $p_0 > 1$ et c , constante ne dépendant que de p_0 et \mathcal{D} , tels que :

$$\|\mathbf{K} \Pi\|_{W^{1,p}} \leq cp \|\Pi\|_{L^p} \quad \text{pour tout } p \geq p_0,$$

alors, pour une donnée initiale dans $L^\infty(\mathcal{D})$, il existe une unique solution globale forte du système (9.10). Cette démonstration repose sur l'étude du système (9.10) auquel on ajoute une viscosité artificielle ν : la première équation de (9.10) est remplacée par

$$\partial_t \Pi + u \cdot \nabla \Pi - \nu(H^0)^{-1} \operatorname{div}(H^0 \nabla \Pi) = 0.$$

Dans notre cas, l'opérateur $\tilde{\mathbf{K}}$ se déduit facilement de l'opérateur \mathbf{K} puisque $\tilde{\mathbf{K}} \Pi$ est la somme de $\mathbf{K} \Pi$ et de termes indépendants des inconnues. On modifie donc l'estimation sur \mathbf{K} par

$$\|\tilde{\mathbf{K}} \Pi\|_{W^{1,p}} \leq cp \|\Pi\|_{L^p} + F,$$

F ne dépendant que de θ , ε et H^0 .

On peut alors suivre les calculs de [45] : si la valeur initiale $\Pi|_{t=0}$ est dans $H_0^1(\mathcal{D})$, on montre qu'il existe une solution unique Π dans $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, H_0^1(\mathcal{D})) \cap L_{loc}^2([0, +\infty[, H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}))$ pour chaque ν . Ce résultat est obtenu par construction d'une famille de solutions approchées (solutions dans le sous-espace engendré par les n premiers vecteurs propres) et on passe à la limite grâce à la compacité. On étudie alors la limite non-visqueuse : la compacité de la suite Π_ν nous permet de passer à la limite et d'affirmer que si la valeur initiale est dans $L^\infty(\mathcal{D})$, alors il existe Π dans $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, L^\infty(\mathcal{D}) \text{ faible } \star) \cap L^\infty([0, +\infty[\times \mathcal{D})$.

De plus, lors de l'étude de l'unicité, la nouvelle partie due à Coriolis disparaît en calculant la différence entre deux solutions.

Donc, si la vorticité initiale $\Pi|_{t=0}$ est dans $L^\infty(\mathcal{D})$, on a, dans ce cas également, existence et unicité de solutions faibles globales de l'équation des lacs (9.6)-(9.9).

9.2.2 Cas où H^0 s'annule.

Nous considérons maintenant un domaine \mathcal{D} (de type lac) pour lequel la hauteur d'eau s'annule sur les bords et nulle part ailleurs. Pour un tel domaine, D. BRESCH et G. MÉTIVIER ont montré, dans [20], que le système

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(H^0 u) &= 0, \\ \operatorname{curl} u &= f\end{aligned}\tag{9.11}$$

pour $H^0 u \in L^2(\mathcal{D})$, $f \in L^p(\mathcal{D})$, avec $p \in]2; \infty[$, admet une solution faible globale pour toute condition initiale $\Pi|_{t=0}$ dans $L^\infty(\mathcal{D})$.

La démonstration de ce résultat utilise la fonction de Green associée à ce système.

Pour notre système, qui n'est qu'un cas particulier du système (9.11), nous pouvons déduire les mêmes estimations sur la solution que celles obtenues dans [20].

Reste à voir comment adapter le passage par une viscosité artificielle ν pour obtenir l'existence de solutions faibles globales. On définit $H_\nu^0 = H^0 + \nu$ et l'équation (9.6) est modifiée en :

$$\partial_t(H_\nu^0 \Pi_\nu) + H_\nu^0 u_\nu \cdot \nabla \Pi_\nu - \nu \operatorname{div}(H_\nu^0 \nabla \Pi_\nu) = 0.$$

Comme les termes que l'on rajoute dans notre système par rapport à [20] ne font intervenir que la dérivée en x_2 de H_ν^0 , le passage à la limite se fait de la même façon.

