UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Corrigé du Contrôle 2 (30 mn).

Exercice 1. 1)*Décomposer en produits de facteurs premiers le nombre* 120(110).

$$120 = 2^3.3.5 \ (110 = 2.5.11)$$

2) *Chercher tous les entiers* $a \geq b \geq 0$ *vérifiant* $pgcd(a,b) = 2$ et $ppcm(a,b) = 110$.

On a $ab = pgcd(a,b).ppcm(a,b) = 2^2.5.11$. Puisque $pgcd(a,b) = 2$ alors $a = 2a'$ et $b = 2b'$ avec $pgcd(a',b') = 1$. D'où

$$2^2a'b' = 2^2.5.11$$

donc $a'b' = 5.11 = 55$. Puisque a' et b' n'ont pas de facteurs premiers en commun. On a quatre cas avec $a',b' \geq 0$:

1) $a' = 1, \quad b' = 55.$ 2) $a' = 5, \quad b' = 11.$

3) $a' = 11, \quad b' = 5.$ 4) $a' = 50, \quad b' = 1.$

Avec la condition supplémentaire $a' \geq b'$, il reste deux couples de solutions $a' = 11, b' = 5$ et $a' = 50, b' = 1$. Ainsi $a = 22, b = 10$ et $a = 100, b = 2$ sont les deux couples solutions cherchés

Exercice 2. Soient $x = r^2p^2$ avec p,r deux nombres premiers distincts.

1) *Combien l'entier* x *a-t-il de diviseurs ?* On a $(1+2)(1+2) = 9$ diviseurs.

2) La liste des diviseurs de x est

$$\{1,\ r,\ r^2,\ p,\ rp,\ r^2p,\ p^2,\ p^2r, p^2r^2\}.$$

Ces nombres sont tous distincts car la décomposition en facteurs premiers de tout nombre est unique et ici chaque diviseur a une décomposition différente.

Exercice 3. *Montrer que* $y = 4^n - 1$ *n'est pas un nombre premier pour tout* $n \geq 2$.
Sol: Avec la formule $b^n - 1 = (b-1)(b^{n-1} + b^{n-2} + ... + b^2 + b + 1)$ avec $b = 4$. On obtient

$$4^n - 1 = (4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 4 + 1) = 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 4 + 1).$$

On en déduit que y est divisible par 3. Puisque $y \geq 4^2 - 1 = 15$, y est produit de deux entiers différents de 1 et y donc il n'est pas premier.

Exercice 4. *Résoudre l'équation $x^2 - y^2 = 7$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.*
Sol: On a $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 7$. Puisque 7 est premier, on a quatre décompositions $1 \times 7 = 7$, $7 \times 1 = 7$, $(-1) \times (-7) = 7$ et $(-7) \times (-1) = 7$. D'où quatre cas

1) $x - y = 1$ et $x + y = 7$. D'où $x = 4$ et $y = 3$.

2) $x - y = 7$ et $x + y = 1$. D'où $x = 4$ et $y = -3$.

3) $x - y = -1$ et $x + y = -7$. D'où $x = -4$ et $y = -3$.

4) $x - y = -7$ et $x + y = -1$. D'où $x = -4$ et $y = 3$.

L'ensemble des couples solutions (x, y) est $S = \{(4, 3); (4, -3); (-4, -3); (-4, 3)\}$.

Exercice 5. *1) Trouver une solution particulière (x_0, y_0) avec $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $y_0 \in \mathbb{Z}$ de $3x_0 + 5y_0 = 1$.*
Sol: Par l'algorithme d'Euclide $(2) \times 3 + (-1) \times 5 = 1$ (Bezout). D'où $x_0 = 2$ et $y_0 = -1$.

2) *En déduire une solution particulière de $3a + 5b = 4$.* On a $3x_0 + 5y_0 = 1$. En multipliant par 4:

$$3(4x_0) + 5(4y_0) = 4.$$

Une solution particulière est $a = 4x_0 = 8$ et $b = 4y_0 = -4$.

3) *Chercher toutes les solutions de $3x + 5y = 4$* . Sol: On calcule la différence $3(x - a) + 5(y - b) = 4 - 4 = 0$. On obtient $3(x - a) = 5(b - y)$. Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux et que 3 divise $5(b - y)$ alors, par le lemme de Gauss, 3 divise $b - y$ i.e. $b - y = 3k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $y = b - 3k$ et $3(x - a) = 5(b - y) = 5 \times 3k$ d'où $x - a = 5k$ ou encore $x = a + 5k$. Ainsi: si le couple (x, y) est solution de $3x + 5y = 4$ alors x et y sont de la forme $x = 8 + 5k$ et $y = -4 - 3k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, montrons que les couples $x_k = 8 + 5k$, $y_k = -4 - 3k$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ sont tous solutions de $3x + 5y = 4$. En effet, on a $3x_k + 5y_k = 3(8 + 5k) + 5(-4 - 3k) = 24 - 20 = 4$.

L'ensemble des couples solutions est $S = \{(8 + 5k, -4 - 3k), k \in \mathbb{Z}\}$.

$\triangle$