UNIVERSITÉ d'ORLÉANS SCL3 MT02
Département de mathématiques 2008-9

Corrigé du devoir sur table (1h).

Exercice 1. On considère $E = \{1; 2; ...n\}$. On fixe $k = 0; 1; ...n$.

(1) Dans le formalisme mathématique, l'ensemble des sous-ensembles (i.e. parties) de taille k dans E est $\mathcal{P}_k = \{\{i_1, i_2, ...i_k\}, 1 \le i_1 < i_2 < ...i_k \le n\}$. On utilise la condition $1 \le i_1 < i_2 < ...i_k \le n$ pour ne pas répéter inutilement plusieurs fois le même ensemble. Les éléments de $\{i_1, i_2, ...i_k\}$ ne sont pas ordonnés.

(2) Le nombre de sous-ensembles de taille k dans E est $\mathrm{Card}(\mathcal{P}_k) = C_n^k$ car il s'agît de prendre k éléments parmi n pour former un sous-ensemble. (En comptant l'ensemble vide ($k = 0$) et l'ensemble E lui-même ($k = n$)).

(3) Le nombre de sous-ensembles dans E est $\sum_{k=0}^n C_n^k$ car $E = \cup_{k=0}^n \mathcal{P}_k$ et les $(\mathcal{P}_k)$ sont deux à deux disjoints. En effet, un sous-ensemble de E à une taille entre 0 et n. D'où $\mathrm{Card}(E) = \sum_{k=0}^n \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k) = \sum_{k=0}^n C_n^k$.

(4) Pour A une partie de E. On note $x_A = (x_1, x_2, ..., x_n)$ avec $x_j = \mathbf{I}_A(j), j : 1...n$ où $\mathbf{I}_A$ désigne l'indicatrice de A.

(a) Pour $n = 5$, $x_A = (1, 0, 1, 0, 0)$ lorsque $A = \{1; 3\}$ et $x_A = (1, 0, 0, 1, 1)$ lorsque $A = \{1; 4; 5\}$?

(b) Montrons que $\phi : \mathcal{P}(E) \to \{0; 1\}^n$ défini par $A \to \phi(A) = x_A$ est une bijection. ($\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E).
injectivité: Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\phi(A) = \phi(B)$ i.e. $\mathbf{I}_A(j) = \mathbf{I}_B(j)$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$. Or $j \in A$ ssi $\mathbf{I}_A(j) = 1$ ssi $\mathbf{I}_B(j) = 1$ ssi $j \in B$. D'où $A = B$.
surjectivité: Soit $y = (y_1, ..., y_n)$ avec $y_j \in \{0, 1\}$. On construit A tel que $\phi(A) = y$ de la manière suivante: on dit que $j \in A$ si $y_j = 1$ et $j \notin A$ si $y_j = 0$. On vérifie alors $\phi(A) = y$, donc ϕ est surjective. *L'application ϕ consiste à coder l'ensemble A en une suite de 0 et de 1 et à un codage correspond un unique sous-ensemble A.*

(c) Le cardinal de $\mathrm{Card}\mathcal{P}(E) = \mathrm{Card}(\{0; 1\}^n) = 2^n$ car ϕ est bijective. *Ceci fournit donc un autre calcul de* $\mathrm{Card}\mathcal{P}(E)$.

(d) Avec (3) et (4c), on déduit la valeur de $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$. *Ceci correspond à la simple formule binomiale* $(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

Exercice 2. Un libraire a reçu p exemplaires d'un livre d'un auteur à succés. Ces exemplaires sont numérotés (car signés par l'auteur). Le libraire regroupe ces livres avec q autres exemplaires non numérotés du même ouvrage.

(1) Combien de paquets de $q+1$ livres peut-on faire contenant l'exemplaire numéro i et ne contenant pas les numéros suivants dans ce regroupement de livres numérotés et non numérotés? *On note A_i l'ensemble de ces paquets.*

La manière générique de construire un événement de A_i est de prendre l' élément i (un seul choix) et de prendre q éléments parmi les $i-1$ éléments avant i et parmi les éléments non numérotés au nombre de q, en tout $q+i-1$ éléments, d'où C_{q+i-1}^{q} paquets de $q+1$ livres contenant l'exemplaire numéro i et ne contenant pas les numéros suivants. Ceci est $\mathrm{Card}A_i = C_{q+i-1}^{q}$.

(2) On considère Ω l'ensemble des paquets de $q+1$ livres parmi le $p+q$ livres. On a $\mathrm{Card}\,\Omega = C_{p+q}^{q+1}$. Puisque l'on prend $q+1$ livres et qu'il n'y a que q livres non numérotés alors il y a au moins un livre numéroté dans chaque paquet (Principe des tiroirs ou des cages à pigeons). Ainsi $\Omega = \cup_{i=1}^{p} A_i$. Les ensembles A_i sont disjoints (i est aussi le plus grand numéro des livres dans un paquet). Un paquet qui sera dans $A_i \cap A_j$ pour $i \neq j$ sera dans un paquet dont le livre de plus grand numéro serait i et aussi j avec $i \neq j$. Contradiction. D'où $\mathrm{Card}\,\Omega = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}A_i = \sum_{i=1}^{p} C_{q+i-1}^{q}$. Ainsi en posant $n = p+q-1$,

$$(eq) \quad C_q^q + C_{q+1}^q + C_{q+2}^q + \ldots C_n^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

(3) On montre directement (eq) avec la propriété $C_k^q + C_k^{q+1} = C_{k+1}^{q+1}$. On a

$$C_k^q = -C_k^{q+1} + C_{k+1}^{q+1}.$$

Alors $C_q^q + C_{q+1}^q + C_{q+2}^q + \ldots C_n^q =$

$$(-0 + C_{q+1}^{q+1}) + (-C_{q+1}^{q+1} + C_{q+2}^{q+1}) + (-C_{q+2}^{q+1} + C_{q+3}^{q+1}) + (-C_{q+3}^{q+1} + C_{q+4}^{q+1}) + \ldots(-C_n^{q+1} + C_{n+1}^{q+1})$$

seuls restent les deux termes des extrémités $(-0 + C_{n+1}^{q+1})$. D'où la formule (eq).

Exercice 3. Pour un entier x_i, on le code (on fait une bijection) avec des bâtons noté I. Par exemple pour $p = 6$, la solution $1+2+3$ s'écrit $I + II + III$ et la solution $0+6+0$ s'écrit $+IIIIII+$. A chaque x_i, on fait donc correspondre le nombre équivalent de bâtons. On garde aussi les signes $+$ de l'équation. Ainsi compter le nombre de solution revient à compter les *mots* de la forme $II..+III...+II....+IIIII$ représentant chaque solution de $x_1 + x_2 + \ldots.x_n = p$. Le code commence par un $+$ si $x_1 = 0$ et/ou finit par un $+$ si $x_n = 0$. On a p bâtons et $n-1$ signes $+$ soit en tout des *mots* de longeurs $p+n-1$. Puisque l'on a que deux symboles $+$ et I, une fois que l'on a placé les $+$ les autres emplacements sont pour les bâtons. (Ou si on place les bâtons en premier alors les autres emplacements sont pour les $+$). Il s'agît alors de placer p bâtons dans un mot de $p+n-1$ symboles. On a C_{n+p-1}^{p} solutions différentes. De manière analogue, si on place d'abord les $n-1$ signes $+$, on obtient le même nombre de solutions $C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^{p}$. Ainsi le nombre de solutions positives ou nulles de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots.x_n = p$ est C_{n+p-1}^{p} ou encore C_{n+p-1}^{n-1}.