On peut donc conclure quant à l'existence de solutions.

La démonstration de l'unicité repose sur le travail de YUDOVITCH. Soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation des lacs :

$$\partial_t u_{1/2} + u_{1/2} \cdot \nabla u_{1/2} + \nabla P_{1/2} = - \left(\frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H \partial_{x_2} \right) u_{1/2}^\perp.$$

La fonction u définie par $u = u_1 - u_2$ est solution de

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u_1 + u_2 \cdot \nabla u + \nabla P = - \left(\frac{\sin \theta}{Ro} - \varepsilon \frac{\cos \theta}{2Ro} H \partial_{x_2} \right) u^\perp.$$

On multiplie cette égalité par $H u$ et on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} H |u|^2 + \int_{\mathcal{D}} u \cdot \nabla u_1 H u = 0.$$

On peut écrire les relations :

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathcal{D}} u \cdot \nabla u_1 H u \right| &\leq \left\| \sqrt{H} u \right\|_{L^\infty}^{\frac{2}{p}} \left(\left\| \sqrt{H} u \right\|_{L^2}^2 \right)^{1-\frac{1}{p}} \left\| \nabla u_1 \right\|_{L^p} \\ &\leq \left\| \sqrt{H} u \right\|_{L^\infty}^{\frac{2}{p}} \left(\left\| \sqrt{H} u \right\|_{L^2}^2 \right)^{1-\frac{1}{p}} (pC + F),\end{aligned}$$

en utilisant l'égalité

$$\left\| \left(\sqrt{H} u \right)^{\frac{2}{q}} \right\|_{L^q} = \left\| \sqrt{H} u \right\|_{L^2}^{\frac{2}{q}}.$$

On a alors l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \|\sqrt{H}u\|_{L^2}^2 \leq (\|\sqrt{H}u\|_{L^2}^2)^{1-\frac{1}{p}} (pC + F)M,$$

ce qui nous donne $u = 0$, c'est-à-dire l'unicité de la solution.

On conclut donc par le théorème :

Théorème 9.1. *Pour toute donnée initiale $\Pi_0 \in L^\infty(\mathcal{D})$ il existe une unique solution faible (u, Π) de la formulation courant-vorticité de l'équation des lacs (9.6)-(9.9), où Π est dans $C^0([0, T]; L^\infty(\mathcal{D}))$ faible \star et vérifie Π/H^0 dans $L^\infty([0, T] \times \mathcal{D})$, et où H^0u est dans $C^0([0, T]; L^2(\mathcal{D}))$.*

De plus, cette solution est régulière, c'est-à-dire que Π/H^0 est dans $C^0([0, T]; L^s(\mathcal{D}))$ et u dans $C^0([0, T]; W^{1,s}(\mathcal{D}))$ pour tout s fini.

Conclusion.

De même que dans les Chapitres 1 et 6, nous avons obtenu un nouveau modèle pour l'équation des lacs, limite des équations de Saint-Venant pour un faible nombre de Froude. Ce modèle comporte de nouveaux termes en *cosinus* dus à la prise en compte de la force de Coriolis complète. Comme pour le système de Saint-Venant ou les équations Quasi-Géostrophiques, nous sommes parvenus à montrer que les propriétés mathématiques prouvées sur les modèles utilisés jusqu'ici sont toujours valables dans notre cas.

Conclusion et perspectives.

Dans cette thèse, nous nous sommes tout d'abord intéressés au modèle de Saint-Venant visqueux. Nous avons montré qu'au second ordre, ordre auquel on voit apparaître la trace de la viscosité, arrivent également les termes en *cosinus* de la latitude de la force de Coriolis. Il est donc nécessaire de considérer celle-ci dans son intégralité. Nous avons obtenu un nouveau modèle, pour lequel, en modifiant légèrement le terme visqueux, nous avons prouvé l'existence de solutions faibles globales. Nous avons aussi étudié l'influence de ce terme en *cosinus* sur les ondes, et nous avons vu qu'elles se déplacent toujours de la même façon, mais avec des vitesses modifiées.

