UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL1 MA02
Département de mathématiques 2008-9

Arithmétique : Examen (2h : vendredi 16 Janvier).

(Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits)

La rédaction et les justifications seront prises en compte lors de la correction.

Exercice 1. (1) Calculer le reste de la division euclidienne de 3^{182} par 7.

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [15] \\ x \equiv 6\ [11]. \end{cases}$$

(3) Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que:

$$7x + 5y = 1.$$

puis trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que:

$$7a + 5b = 3.$$

Exercice 2. Pour n entier strictement positif, soit $S_n = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^3$.

(1) Soient a et b deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux, démontrer que a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux. (*On pourra considérer p un nombre premier diviseur de* $\text{pgcd}(a^2, b^2)$ *et obtenir une contradiction*).

(2) Démontrer que pour tout $n > 0$, $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

(3) **Cas où n est pair**. Soit k un entier naturel non nul. Posons $n = 2k$.

(a) Démontrer que $\text{pgcd}(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k + 1)^2\ \text{pgcd}(k^2, (k + 1)^2)$.

(b) En déduire $\text{pgcd}(S_{2k}, S_{2k+1})$.

(4) **Cas oǹ est impair**. Posons $n = 2k + 1$. Calculer $\text{pgcd}(S_{2k+1}, S_{2k+2})$.

(5) Existe-t-il une valeur de n pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux ?

Exercice 3. (1) Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que

$$\text{pgcd}(a + b, ab) = p$$

où p est premier.

(a) Démontrer que p divise a et b.

(b) Puis que $\text{pgcd}(a, b) = p$.

(2) La réciproque est-elle vraie ? Prendre par exemple $a = 10$ et $b = 15$.

(3) Résoudre le système $\text{pgcd}(a, b) = 5$ et $\text{ppcm}(a, b) = 170$ où a et b sont des entiers naturels tels que a inférieur ou égal à b.

(4) En déduire les solutions du système $\text{pgcd}(a + b, ab) = 5$ et $\text{ppcm}(a, b) = 170$ où a et b sont des entiers naturels tels que a inférieur ou égal à b.

Exercice 4. L' objet de cet exercice est de démontrer qu' il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

(1) Donner trois nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

(2) Notons E l' ensemble des nombres premiers congrus à 3 modulo 4 et supposons qu' il est fini de cardinal n : $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$.

Soit $\alpha = (4a_1 \cdots a_n) + 3$ et soit p un nombre premier divisant α.

(a) Montrer que p ne peut pas être égal à 2.

(b) Justifier que p est congrus modulo 4, soit à 1 soit à 3.

(c) p peut-il être congru à 3 modulo 4 ?

(d) Démontrer que tout diviseur premier de α est congru à 1 modulo 4 et aboutir à une absurdité.

$\triangle$