UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Corrigé feuille 2: révisions de la Toussaint. (Rappels: pas de cours-td la semaine du 3 au 7 novembre 2008). Devoir sur table la semaine suivante.

Exercice 1. (1) Utilisez l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que $(E_1) : 89x + 41y = 1$. On a
$89 = 2 \times 41 + 7; \quad 41 = 5 \times 7 + 6; \quad 7 = 1 \times 6 + 1.$
ainsi $pgcd(89, 41) = 1$ et

$$1 = 7 - 6 = 7 - (41 - 5 \times 7) = 7 - 41 + 5 \times 7$$

$$= 6 \times 7 - 41 = 6 \times (89 - 2 \times 41) - 41 = 6 \times 89 - 13 \times 41.$$

(On vérifiera toujours sur un brouillon cette dernière équation $6 \times 89 - 13 \times 41 = 1$). Ainsi $x = 6$ et $y = -13$ conviennent.
(1') Même question avec $(E_2) : 59x + 27y = 1$. On a
$59 = 2 \times 27 + 5; \quad 27 = 5 \times 5 + 2; \quad 5 = 2 \times 2 + 1$. D'où $pgcd(59, 27) = 1$ et

$$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (27 - 5 \times 5) =$$

$$11 \times 5 - 2 \times 27 = 11 \times (59 - 2 \times 27) - 2 \times 27$$

$$= 11 \times 59 - 24 \times 27.$$

ainsi $x = 11$ et $y = -24$ conviennent. (On vérifiera toujours sur un brouillon cette dernière équation $11 \times 59 - 24 \times 27 = 1$).

(2) Trouver tous les couples solutions de l'équation (E_1) puis de l'équation (E_2).
On suit la méthode du cours:
Pour (E_1) :
On a obtenu une solution particulière $x_0 = 6$ et $y_0 = -13$. Par différence entre l'équation satisfaite par la solution générale cherchée et l'équation satisfaite par la solution particulière, on obtient

$$89(x - x_0) + 41(y - y_0) = 1 - 1 = 0$$

ainsi

$$89(x - x_0) = -41(y - y_0) = 41(y_0 - y) \quad (\alpha).$$

D'où 89 divise $41(y_0 - y)$. On sait que 89 et 41 sont premiers entre eux (Pgcd $=1$). Par le théorème de Gauss, 89 divise $y_0 - y$ i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $y_0 - y = 89k$ i.e. $y = y_0 - 89k$. On réintroduit y dans l'équation (α),

$$89(x - x_0) = 41(y_0 - y) = 41 \times 89k.$$

On simplifie par 89 et on obtient, $x - x_0 = 41k$. Ce qui donne $x = x_0 + 41k$. Les solutions si elles existent sont donc parmi les couples $(x, y) = (6 + 41k, -13 - 89k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. Il est facile (et nécessaire) de vérifier que si on pose $x = 6 + 41k$ et $y = -13 - 89k$ pour n'importe quel $k \in \mathbb{Z}$ fixé alors l'équation $89x + 41y = 1$ est toujours satisfaite. Ce qui signifie qu'on a exactement toutes les solutions de l'équation sous la forme $(x,y) = (6+41k, -13-89k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Pour (E_2): On donne le résultat: les solutions sont exactement les couples $(x,y) = (11+27k, -24-59k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. La solution particulière était $x_0 = 11$ et $y_0 = -24$.

Exercice 2. (1) Calculer $pgcd(47,35)$. Par l'algo. d'Euclide:
$47 = 1 \times 35 + 12$; $35 = 2 \times 12 + 11$; $12 = 1 \times 11 + 1$. D'où $pgcd(47,35) = 1$ (Premiers entre eux).

(2) Trouver toutes les solutions entières de $47x + 35y = 1$.
Une solution particulière donnée par l'algo. d'Euclide est: $1 = 3 \times 47 - 4 \times 35$ i.e. $x_0 = 3$ et $y_0 = -4$. La solution générale est $x = 3 + 35k$, $y = -4 - 47k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions entières de $141x + 105y = 3$. On calcule le $pgcd(141,105) = 3$. On peut donc diviser 141 et 105 par 3. On divise de chaque côté de l'équation par 3, la nouvelle équation est $47x+35 = 1$. Ainsi les solutions de $141x+105y = 3$ sont des solutions de $47x + 35 = 1$. Réciproquement si x et y sont solutions de $47x + 35 = 1$ alors en multipliant par 3 cette équation, x et y satisfont aussi l'équation $141x+105y = 3$. Les solutions de $47x+35 = 1$ et de $141x+105y = 3$ sont donc identiques. Les solutions de $47x + 35 = 1$ ont déja été obtenu !

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on résoudre $47x + 35y = n$? Si oui, donner les solutions.

Pour ce type de question le pgcd de 47 et 35 est utile: il vaut 1.

Le cas $n = 0$ se traite indépendemment. On a donc $47x = 35(-y)$. Puisque 47 et 35 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 47 divise $-y$ i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y = 47k$. On a donc pour x, $47x = 35 \times 47k$ i.e. $x = 35k$. Ainsi si (x,y) est un couple solution alors $x = 35k$ et $y = -47k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, il est facile de vérifier que $x = 35k$ et $y = -47k$ sont effectivement des solutions de $47x+35y = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions sont donc exactement $(x,y) = (35k, -47k), k \in \mathbb{Z}$. (Pour faire le lien avec notre méthode usuelle, on notera que $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ est une solution particulière de l'équation avec $n = 0$.)