Pour essayer de visualiser l'effet *cosinus*, nous nous sommes alors penchés sur le système de Saint-Venant Quasi-Géostrophique. Nous avons ici encore montré que les propriétés mathématiques connues sont conservées, puis nous avons donné des résultats numériques. Ceux-ci nous permettent d'affirmer que suivant le cas physique considéré, ce nouveau terme peut avoir un rôle non négligeable. Cependant, nous ne sommes pas en mesure de prévoir à l'avance cet impact.

Enfin, toujours autour de la prise en compte de la force de Coriolis complète, nous avons regardé les conséquences sur les équations des lacs : nous obtenons les mêmes équations, mais la vorticité est différente. En revanche, cela ne nous empêche pas d'adapter à notre cas les preuves concernant l'existence de solutions.

Au sujet des équations de Saint-Venant, nous avons fait varier les différents paramètres que sont les conditions à la surface et au fond et le tenseur des contraintes. Puisque le modèle précédent est obtenu en utilisant la condition de Navier au fond, nous avons étudié la condition de non-glissement. Ce choix nous impose d'une part d'ajouter un terme source pour ne pas trouver la solution triviale, d'autre part d'aller à l'ordre suivant pour connaître la dérivée de la vitesse. Le processus pour écrire le système de Saint-Venant est donc largement lié à la condition au fond.

La condition à la surface n'est pas aussi contraignante : nous avons pu donner le système de Saint-Venant avec un terme d'évaporation en suivant exactement le même cheminement que lors de l'étude avec la condition cinématique. Cependant, l'expression de l'évaporation dépendant du cas physique, nous n'avons pas vraiment pu mener cette analyse jusqu'au bout. Nous nous sommes également intéressés à un autre tenseur des contraintes, celui d'Oldroyd. La difficulté a été de lier les équations de Navier-Stokes avec l'équation vérifiée par le tenseur de cisaillement. C'est pour cela que nous avons choisi de nous placer dans un cas particulier, qui nous a permis d'écrire un modèle de Saint-Venant.

Un autre point de vue abordé dans cette thèse est celui des développements multi-échelles. Ceux-ci permettent de mieux prendre en compte toutes les variations de la topographie. Nous avons obtenu, parfois grâce à la viscosité, des systèmes fermés pour une variation lente ou

rapide de la topographie.

En ce qui concerne les équations Quasi-Géostrophiques, nous avons développé une nouvelle méthode d'approximation des solutions qui repose sur l'analyse multi-échelles. Nous avons proposé des simplifications des termes de couche limite pour alléger les calculs. Nous avons montré que les résultats obtenus concordent bien avec nos attentes : nous avons une différence avec la solution théorique de l'ordre prévu, mais un temps de calcul bien plus faible.

Nous avons aussi étudié l'influence de la topographie dans ces équations, en cherchant à caractériser les termes qui doivent être ajoutés à la solution avec un fond plat. Nous avons montré que, même en dimension deux, nous pouvons en donner une équation, et que les résultats sont comparables à ceux donnés par les programmes utilisés habituellement.

Nous pouvons proposer quelques travaux dans la lignée de ce travail. L'étude numérique de l'effet cosinus a été effectuée sur la limite Quasi-Géostrophique de l'équation de Saint-Venant, en partie puisque nous disposons, dans notre équipe, d'un programme permettant de tracer les solutions de ce système sans nos nouveaux termes. La prise en compte de la force de Coriolis complète a donc consisté en la modification de ce programme. Il serait intéressant de réaliser des simulations numériques directement sur le système de Saint-Venant et de comparer les résultats avec et sans termes en *cosinus*. Comme certains de ces termes sont liés à la topographie, il faudrait alors à nouveau faire des expériences avec fond plat et fond variable.

Toujours à ce sujet mais d'un point de vue plus théorique, nous pourrions nous pencher sur l'obtention directe des équations Quasi-Géostrophiques à partir des équations de Navier-Stokes. Cela reviendrait, d'une certaine façon, à savoir si calculer la limite pour un faible rapport des échelles caractéristiques ϵ puis prendre des nombres de Rossby et de Froude petits à ϵ fixé équivaut à supposer dès le départ tous ces paramètres petits dans les équations de Navier-Stokes.

