UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02

Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Corrigé du Contrôle 2 (30 mn).

Exercice 1. 1)*Décomposer en produits de facteurs premiers le nombre* 120.

$$120 = 2^3.3.5$$

2) *Chercher tous les entiers* $a \geq b \geq 0$ *vérifiant* $pgcd(a, b) = 3$ et $ppcm(a, b) = 120$.

On a $ab = pgcd(a, b).ppcm(a, b) = 2^3.3^2.5$. Puisque $pgcd(a, b) = 3$ alors $a = 3a'$ et $b = 3b'$ avec $pgcd(a', b') = 1$. D'où

$$3^2a'b' = 2^3.3^2.5$$

donc $a'b' = 2^3.5 = 40$. Puisque a' et b' n'ont pas de facteurs premiers en commun. On a quatre cas avec $a', b' \geq 0$:

1) $a' = 1$, $b' = 2^3.5 = 40$. 2) $a' = 2^3 = 8$, $b' = 5$.

3) $a' = 5$, $b' = 2^3 = 8$. 4) $a' = 2^3.5 = 40$, $b' = 1$.

Avec la condition supplémentaire $a' \geq b'$, il reste deux couples de solutions $a' = 8, b' = 5$ et $a' = 40, b' = 1$

Exercice 2. Soient $x = qrp^2$ avec p, q, r trois nombres premiers distincts.

1) *Combien l'entier* x *a-t-il de diviseurs ?* On a $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 2) = 12$ diviseurs.

2) La liste des diviseurs de x est

$$\{1,\ p,\ p^2,\ q,\ qp,\ qp^2,\ r,\ rp,\ rp^2,\ rq,\ rqp,\ rqp^2\}.$$

Ces nombres sont tous distincts car la décomposition en facteurs premiers de tout nombre est unique et ici chaque diviseur a une décomposition différente.

Exercice 3. *Montrer que* $y = 3^n - 1$ *n'est pas un nombre premier pour tout* $n \geq 2$.
Sol: Avec la formule $b^n - 1 = (b - 1)(b^{n-1} + b^{n-2} + ... + b^2 + b + 1)$ avec $b = 3$. On obtient

$$3^n - 1 = (3 - 1)(3^{n-1} + 3^{n-2} + ... + 3 + 1) = 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + ... + 3 + 1)$$

On en déduit que y est divisible par 2. Puisque $y \geq 3^2 - 1 = 8$, y est produit de deux entiers différents de 1 et y donc il n'est pas premier.

Exercice 4. *Résoudre l'équation $x^2 - y^2 = 5$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.*
Sol: On a $x^2-y^2 = (x-y)(x+y) = 5$. Puisque 5 est premier, on a quatre décompositions $1 \times 5 = 5$, $5 \times 1 = 5$, $(-1) \times (-5) = 5$ et $(-5) \times (-1) = 5$. D'où quatre cas

1) $x - y = 1$ et $x + y = 5$. D'où $x = 3$ et $y = 2$.

2) $x - y = 5$ et $x + y = 1$. D'où $x = 3$ et $y = -2$.

3) $x - y = -1$ et $x + y = -5$. D'où $x = -3$ et $y = -2$.

4) $x - y = -5$ et $x + y = -1$. D'où $x = -3$ et $y = 2$.

L'ensemble des couples solutions (x, y) est $S = \{(3, 2); (3, -2); (-3, -2); (-3, 2)\}$.

Exercice 5. *1) Trouver une solution particulière (x_0, y_0) avec $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $y_0 \in \mathbb{Z}$ de $7x_0 + 2y_0 = 1$.*
Sol: Par l'algorithme d'Euclide $7 = 3 \times 2 + 1$. D'où $(1) \times 7 + (-3) \times 2 = 1$ (Bezout). D'où $x_0 = 1$ et $y_0 = -3$.

2) *En déduire une solution particulière de $7a + 2b = 5$.* On a $7x_0 + 2y_0 = 1$. En multipliant par 5:

$$7(5x_0) + 2(5y_0) = 5.$$

Une solution particulière est $a = 5x_0 = 5$ et $b = 5y_0 = -15$.

3) *Chercher toutes les solutions de $7x + 2y = 5$* . Sol: On calcule la différence $7(x - a) + 2(y - b) = 5 - 5 = 0$. On obtient $7(x - a) = 2(b - y)$. Puisque 7 et 2 sont premiers entre eux et que 7 divise $2(b - y)$ alors, par le lemme de Gauss, 7 divise $b - y$ i.e. $b - y = 7k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $y = b - 7k$ et $7(x - a) = 2(b - y) = 2 \times 7k$ d'où $x - a = 2k$ ou encore $x = a + 2k$. Ainsi: si le couple (x, y) est solution de $7x + 2y = 5$ alors x et y sont de la forme $x = 5 + 2k$ et $y = -15 - 7k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, montrons que les couples $x_k = 5 + 2k$, $y_k = -15 - 7k$ pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ sont tous solutions de $7x + 2y = 5$. En effet, on a $7x_k + 2y_k = 7(5 + 2k) + 2(-15 - 7k) = 35 - 30 = 5$.

L'ensemble des couples solutions est $S = \{(5 + 2k, -15 - 7k), k \in \mathbb{Z}\}$.

$\triangle$