Le cas $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit (a,b) une solution de $47a + 35b = 1$. Si on multiplie par n cette équation, on obtient $47(na) + 35(nb) = n$. Ainsi $x = na$ et $y = nb$ fournit un couple solution de $47x + 35y = n$. Mais est-ce que toutes les solutions sont de cette forme ? Pour $n \neq 1$: NON. On choisit a_0 et b_0 une solution particulière de $47a + 35b = 1$, ce qui nous donne une solution particulière $x = na_0$, $y = nb_0$ de $47x+35y = n$ i.e. $47x_0+35y_0 = n$. La solution générale (x,y) de $47x+35y = n$ satisfait alors $47(x-x_0)+35(y-y_0) = n-n = 0$. On résout alors cette équation avec la méthode usuelle! alors les solutions sont $x = 3n + 35k$, $y = -4n - 47k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ($x_0 = 3n$, $y_0 = -4n$ est une solution particulière).

Pourquoi les solutions $x = na$ et $y = nb$ ne sont pas toutes les solutions? On a vu que $a = 3 + 35k$ et $b = -4 - 47k$ ci-dessus. Si toutes les solutions étaient de la forme $x = na$ et $y = nb$, on obtiendrait que les solutions seraient toutes de la forme $x = 3n + 35nk$ et $y = -4n - 47nk$. Ainsi on obtiendrait uniquement les multiples nk au lieu de tous les entiers k. (Exemple avec $n = 2$, on obtiendrait uniquement les entiers pairs $2k$).

Exercice 3. $pgcd(33\,810; 4\,146) = 2$.

Exercice 4. Soit n un entier naturel. On pose $a = 3n+4$ par $b = 2n+3$. Prouvons que si d divise a et b alors d divise 1. On a que d divise $2a = 6n + 8$ et d divise $3b = 6n + 9$ donc d divise la différence $3b - 2a = 1$ ainsi $d = 1$. On en déduit que si d est le $pgcd$ de a et b alors d divise a et b donc $d = 1$. Ainsi a et b sont premiers entre eux.

Exercice 5. (Exercice similaire au précédent avec un argument du cours). Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n+1$ par $b = 3n+2$. On a $3a = 6n+3$ et $2b = 6n+4$ alors $2b - 3a = 1$. C'est une relation entre a et b indépendante de n. D'après un théorème du cours s'il existe deux entiers u et v tels que $ua + vb = 1$ alors c'est équivalent a et b premiers entre eux. Ici $u = -3$ et $v = 2$ conviennent alors a et b sont premiers entre eux.

Exercice 6. (1) Les diviseurs de 21 sont $1; 3; 7$ et 21 car $21 = 3 \times 7$.
(2) Les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^2 - b^2 = 21$ vérifient $(a-b)(a+b) = 21$ ainsi $a - b$ et $a + b$ sont des diviseurs de 21. On a les cas suivants:
(i) $a - b = 1$ et $a + b = 21$. Par somme des équations $2a = 22$ i.e. $a = 11$ donc $b = 10$.
(ii) $a - b = 3$ et $a + b = 7$. Aussi par somme des équations $2a = 10$ i.e $a = 5$ donc $b = 2$.
(iii) $a - b = 7$ et $a + b = 3$ donc $2a = 10$ i.e. $a = 5$ et $b = -2$.
(iv) $a - b = 21$ et $a + b = 1$ donc $2a = 22$ i.e. $a = 11$ et $b = -10$.
Ceci donne tous les couples (a, b) solutions de l'équation.
(3) (Même méthode). On décompose $15 = 3 \times 5$ ainsi les diviseurs de 15 sont $1; 3; 5$ et 15. Les solutions de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 15$ sont $a = 8$ et $b = 7$, $a = 4$ et $b = 1$, $a = 4$ et $b = -1$, $a = 8$ et $b = -7$.

Exercice 7. Calculer le pgcd et le ppcm de $a = 105$ et $b = 231$. On a $pgcd(a, b) = 21$. Donc $ppcm(a, b) = \frac{ab}{pgcd(a,b)} = 5 \times 231 = 1155$.

Exercice 8. Montrons que $2^{2n} - 1$ est divisible par $2^n - 1$. On a

$$2^{2n} - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1).$$

Montrons que $2^{3n} - 1$ est divisible par $2^n - 1$. On a

$$2^{3n} - 1 = (2^n)^3 - 1 = (2^n - 1)(2^{2n} + 2^n + 1)$$

on prend $b = 2^n$ dans $b^3 - 1 = (b - 1)(b^2 + b + 1)$.

Exercice 9. On cherche les couples (x, y) d'entiers naturels tels que :
$xy = 1512$ et $ppcm(x, y) = 252$. Calculons $d = pgcd(x, y) = \frac{xy}{ppcm(x,y)} = 6$. Soit $x = dx'$,

$y = dy'$ où x', y' sont premiers entre eux alors $xy = 1512 = d^2x'y'$.

D'où $x'y' = \frac{1512}{6^2} = 42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$. Les choix de x' et y' sont

$x' = 1, \quad y' = 42$

$x' = 2, \quad y' = 21$

$x' = 3, \quad y' = 14$

$x' = 7, \quad y' = 6$

$x' = 6, \quad y' = 7$

$x' = 14, \quad y' = 3$

$x' = 21, \quad y' = 2$

$x' = 42, \quad y' = 1$.

Exercice 10. Expliquez pourquoi il est impossible de trouver u v dans $\mathbb{Z}$ tels que $6u - 9v = 2$.

On a $3(2u - 3v) = 2$. Ainsi 2 est un multiple de 3 car $(2u - 3v) \in \mathbb{Z}$! Impossible.