Une autre point à étudier sur les équations Quasi-Géostrophiques est la limite lorsque β tend vers l'infini. Par β , nous entendons bien sûr le coefficient non-dimensionnel β' qui vaut $\beta L_{car}^2 / U_{car}$. Il s'agit donc d'une relation entre la longueur et la vitesse caractéristiques, ce n'est nullement incompatible avec la valeur du coefficient β dimensionnel (de l'ordre de 10^{-11}) ! Ce type d'étude a par exemple été mené dans [29] sans termes en *cosinus*.

Pour finir sur les équations Quasi-Géostrophiques, nous pourrions nous intéresser au système en trois dimensions obtenu à partir des équations de Navier-Stokes. C'est l'objet de [28] mais il semblerait qu'il faille étudier attentivement les conditions à la surface. Comme nous l'avons souligné, ces conditions peuvent avoir une influence importante sur le modèle final.

Enfin, d'une façon générale, les modèles proposés dans cette thèse ont été obtenus par des développements asymptotiques, de manière formelle. Ils possèdent des comportements physiques satisfaisants et, d'un point de vue mathématique, nous avons pu démontrer plusieurs résultats d'existence de solutions. Il serait possible, pour compléter cette étude, de justifier mathématiquement, (dans l'esprit de [15] par exemple), la convergence des équations de Navier-Stokes ou de Saint-Venant vers ces modèles lorsque les petits paramètres (tels que le rapport des échelles caractéristiques, le nombre de Froude, ou le nombre de Rossby) tendent vers zéro.

Bibliographie

- [1] Y. ACHDOU, O. PIRONNEAU, and F. VALENTIN. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comp. Phys.*, 147(1) :187–218, 1998.
- [2] P. AILLIOT, E. FRÉNOD, and V. MONBET. Modeling the Coastal Ocean over a Time Period of Several Weeks. Submitted.
- [3] P. AILLIOT, E. FRÉNOD, and V. MONBET. Long term object drift forecast in the ocean with tide and wind. *Multiscale Modelling and Simulation*, 5(2) :514–531, 2006.
- [4] C. ANCEY. Plasticity and geophysical flows : a review. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142(1) :4–35, 2007.
- [5] E. AUDUSSE. A Multilayer Saint-Venant System : Derivation and Numerical Validation. *DCDS-B*, 5(2) :189–214, 2005.
- [6] V. BARCILON, P. CONSTANTIN, and E. S. TITI. Existence of solutions to the Stommel-Charney model of the Gulf Stream. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(6) :1355–1364, 1988.
- [7] I. V. BASOV. Existence of a rigid core in the flow of a compressible Bingham fluid under the action of a homogeneous force. *J. Math. Fluid Mech.*, 7(4) :515–528, 2005.
- [8] I. V. BASOV and V. V. SHELUKHIN. Generalized solutions to the equations of compressible Bingham flows. *Z. Angew. Math. Mech.*, 79(3) :185–192, 1999.
- [9] G. BAYADA, L. CHUPIN, and S. MARTIN. Viscoelastic fluids in a thin domain. *Quarterly of Applied Mathematics*, 65(4) :625–651, 2007.
- [10] D. BERNARDIN. Introduction à la rhéologie des fluides : approche macroscopique. École de printemps, GdR Matériaux vitreux, Mars 2003.
- [11] C. BERNIER. *Étude et parallélisation d'un code d'éléments finis pour la modélisation quasi-géostrophique des circulations océaniques*. Phd, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.
- [12] A. BOURGEOIS and J. T. BEALE. Validity of the quasigeostrophic model for large-scale flow in the atmosphere and ocean. *SIAM J. Appl. Math.*, 25(4) :1023–1068, 1994.
- [13] M. BOUTOUNET, L. CHUPIN, P. NOBLE, and J.-P. VILA. Shallow water flows for arbitrary topography. Submitted.

