

Feuille 1 bis.

**Exercice 1.** Une société multinationale impose l'anglais comme langue interne à toutes ses filiales. Le siège social de Bruxelles emploie  $p$  Flamands et  $q$  Wallons. Chaque matin, les employés se saluent deux par deux:

- en français lorsque les deux employés sont wallons,
- en néerlandais lorsque les deux employés sont flamands,
- en anglais lorsqu'il y a un Flamand et un Wallon.

- (1) Combien y-t-il d'échanges de politesses en français?
- (2) Combien y-t-il d'échanges de politesses en néerlandais?
- (3) Combien y-t-il d'échanges de politesses en anglais?
- (4) En déduire la relation

$$C_{p+q}^2 = C_p^2 + pq + C_q^2.$$

**Exercice 2.** Le sultan de Bagdad décide de partager équitablement ses  $np$  chameaux entre ses  $n$  fils.

- (1) Il donne  $p$  chameaux au premier fils, combien a-t-il de choix possibles ? (*Les chameaux sont distingués par des numéros*).  
Il donne  $p$  chameaux, parmi ceux qui restent, au deuxième fils, combien a-t-il de choix possibles ?  
Ainsi de suite... Il donne  $p$  chameaux, parmi ceux qui restent, au  $k^{i\text{eme}}$  fils, combien a-t-il de choix possibles ?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses  $n$  fils?

- (2) Les chameaux étant alignés, il donne les  $p$  premiers au premier fils, il donne les  $p$  suivants au deuxième fils, et ainsi de suite jusqu'au dernier.  
Combien y-a-t-il de manière d'aligner les chameaux?  
Combien d'alignements différents des chameaux correspondent à une même répartition entre les fils?

Combien a-t-il en tout de répartitions possibles des chameaux entre ses  $n$  fils?

- (3) Déduire des questions précédentes la relation

$$\prod_{k=1}^n C_{pk}^p = \frac{(np)!}{(p!)^n}.$$

*Il possède aussi  $n(n+1)$  ânes qu'il veut répartir entre ses fils proportionnellement à:  $n$  pour l'aîné,  $n-1$  pour le deuxième,...;  $n-k+1$  pour le  $k^{i\text{eme}}$ , ..., 2 pour l'avant-dernier et 1 pour le dernier.*

- (4) Déterminer la méthode de répartition des ânes.
- (5) Combien a-t-il de répartitions différentes des ânes?