- [14] F. BOYER and P. FABRIE. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques et Applications*. Springer, 2006.
- [15] D. BRESCH and B. DESJARDINS. Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238(1–2) :211–223, 2003.
- [16] D. BRESCH and B. DESJARDINS. Quelques modèles diffusifs capillaires de type Korteweg. *C. R. Mécanique*, 332(11) :881–886, 2004.
- [17] D. BRESCH and B. DESJARDINS. On the construction of approximate solutions for the 2D viscous shallow water model with extension to compressible Navier-Stokes models. *J. Maths Pures Appl.*, 86(4) :362–368, 2006.
- [18] D. BRESCH, B. DESJARDINS, and C. K. LIN. On some compressible fluids models : Korteweg, lubrication and shallow water systems. *Commun. Partial Diff. Equations*, 28(3/4) :1009–1037, 2003.
- [19] D. BRESCH and D. GÉRARD-VARET. On some homogenization problems from shallow water theory. *Applied Math. Letters*, 20(5) :505–510, 2007.
- [20] D. BRESCH and G. MÉTIVIER. Global existence and uniqueness for the lake equations with vanishing topography : elliptic estimates for degenerate equations. *Nonlinearity*, 19(3) :591–610, 2006.
- [21] D. BRESCH and V. MILISIC. Higher order boundary layer correctors and wall laws derivation : a unified approach. *ArXiv Mathematics e-prints*, 2006.
- [22] H. BRÉZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Dunod, 2000.
- [23] M. CABRERA, T. CLOPEAU, A. MIKELIĆ, and J. POUSIN. *Viscous drop spreading with evaporation and applications to DNA biochips*, volume 8, pages 320–324. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [24] W. CHENG and R. TEMAM. Numerical approximation of one-dimensional stationary diffusion equations with boundary layers. *Comput. Fluids*, 31 :453–466, 2002.
- [25] W. CHENG, R. TEMAM, and X. WANG. New approximation algorithms for a class of partial differential equations displaying boundary layer behavior. *Methods and Applications of Analysis*, 7(2) :363–390, 2000.
- [26] L. CHUPIN. Some theoretical results concerning diphasic viscoelastic flows of the Oldroyd kind. *Advances In Differential Equations*, 9(9–10) :1039–1078, 2004.
- [27] E. J. DEAN, R. GLOWINSKI, and G. GUIDOBONI. On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : old and new results. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 142 :36–62, 2007.
- [28] B. DESJARDINS and E. GRENIER. Derivation of quasigeostrophic potential vorticity equations. *Advances In Differential Equations*, 5(3) :715–752, 1998.
- [29] B. DESJARDINS and E. GRENIER. On the homogeneous model of wind driven ocean circulation. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(1) :43–60, 2000.

- [30] G. DUVAUT and J.-L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.
- [31] W. E. Propagation of oscillations in the solutions of 1-D compressible fluid equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 17(3–4) :347–370, 1992.
- [32] A. M. FERREIRO FERREIRO. *Desarrollo de técnicas de post-proceso de flujos hidrodinámicos, modelización de problemas de transporte de sedimentos y simulación numérica mediante técnicas de volúmenes finitos.* Phd, Universidad de Sevilla, 2006.
- [33] E. FRÉNOD, A. MOUTON, and E. SONNENDRÜCKER. Two-scale numerical simulation of the weakly compressible 1D isentropic Euler equations. To appear, 2007.
- [34] J.-F. GERBEAU and B. PERTHAME. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B.*, 1(1) :89–102, 2001.
- [35] A. E. GILL. *Athmosphere-Ocean Dynamics.* New York : Academic Press, 1982.
- [36] A. J. GRASS. Sediment transport by waves and currents. Technical Report FL29, SERC London Cent. Mar. Technol., 1981.
- [37] E. GRENIER and N. MASMOUDI. Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data. *Comm. Partial Diff. Equations*, 22 :953–975, 1997.
- [38] M. HILLAIRET. Propagation of density-oscillations in solutions to the barotropic compressible Navier-Stokes system. *J. Math. Fluid Mech.*, 2007. To appear.
- [39] J. HUDSON. *Numerical technics for morphodynamic modelling.* Phd, University of Whitknights, 2001.
- [40] W. JÄGER and A. MIKELIĆ. On the roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow. *J. Diff. Eq.*, 170 :96–122, 2001.
- [41] C. KAZANTSEV, E. KAZANTSEV, and E. BLAYO. Compact finite difference schemes for shallow-water ocean model. Technical Report 4913, INRIA, 2003.
- [42] R. KLEIN. Multiple scales asymptotics for atmospheric flows. In *Proceedings of the 4th European Conference on Mathematics, Stockholm*, 2004.
- [43] E. LAUGA, M. P. BRENNER, and H. A. STONE. *Handbook of Experimental Fluid Dynamics*, chapter 15. Springer, New-York, 2006.
- [44] C. LE PROVOST, C. BERNIER, and E. BLAYO. A comparison of two numerical methods for integrating a quasi geostrophic multilayer model of ocean circulations. *J. Comp. Phys.*, 110 :341–359, 1994.
- [45] C. D. LEVERMORE, M. OLIVER, and E. S. TITI. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana Univ. Math. J.*, 45 :479–510, 1996.
- [46] C. D. LEVERMORE and M. SAMMARTINO. A shallow water model with eddy viscosity for basins with varying bottom topography. *Nonlinearity*, 14 :1493–1515, 2001.

- [47] J.-L. LIONS and E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1968.
- [48] P.-L. LIONS and N. MASMOUDI. Homogenization of the Euler system in a 2D porous medium. *J. Math. Pures Appl.*, 84 :1–20, 2005.
- [49] C. LUCAS. Cosine effect on shallow water equations and mathematical properties. To appear, 2007.
- [50] C. LUCAS. Effet cosinus sur un modèle visqueux de type saint-venant et ses équations limites de type quasi-géostrophique et lacs. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 345 :313–318, 2007.
- [51] A. MAJDA. *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*. Courant Lecture Notes 9. American Mathematical Society, 2003.
- [52] F. MARCHE. *Theoretical and numerical study of shallow water models ; applications to nearshore hydrodynamics*. Phd, Université Bordeaux 1, 2005.
- [53] F. MARCHE. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European J. Mech. B / Fluids*, 2006.
- [54] F. MARCHE and P. FABRIE. Another proof of stability for global weak solutions of 2D degenerated Shallow Water models. Submitted.
- [55] N. MASMOUDI. Ekman layers of rotating fluids : The case of general initial data. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(4) :432–483, 2000.
- [56] A. MELLET and A. VASSEUR. On the barotropic compressible Navier-Stokes equations. *Comm. Partial Diff. Equations*, 2007. To appear.
- [57] E. MEYER-PETER and R. MÜLLER. Formula for bed-load transport. pages 39–64. Proc. 2nd Meet. Int. Assoc. Hydraul. Struct. Res., 1948.
- [58] C. L. M. H. NAVIER. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, VI :389–440, 1823.
- [59] A. ORON, S. H. DAVIS, and S. G. BANKOFF. Long scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 69(3) :934–980, 1997.
- [60] J. PEDLOSKY. *Geophysical fluid dynamics, 2d edition*. Springer, 1987.
- [61] D. RAMOS. *Quelques résultats mathématiques et simulations numériques d'écoulements régis par des modèles bifluides*. Phd, Ecole normale supérieure de Cachan, 2000.
- [62] A. J.-C. de SAINT-VENANT. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 73 :147–154, 1871.
- [63] D. SERRE. Oscillations non linéaires des systèmes hyperboliques : méthodes et résultats qualitatifs. *Ann. Inst. N. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 8(3–4) :351–417, 1991.

-
- [64] D. SERRE. Oscillations non linéaires de haute fréquence ; $\dim = 1$. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XII (Paris, 1991-1993)*, volume 302 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 190–210. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
 - [65] V. V. SHELUKHIN. Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids. *J. Math. Fluid Mech.*, 4 :109–127, 2002.
 - [66] J. SIMON. Compact Sets in the Space $L^p(0, t; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146(4) :65–96, 1987.
 - [67] P. N. SWARZTRAUBER. Fast poisson solvers. In G. H. Golub, editor, *Studies in Numerical Analysis*, volume 24, pages 319–370. MAA, 1984.
 - [68] B. TOUMBOU, D. LE ROUX, and A. SENE. An existence theorem for a 2-D coupled sedimentation shallow water model. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I*, 344(7) :443–446, 2007.
 - [69] J.-P. VILA. Two moments closure equations of shallow water type for thin film laminar flow gravity driven. In preparation.
 - [70] H. J. de VRIEND. 2DH Mathematical Modelling of Morphological Evolutions in Shallow Water. *Costal Engineering*, 11 :1–27, 1987.
 - [71] A. WIEGMANN. Fast elliptic solvers on rectangular parallelepipeds.
<http://www.itwm.fhg.de/sks/employees/wiegmann/References/fft.pdf>.

Résumé : Dans une première partie, nous présentons des équations de Saint-Venant. Sur le modèle proprement dit, nous remarquons tout d'abord que, suivant le lien entre la viscosité et le rapport des échelles caractéristiques, il est indispensable de conserver l'expression complète de la force de Coriolis : nous obtenons ainsi un nouveau modèle, avec un “effet cosinus”. Nous montrons alors que les preuves d'existence de solutions faibles peuvent être adaptées à ce nouveau système. Des simulations numériques de certaines ondes soulignent l'importance de ce terme. Nous étudions ensuite l'influence des conditions limites (surface, fond) et du tenseur des contraintes sur des modèles de type Saint-Venant. Nous présentons également des modèles obtenus en utilisant des échelles multiples en espace et en temps. Enfin, nous analysons théoriquement et numériquement un nouveau modèle de sédimentation puis nous donnons certains résultats pour les fluides visco-plastiques.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons aux équations limites que sont les équations quasi-géostrophiques (QG) et les équations des lacs. L'étude numérique des équations QG 2d met en évidence le rôle de l'effet cosinus de la force de Coriolis. En fonction de la topographie considérée, nous montrons que celui-ci peut être non négligeable. Toujours sur les équations QG, nous donnons un schéma, basé sur des développements asymptotiques, qui permet de bien capturer la couche limite mais aussi d'ajouter le terme de topographie à la solution obtenue avec fond plat, sans tout recalculer. Enfin, nous expliquons l'obtention des équations des lacs avec effet cosinus, et nous prouvons que les propriétés d'existence de solutions restent valables.

Mots-clés : équations aux dérivées partielles, équations de Saint-Venant, modélisation de fluides tournants, développements asymptotiques, analyse multi-échelles, estimations *a priori*, stabilité de solutions approchées, études numériques.

Abstract: In a first part, we present some Shallow Water equations. About the actual model, we firstly remark that, depending on the link between the viscosity and the aspect ratio, keeping the complete Coriolis force expression is essential: this gives a new model, with a so-called “cosine effect”. We then show that the proofs of existence of weak solutions can be adapted to this new system. Numerical simulations of some waves underline the fact that this term is of importance. Next we study the influence of the limit conditions (surface, bottom) and of the stress tensor on Shallow-Water type models. We also present some models obtained using multiple scales in space and time. Finally we analyze a new model of sedimentation from a theoretical and numerical point of view and then we give some results for visco-plastic fluids.

In a second part, we are interested in the limit equation, namely the Quasi-Geostrophic (QG) equations and the lake equations. The numerical study of the 2d QG equations enables us to emphasize the role of the cosine effect from the Coriolis force. Depending on the topography we consider, we show that this effect can turn out to be not negligible. Still about the QG equations, we give a numerical scheme, based on asymptotic developments, which capture the boundary layer well and also give the opportunity to add a topography term to the solution for a flat bottom, without re-computing everything. Lastly we explain how to get the lake equations with cosine effect and we prove that the properties of existence of solutions to such equations are still valid.

Keywords: differential partial equations, Shallow-Water equations, models of rotating fluids, asymptotic developments, multi-scale analysis, *a priori* estimates, stability of approximated solutions, numerical studies.